

严格依据最新考研经济类联考大纲编写

高教版
2018

经济类联考综合能力

数学高分指南

主编 陈剑

高等教育出版社

- 考点剖析 + 核心题型 + 点睛归纳 + 阶梯训练
- 共 **69** 种题型，含 **258** 道例题，**420** 道练习题及 **6** 年真题
- 登录作者博客 <http://www.chenjian.cc>，提供答疑服务，留言 100% 回复



严格依据最新考研经济类联考大纲编写

高教版
2018

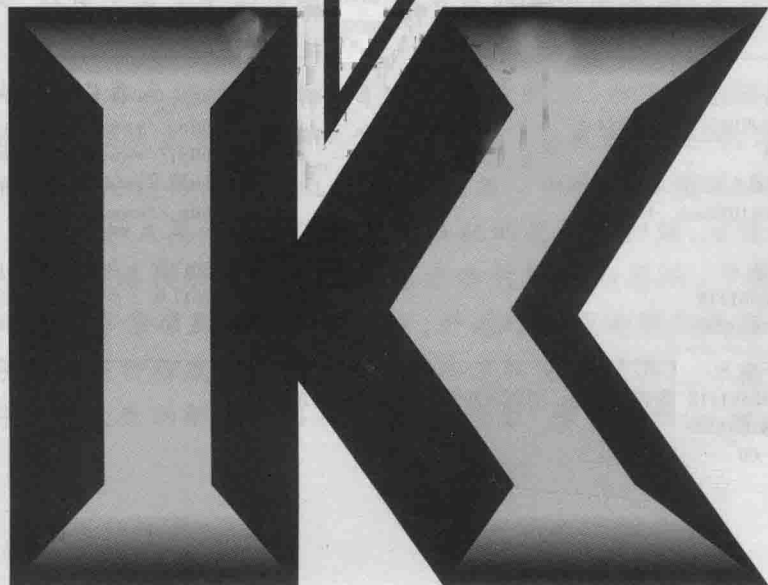
经济类联考综合能力

数学高分指南

主编 陈剑

高等教育出版社·北京

- 考点剖析 + 核心题型 + 点睛归纳 + 阶梯训练
- 共 **69** 种题型，含 **258** 道例题，**420** 道练习题及 **6** 年真题
- 登录作者博客 <http://www.chenjian.cc>，提供答疑服务，留言 100% 回复



内容简介

本书根据经济类专业学位联考综合能力考试的最新《考试大纲》、命题思路与规律,针对考生的实际需求,编写而成。全书由微积分、线性代数、概率论三部分构成,每部分各章包括考点剖析、核心题型、点睛归纳及阶梯训练。本书最后附了数学必备公式及历年真题与解析,以使考生了解经济类专业学位联考数学所要求的基本知识点和题型,从而掌握考试的广度和深度,做到目标明确,心中有数,在较短的时间内快速提高应试能力。

本书强调备考中的层次性、系统性、科学性,用概念和基础方法铺平备考的道路,融入“阶梯化”理念和循序渐进的方法,在解题中总结套路,在套路中提高能力,最后形成一套灵活应试的战略战术,以不变应万变,从而实现学习效果的加倍提高和考分的快速突破。本书最大特色是对大纲给出的考点进行了科学分类和精讲,在讲解时将题目涉及的知识点、考点和方法技巧有机联系,思路明晰,重点突出,凸显了命题轨迹和应试精髓。本书适合准备参加经济类专业学位联考的考生和辅导教师参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

2018 经济类联考综合能力数学高分指南 / 陈剑主编

—北京:高等教育出版社,2017.3

ISBN 978-7-04-047496-1

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 036776 号

2018 经济类联考综合能力数学高分指南

2018JINGJILEI LIANKAO ZONGHE NENGLI SHUXUE GAOFEN ZHINAN

策划编辑 李晓翠

责任编辑 张耀明

封面设计 杨立新

版式设计 童丹

责任校对 胡美萍

责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100120

印 刷 山东鸿君杰文化发展有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 20.75

字 数 500 千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>

<http://www.hepmall.com>

<http://www.hepmall.cn>

版 次 2017 年 3 月第 1 版

印 次 2017 年 3 月第 1 次印刷

定 价 46.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 47496-00

前言

经济类专业学位联考是为了招收金融硕士(MF)、应用统计硕士(MAS)、税务硕士(MT)、国际商务硕士(MIB)、保险硕士(MI)及资产评估硕士(MV)等而设置的具有选拔性质的入学考试。其中综合能力(总分150分)卷由三部分组成,数学基础(70分)、逻辑推理(40分)、写作(40分),可见数学在综合能力试卷中最为重要!本书针对经济类专业学位联考综合能力的数学部分,依据经济类专业学位联考综合能力《考试大纲》,结合历年考情以及考试的最新资讯编写而成,力求最大限度地帮助考生提高复习效率。本书的编写具有如下特点:

1. 重系统,建体系——依据内在联系,搭建知识体系

相比其他学科,数学更强调知识点之间的内在联系及综合性。因此,经济类专业学位联考综合能力数学部分的考题越来越强调灵活性与综合性,这就要求考生不但要掌握每个考点,更要从整体上把握它们之间的联系。而这些正是大部分考生在复习过程中所欠缺的,忽略这一体系是很多考生无法进一步提高分数的根本原因。

鉴于此,本书在每一章的开始都加上了“本章概述”,方便考生明确每章的复习重点,节约复习时间。同时,在每章的各个模块中呈现了“知识体系图”,让考生能够对本模块的知识一目了然,有效地帮助考生把握考点之间的联系,从而建立完整的知识体系。

2. 重模块,补短板——模块复习更高效,易于提升数学短板

针对《考试大纲》对考试范围和能力要求的规定,本书将各章的重要考点划分为多个模块,以便于考生更加清晰地认识考试的具体要求,在复习时做到有的放矢。

每个模块分为“考点剖析”“核心题型”“点睛归纳”和“阶梯训练”四部分,“考点剖析”讲解本模块主要的考点和常用公式定理,既细致深入,又突出重点。具体内容包括:精确地阐释基本的概念,对个别核心概念还会通过注释加深考生的理解;对常见性质和主要的公式定理进行系统的总结和归纳,方便考生理解和记忆。这些内容是对本模块常考题型解题方法的概括和总结。“核心题型”和“点睛归纳”则对本章常考题型进行了划分,并通过例题讲解归纳解题方法与技巧。这两部分具有某种程度上的对应性,因此建议考生将其结合起来学习。先通过这两部分了解大致的解题思路和方法,再通过“阶梯训练”逐步实践应用并加以巩固。

3. 重归纳,强方法——宁缺毋滥,精选优质题目

本书不提倡题海战,做题的目的是为了提高成绩,而很多考生盲目做题,浪费时间精力,并且成绩没有提高。所以本书的习题都是精心挑选的,并且特别强调习题解答和一题多解。要想学好数学,练习是必不可少的,而练习的质与量是两个关键的指标:不足量则不足以引起质变,不能熟练掌握解题方法;而低质量的例题和习题不仅浪费时间,更有可能打乱考生的复习思路,将考生的复习引上“歧途”。因此,本书在编写时,首先保证了例题和习题的质量,严格依据《考试大纲》和最新考情精选适合经济类专业学位联考的经典题目,力求让考生举一反三,最大程度地提高复习效率。

此外,真题呈现了考试复习的方向,对考试有很重要的导向作用,本书附上历年真题,以让广大考生找到身临其境的感觉,在有限的时间抓住重点,有的放矢,查漏补缺。同时,本书附上数学核心公式,帮助考生归纳整理考试所用到的公式。

在编写本书时,编者参阅了有关书籍,引用了一些例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢。由于编者水平有限,兼之时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请读者批评指正。欢迎大家通过作者博客(<http://www.chenjian.cc>)、微博(<http://weibo.com/myofficer>)、邮箱(myofficer@sina.com)等网络平台获取本书最新信息、互动学习经验、答疑解惑,最大程度利用好本书。

编 者

2017年1月

目 录

经济类联考数学应试指导	1
-------------------	---

第一部分 微 积 分

第一章 函数、极限、连续	4
第一节 考点剖析	5
第二节 核心题型	14
第三节 点睛归纳	22
第四节 阶梯训练	25
第二章 一元函数微分学	38
第一节 考点剖析	39
第二节 核心题型	43
第三节 点睛归纳	50
第四节 阶梯训练	55
第三章 一元函数积分学	67
第一节 考点剖析	68
第二节 核心题型	74
第三节 点睛归纳	80
第四节 阶梯训练	88
第四章 多元函数微分学	104
第一节 考点剖析	104
第二节 核心题型	108
第三节 点睛归纳	114
第四节 阶梯训练	117

第二部分 线 性 代 数

第五章 行列式	130
第一节 考点剖析	130
第二节 核心题型	134
第三节 点睛归纳	137
第四节 阶梯训练	140
第六章 矩阵	146
第一节 考点剖析	147
第二节 核心题型	151

第三节	点睛归纳	156
第四节	阶梯训练	158
第七章	向量组	170
第一节	考点剖析	171
第二节	核心题型	173
第三节	点睛归纳	177
第四节	阶梯训练	179
第八章	方程组	191
第一节	考点剖析	192
第二节	核心题型	195
第三节	点睛归纳	200
第四节	阶梯训练	201

第三部分 概 率 论

第九章	随机事件及概率	212
第一节	考点剖析	213
第二节	核心题型	217
第三节	点睛归纳	222
第四节	阶梯训练	225
第十章	随机变量及其分布	231
第一节	考点剖析	232
第二节	核心题型	236
第三节	点睛归纳	245
第四节	阶梯训练	248
第十一章	随机变量的数字特征	260
第一节	考点剖析	260
第二节	核心题型	262
第三节	点睛归纳	267
第四节	阶梯训练	268

附 录 二

附录一	数学必备公式	280
附录二	2012—2017 年经济类联考综合能力(数学)真题与解析	293
	2012 年经济类联考综合能力(数学)真题	293
	2012 年经济类联考综合能力(数学)真题解析	294
	2013 年经济类联考综合能力(数学)真题	299
	2013 年经济类联考综合能力(数学)真题解析	300
	2014 年经济类联考综合能力(数学)真题	304
	2014 年经济类联考综合能力(数学)真题解析	305

2015 年经济类联考综合能力(数学)真题	308
2015 年经济类联考综合能力(数学)真题解析	309
2016 年经济类联考综合能力(数学)真题	312
2016 年经济类联考综合能力(数学)真题解析	314
2017 年经济类联考综合能力(数学)真题	315
2017 年经济类联考综合能力(数学)真题解析	317

一、选择题 10 题,每题 2 分,共 20 分;填空题 10 题,每题 4 分,共 40 分

科目	试题数量	总分	备注
数学	10(20 分)	10(20 分)	选择题 10 题
逻辑推理	2(4 分)	2(4 分)	选择题 2 题
阅读理解	2(4 分)	2(4 分)	选择题 2 题
合计	14(28 分)	14(28 分)	选择题

二、考试大纲

1. 微积分部分

一元函数的微分、积分;多元函数的微分;微分中值定理;函数的单调性与极值。

2. 线性代数部分

线性方程组;向量的线性相关和线性无关;行列式的计算。

3. 概率论部分

概率和条件概率;独立事件;期望值和方差。

3. 试题特点及备考要求

1. 总体难度较低,但试题难度和综合性程度有所上升。

经济类联考综合能力数学试题的难度并不大,主要考查考生对基本概念的掌握及对基本运算和基本方法的理解情况。考生在复习时,一定要牢记这一点,不要盲目追求难度,而要踏踏实实打好基础,并践行适量的训练。从历年试题的分值、比例等方面来看,试题的难度与往年相比没有明显上升,对考生的能力提出了更高要求,考生只有综合掌握各个知识点,理解它们之间的内在联系才能顺利求解。

从一道题或多道题中只有少量,试题将经过一步提高对考生综合能力的考查。此外,任何专业的命题都会有一定的前瞻性,因此不能只从难度或题量的角度,只看试题本身是否有所上升,同时,从试题来看,命题更强调对考生能力数学部分做题的准确度总体还是与往年持平。

经济类联考数学应试指导

经济类联考综合能力的数学部分共包含两种题型——选择题和解答题,满分 70 分.下面从试卷结构、考试大纲、试题特点及能力要求三方面对其进行分析.

一、试卷结构

选择题 10 题,每题 2 分,共 20 分;解答题 10 题,每题 5 分,共 50 分.

科目	选择题数量	解答题数量	合计分值
微积分	6(12 分)	6(30 分)	42 分
线性代数	2(4 分)	2(10 分)	14 分
概率论	2(4 分)	2(10 分)	14 分
合计	10(20 分)	10(50 分)	70 分

二、考试大纲

1. 微积分部分

一元函数的微分、积分;多元函数的一阶偏导数;函数的单调性和极值.

2. 线性代数部分

线性方程组;向量的线性相关和线性无关;矩阵的基本运算.

3. 概率论部分

分布和分布函数;常见分布;期望值和方差.

三、试题特点及能力要求

1. 总体难度较低,但试题的灵活性和综合性有所上升

经济类联考综合能力数学试题的难度并不大,主要考查考生对基本概念的理解及对基本运算和基本方法的掌握情况.考生在复习时一定要牢记这一点,不要盲目追求难度,而要踏踏实实打好基础,并进行足量的训练,才能拿到理想的分数.但同时要注意,试题的综合性与灵活性较往年有所上升,对考生的能力提出了更高要求,考生只有综合运用多个基本概念,理解它们之间的相互关系才能顺利求解.

这一趋势在未来考试中仍将延续,试题将会进一步提高对考生综合能力的要求.当然,任何考试的命题都会有一定的延续性,因此不会出现难度陡增的现象,只会是缓慢地逐年上升.同时,从长远来看,经济类联考综合能力数学部分试题的难度总体还是会低于全国硕士

研究生招生考试数学三的难度。

2. 考点重复率较高

从历年考试规律来看,考点重复率很高,很多题型固定,方法相同.可见,在复习过程中,考生要重视对已考真题的分析与学习。

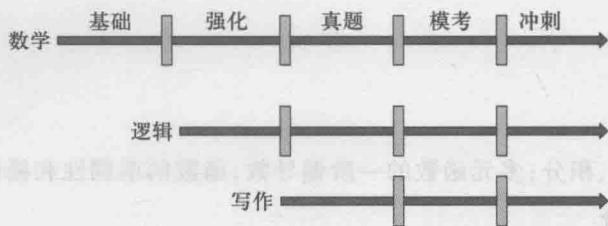
3. 重视考查的广度与考生解题的熟练度

试卷考点分布较广,考试大纲上有提及的考点均有涉及,考生应重视复习的全面性.同时,试卷对考生解题的速度有较高的要求,考生需要在约 75 分钟的时间内完成 10 道选择题和 10 道解答题,这对大部分考生的解题速度将是一个考验.这就要求考生在复习的时候一定要全面而细致,不要存在侥幸心理,扎扎实实掌握每一个知识点,多做练习以求熟能生巧,力求取得高分。

4. 与考研数学联系紧密,部分试题直接选自考研数学三试卷

由于专业的相关性,经济类联考综合能力数学部分的考试内容与考研数学三有较多的联系,所有的考点都可以在考研数学三的《考试大纲》中找到,且对每个考点具体要求的程度也都不会超过数学三中对应部分的要求.从已考试题来看,大部分试题除灵活性和综合性略低外,特点、要求与考研数学三考题类似,部分试题甚至直接选自数学三试卷。

四、复习阶段及规划



1. 基础阶段,每周一章,大致 11 周

主要看每章的第一节、第二节,做第四节的基础能力题。

2. 强化阶段,每周一章,大致 11 周

主要看每章的第三节,做第四节的综合提高题。

3. 真题阶段,每周 2 套左右的真题,大概 4 周

4. 模考阶段,每周 2 套左右的模拟题,大概 4 周

5. 冲刺阶段,巩固错题本,反复看预测题目

第一章 集合与函数概念

第一节 考点透析

集合、映射、终函 章一深

一、函数

函数是高中数学最重要的概念，也是高中数学学习的重要内容。函数是描述客观世界变化规律的重要模型，也是解决实际问题的重要工具。本章主要研究函数的概念、性质、图像、应用等问题。

第一部分 微 积 分

2. 函数的定义域

【学习目标】



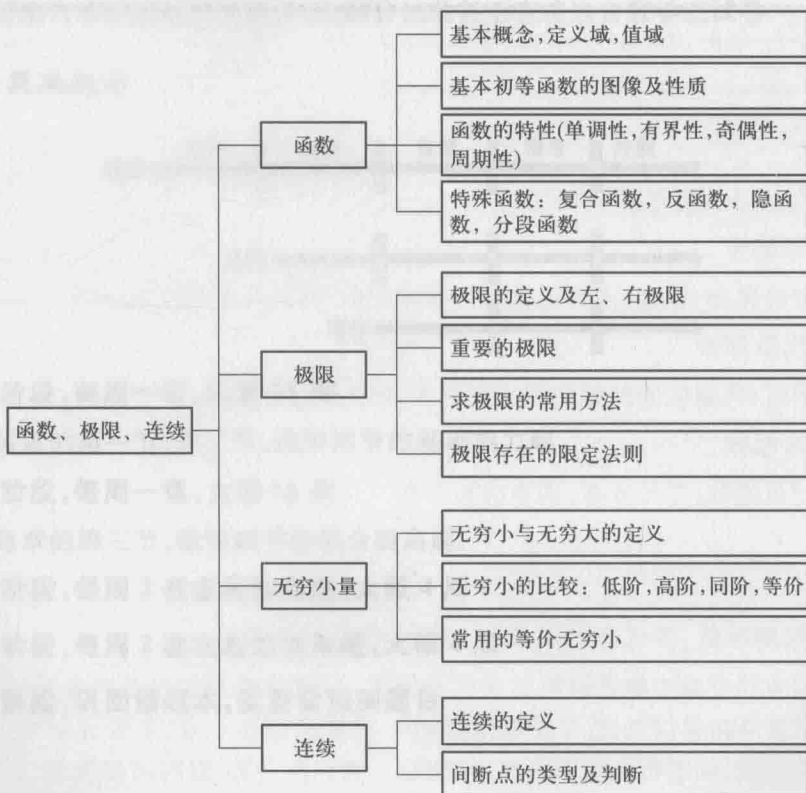
在求函数定义域时，要注意函数的实际意义。例如，对于实际问题中的函数，其定义域往往受到实际条件的限制。在求函数的值域和最值时，要注意函数的单调性和极值点的存在性。在求函数的单调性时，要注意函数的导数的正负性。

第一章 函数、极限、连续

【大纲解读】本部分虽然在考试大纲上没有直接写出来,但函数是微积分的研究对象,极限是微积分的理论基础,而连续性是可导性与可积性的重要条件,所以本部分仍然要加以复习.

【命题剖析】极限是本章的核心,也是考试的重点内容,所以要掌握求解极限的常见方法,熟练掌握极限的运算法则、极限存在的两个准则与两个重要极限.其次,要掌握分段函数连续的判断方法,理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数、隐函数及函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性的概念,掌握基本初等函数的性质及图形,了解初等函数的概念.

【知识体系】



【备考建议】本章是学习的基础,函数是微积分的研究对象,因此在课程的开始要先对函数部分加以复习,要求对函数的概念、表示方法、性质及基本初等函数的图形有较好的理解与掌握.极限是微积分的核心,是每年考试的必考点,建议考生复习时着重掌握求解极限的各种方法.

第一节 考点剖析

一、函数

1. 定义

设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 若对非空集合 D 中的每一点 x , 都按照某一对应规则 f , 有唯一确定的实数 y 与之相对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y=f(x), x \in D.$$

x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域, y 的取值范围即集合 $\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

【注意】定义域 D (或记 D_f) 与对应法则 f 是确定函数的两个要素, 因此两个函数相同是指它们的定义域与对应法则都相同.

2. 函数的定义域

由解析式表示的函数, 其定义域是指使该函数表达式有意义的自变量取值的全体, 这种定义域称为自然定义域. 自然定义域通常不写出, 需要我们去求出, 因此必须掌握一些常用函数表达式有意义的条件.

(1) 函数的定义域是自变量 x 的取值范围, 它是函数的重要组成部分. 如果两个函数的定义域不同, 不论对应法则相同与否, 都是不同的函数. 如 $y=x^2(x \in \mathbf{R})$ 与 $y=x^2(x > 0)$ 是不同的两个函数.

(2) 对应法则是函数的核心. 一般地, 在函数 $y=f(x)$ 中, f 代表对应法则, x 在 f 的作用下可得到 y , 因此, f 是使对应得以实现的方法和途径, 是联系 x 与 y 的纽带, 从而是函数的核心. f 有时可用解析式表示, 有时只能用数表或图像表示.

(3) 当 $x=a$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的值 $f(a)$ 叫做 $x=a$ 时的函数值, 函数值的全体称为函数的值域. 一般地, 函数的定义域与对应法则确定后, 函数的值域也就随之确定了.

3. 基本初等函数

(1) 常数函数

$y=C$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图形为平行于 x 轴的直线. 在 y 轴上的截距为 C .

(2) 幂函数

$y=x^\alpha$, 其定义域随着 α 的不同而变化. 但不论 α 取何值, 总在 $(1, +\infty)$ 内有定义, 且图形过点 $(1, 1)$. 当 $\alpha > 0$ 时, 函数图形过原点.

(3) 指数函数

$y=a^x(a > 0, a \neq 1)$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $0 < a < 1$ 时, 函数严格单调递减; 当 $a > 1$ 时, 函数严格单调递增. 函数图形恒过点 $(0, 1)$. 微积分中经常用到以 e 为底的指数函数, 即 $y=e^x$. 指数函数 $y=a^x$ 的性质归纳如下表:

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图形		
性质	定义域: \mathbf{R}	
	值域: $(0, +\infty)$, 图像在 x 轴上方	
	过点 $(0, 1)$, 即 $x = 0$ 时, $y = 1$	
	当 $a > 1$ 时, $\begin{cases} \text{若 } x > 0, \text{ 则 } a^x > 1, \\ \text{若 } x < 0, \text{ 则 } 0 < a^x < 1 \end{cases}$	当 $0 < a < 1$ 时, $\begin{cases} \text{若 } x < 0, \text{ 则 } a^x > 1, \\ \text{若 } x > 0, \text{ 则 } 0 < a^x < 1 \end{cases}$
	在 \mathbf{R} 上是增函数	在 \mathbf{R} 上是减函数

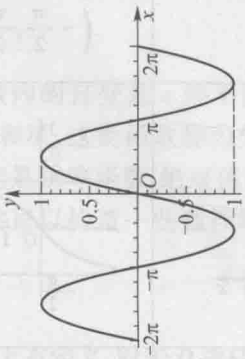
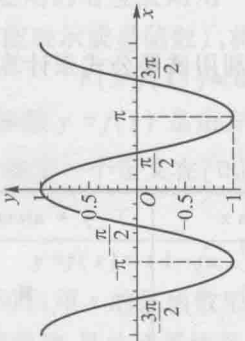
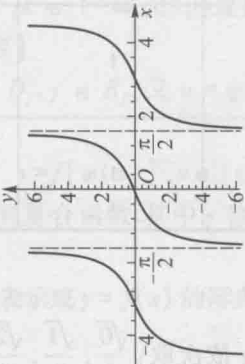
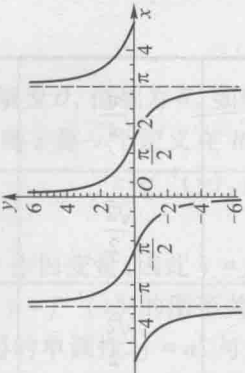
(4) 对数函数

$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), 其定义域为 $(0, +\infty)$, 它与 $y = a^x$ 互为反函数. 微积分中常用到以 e 为底的对数, 记作 $y = \ln x$, 称为自然对数. 对数函数的图形过点 $(1, 0)$. 指数函数和对数函数的性质对比见下表.

名称	指数函数	对数函数
解析式	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
函数值 变化 情况	当 $a > 1$ 时, $a^x \begin{cases} < 1 (x < 0), \\ = 1 (x = 0), \\ > 1 (x > 0) \end{cases}$	当 $a > 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} > 0 (x > 1), \\ = 0 (x = 1), \\ < 0 (0 < x < 1) \end{cases}$
	当 $0 < a < 1$ 时, $a^x \begin{cases} < 1 (x > 0), \\ = 1 (x = 0), \\ > 1 (x < 0) \end{cases}$	当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} < 0 (x > 1), \\ = 0 (x = 1), \\ > 0 (0 < x < 1) \end{cases}$
单调性	当 $a > 1$ 时, a^x 是增函数	当 $a > 1$ 时, $\log_a x$ 是增函数
	当 $0 < a < 1$ 时, a^x 是减函数	当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是减函数
图像	$y = a^x$ 的图像与 $y = \log_a x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称	

(5) 三角函数

常用的三角函数列表比较如下:

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
定义域	\mathbf{R}	\mathbf{R}	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)	$x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbf{R}	\mathbf{R}
图像				
周期性	2π	2π	π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调性	增区间： $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ 减区间： $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right]$	增区间： $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 减区间： $[2k\pi, (2k+1)\pi]$	$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ 内是增函数	$(k\pi, (k+1)\pi)$ 内是减函数

特殊角的三角函数值如下表:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot \alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

【注意】① 本表可以按如下规律记忆:

α 依次取: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin \alpha$ 依次取: $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$.

对于 $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ 类似.

② 对于 α 不是锐角的三角函数, 可以利用诱导公式来计算相应的特殊三角函数值.

(6) 反三角函数

列表比较常用反三角函数:

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \arctan x$	$y = \operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbf{R}	\mathbf{R}
值域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
图像				
奇偶性	奇函数	非奇非偶函数	奇函数	非奇非偶函数
单调性	在定义域内是增函数	在定义域内是减函数	在定义域内是增函数	在定义域内是减函数

4. 特殊函数

(1) 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R , 如果对于每一个 $y \in R$, 都有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应, 且满足 $y = f(x)$, 则 x 是一个定义在 R 以 y 为自变量的函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), y \in R.$$

并称其为 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上用 x 作自变量, y 作因变量, 因此 $y = f(x)$ 的反函数常记为 $y = f^{-1}(x), x \in R$.

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称. 严格单调函数必有反函数, 且函数与其反函数有相同的单调性. $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数; $y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 的反函数为 $y = \sqrt{x}$, 而 $y = x^2, x \in (-\infty, 0)$ 的反函数为 $y = -\sqrt{x}$.

(2) 复合函数【重点内容】

已知函数 $y = f(u), u \in D_f, y \in R_f$. 又 $u = \varphi(x), x \in D_\varphi, u \in R_\varphi$, 若 $D_f \cap R_\varphi$ 非空, 则称函数

$$y = f[\varphi(x)], x \in \{x \mid \varphi(x) \in D_f\}$$

为函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数. 其中 y 称为因变量, x 称为自变量, u 称为中间变量.

(3) 隐函数

若函数的因变量 y 明显地表示成 $y = f(x)$ 的形式, 则称其为显函数. 如 $y = x^2, y = \ln(3x^2 - 1), y = \sqrt{x^2 - 1}$ 等.

设自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则用一个方程式 $F(x, y) = 0$ 表示, 如果存在函数 $y = f(x)$ (不论这个函数是否能表示成显函数), 将其代入所设方程, 使方程变为恒等式:

$$F(x, f(x)) = 0, x \in D_f,$$

其中 D_f 为非空实数集, 则称函数 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的一个隐函数.

如方程 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 可以确定一个定义在 $[0, 1]$ 上的隐函数. 此隐函数也可以表示成显函数的形式, 即

$$y = f(x) = (1 - \sqrt{x})^2, x \in [0, 1].$$

但并不是所有隐函数都可以用 x 的显函数形式来表示, 如 $e^{xy} + x + y = 0$, 因为 y 无法用初等函数表达, 故它不是初等函数. 另外还需注意, 并不是任何一个方程都能确定隐函数, 如 $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

(4) 分段函数

有些函数, 对于其定义域内的自变量 x 的不同值, 不能用一个统一的解析式表示, 而是要用两个或两个以上的式子表示, 这类函数称为分段函数.

【评注】分段函数不一定是初等函数. 绝对值函数 $y = |x|$ 很特殊, 它既是初等函数, 又可以写成分段函数的形式, 常常可以构造一些选择题.

5. 函数的性质

(1) 单调性

设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义, 对于 D 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 若总有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 D 内单调递增 (或单增); 若总有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 D 内严格单增, 严格单增也是单增. 当 $f(x)$ 在 D 内单调递增时, 又称 $f(x)$ 是 D 内的单调递增函