非线性微分方程的有限元方法研究

曹京平 著

FEIXIANXING WEIFEN FANGCHENG DE YOUXIANYUAN FANGFA YANJIU

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

非线性微分方程的有限元方法研究

曹京平 著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书介绍了一些非线性微分方程的几种有限元方法，包括 Sobolev 空间和微分方程的简介及非线性微分方程标准和非标准有限元方法、H^1-Galerkin 混合有限元方法和降基有限元方法. 对不同方程给出了相应的数值格式和理论分析. 本书既保留了那些行之有效的传统方法和经典理论结果，更注重于利用近十几年来新兴起的新方法和传统方法的新发展来研究非线性问题.

本书可供计算数学、应用数学、力学等专业的大学高年级本科生、研究生、教师及从事计算机应用和工程计算与研究的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性微分方程的有限元方法研究 / 曹京平著. -- 北京：北京邮电大学出版社，2016.3

ISBN 978－7－5635－4687－9

Ⅰ.①非… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①非线性方程—微分方程—有限元法—研究 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 032661 号

书　　名	非线性微分方程的有限元方法研究
著　　者	曹京平
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京厚诚则铭印刷科技有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	9
字　　数	165 千字
版　　次	2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5635－4687－9　　定　价：20.00 元

前　　言

微分方程是数学学科中的一个极其重要的领域，它是将数学与自然科学连接在一起的关键性纽带，也是基础数学发展的基本源泉之一. 它所涉及的范围既涵盖了物理、力学、流体动力学等自然科学领域，也涵盖了机械、船舶、巨型建筑、经济、金融等应用领域. 但由于物质运动的复杂性，对它的描述往往归结为非线性微分方程或方程组的形式. 非线性问题比线性问题要复杂很多，也困难很多. 求解这类问题，大多数情形是不能得到解析解，因此必须采用数值方法求其近似解，而有限元方法是求解这类重要问题的一个强有力的工具.

有限元方法也称为有限单元法，它是在变分方法基础上，以分片插值多项式为工具，结合计算机的发展而迅速发展起来的一种求解微分方程的数值方法. 其基本思想的提出，可以追溯到 Courant 等人在 1943 年的工作. 有限元方法的第一个成功尝试是 Turner 和 Clough 等人于 1956 年在分析飞机结构时进行的. 到了 20 世纪 60 年代，随着计算机的迅速发展，有限元方法已在众多领域取得了巨大的成功，它是求解微分方程的最有效的数值方法之一. 我国的冯康先生(1920—1993)于 20 世纪 60 年代独立于美国和欧洲之外创立并发展了有限元方法. 从此，有限元方法得到了广泛的关注，并形成了多种数值格式，其中混合有限元方法受到了计算数学界的推崇.

混合有限元方法的一般理论是由 Babuška 和 Brezzi 于 20 世纪 70 年代初创立的，是一种基于限制或者约束条件的变分形式(或 Lagrange 乘子形式)的有限元方法，该方法是通过引入未知函数或未知函数的导数作为中间变量(一般它们也具有实际的物理意义)来求解. 利用混合有限元方法可以将高阶微分方程降阶，化为低阶方程，从而也就能够降低有限元空间的光滑性要求，并降低了数值求解的难度. 例如，RLW，KDV，Burgers，KDV-Burgers 方程与双调和方程等，通过降阶使有限元插值空间简化，同时可以求到一些有意义的中间变量，方法也因而方便和容易实现. 混合元方法的研究工作较多，E. J. Park 研究

椭圆问题，C. Johnson，V. Thomee 研究抛物问题，L. C. Cowsar，T. F. Dupout 中研究了波动方程，Javier de Frutos，Bosco García-Archilla，Julia Novo 讨论了 Navier-Stokes 方程，Amel Sboui，Jérôme Jaffré，Jean Roberts 研究了复合混合元方法，罗振东等也在混合元方面做了很多工作. 20 世纪 80 年代初，Falk 和 Osborn 提出了一种改进的方法，扩展了混合有限元方法的适应性.

非标准混合有限元方法是在标准的混合有限元方法基础之上发展起来的，和标准的混合有限元方法相比，它能更好地适应复杂和高阶问题，从而得到了迅速地发展，涌现了大量的非标准混合元方法离散格式，并被广泛地应用于固体力学、流体力学、天气预报等诸多领域，成为科学和工程计算的热门课题.

进入 20 世纪后期，Pani 于 1998 年提出了 H^1-Galerkin 混合有限元方法，并将此方法成功应用到了抛物型积分-微分方程，该方法收到了广泛关注. 相对传统的混合元方法而言，该方法的逼近有限元空间 V_h 和 W_h 可以是不同次数的多项式空间，降低了对有限元逼近空间选取的限制，并且不需验证 LBB 相容性条件；尽管对解的正则性要求高一些，但是对流量的 L_2-模估计可以得到较好的收敛阶，并且在解的 L_2-模和 H^1-模等误差估计中，对有限元的网格不需要拟一致性条件的要求（$p=\infty$除外）.

降基方法（Reduced-basis method）是最近几年发展起来的一种优化降维方法，它通过输入不同的参数给出实际的输出值，利用加权余量模进行研究，在设计参数时，可以实时得到计算结果，进行误差估计. 该方法的计算过程分为离线和联线两个阶段：在离线阶段，将与参数无关的量从高维空间映射到低维空间；在联线阶段，运用低维空间的量计算结果. 该方法具有节省内存空间、计算量小、快速有效等优点，将其与有限元方法结合，通过选取有效样本空间来重新构造近似解空间，从而代替有限元空间，把对偏微分方程有限元解的研究转化为对其基于参数的近似解的研究，既降低了自由度和格式的维数，也降低了内存容量和时间消耗. 本书先介绍一些预备知识，然后再介绍有限元和非标准混合有限元的理论及应用.

本书共分为 6 章，第 1 章主要介绍有限元方法的一些基本理论；第 2 章主要介绍四阶非线性奇异椭圆方程的有限元方法，主要讨论解的存在唯一性和几种不同情况下的误差估计；第 3 章介绍四阶非线性奇异抛物方程的有限元方法，给出了解的存在唯一性证明、误差估计和后验误差估计；第 4 章主要介绍几种非线性微分方程的 H^1-Galerkin 混合有限元方法，主要讨论非线性

Sobolev方程、非线性双曲型积分-微分方程和广义神经传播方程的存在唯一性证明及半离散和全离散误差估计；第5章给出非线性椭圆、抛物方程及对流扩散方程的降基有限元方法，给出后验误差估计和最优控制分析；第6章主要介绍线性椭圆方程和抛物方程的非标准 Galerkin 有限元方法. 本书通过一些较典型的例子来说明非线性微分方程的几种非标准有限元方法的应用前景，主要包括作者的一些研究结果和参与研究的结果，其中第3章是李琳琳副教授与作者合作完成的.

关于微分方程和有限元方法理论的文献浩瀚如海，由于有限元及非标准混合有限元的理论及其应用在飞速发展，本书研究的内容只是沧海一粟. 衷心希望本书能给读者学习和研究有限元方法提供一些帮助和启示.

本书得到了内蒙古财经大学统计与数学学院领导和老师们的大力支持和帮助，感谢统计与数学学院副院长王春枝副教授的鼓励和帮助，感谢李琳琳副教授的大力支持和帮助，也感谢邵颖丽教授的鼓励和帮助！

本书的出版得到了北京邮电大学出版社的大力支持，在此表示衷心感谢！

由于作者水平有限，书中难免会有错误和不妥之处，恳请读者不吝指正.

作　者

2015 年 11 月

目　录

第1章 预备知识

有限元方法以偏微分方程的变分形式(求能量泛函的极值)为基础,它是 Ritz-Galerkin 方法与分块多项式差值相结合的产物. 在 Ritz 法和 Galerkin 法中,需要取有限维空间为有限元空间来进行有限元方法的研究. 为了分析微分方程的广义解和有限元解,本章 1.1 节先介绍微分方程和偏微分方程的一些基本理论和概念;1.2 节介绍有限元的数学理论;1.3 节介绍 Sobolev 空间的性质;1.4 节介绍加权 Sobolev 空间的定义和性质.

1.1 微分方程基本概念和基本理论

一、微分方程的概念及分类

首先引进一些符号.

设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间,Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界连通区域,$\partial\Omega$ 为其边界,$\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$. 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中向量,$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

设 $u(\boldsymbol{x})=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 元函数.

引进符号 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,$\alpha$ 称为多重指标,其中 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为非负整数. 记

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\quad \boldsymbol{x}^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

偏导数算子: $D_i=\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$;

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

梯度算子:$D=(\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n)$, $Du=(\partial_1u,\partial_2u,\cdots,\partial_nu)$表示 u 的梯度,Du

也常记为 $\mathbf{grad}\, u$ 或 ∇u.

散度算子:设 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)$ 是定义在 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上到 $\mathbf{R}^n$ 的连续可微函数,则 $\boldsymbol{u}$ 的散度定义为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Laplace 算子:$\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Laplace 算子与梯度及散度之间的关系为

$$\Delta u=\operatorname{div}\nabla u=\operatorname{div}\mathbf{grad}\, u=\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2 u.$$

定义 1.1.1 含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(偏导数)或微分的方程就称为微分方程.未知函数是一元函数的,称为常微分方程;未知函数是多元未知函数的,称为偏微分方程.

微分方程中所含未知函数的导数(偏导数)或微分的最高阶数,称为微分方程的阶.

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0,\tag{1.1.1}$$

其中 y 是关于 x 的一元未知函数,$F\left(x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)$ 是关于 $x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的已知函数,且一定含有 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

若方程(1.1.1)的左端为 $y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的一次有理整式,则称方程(1.1.1)为 n 阶线性常微分方程,一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x),\tag{1.1.2}$$

这里 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 是关于 x 的已知函数.

不是线性方程的常微分方程称为非线性常微分方程,例如,方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\sin y=2x,$$

这是一个二阶非线性常微分方程.

设 $u(\boldsymbol{x})=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 元函数,则一个 m 阶偏微分方程的一般形式为

$$F(\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^m u)=0, \tag{1.1.3}$$

其中 F 是关于 $\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^m u$ 的已知函数.

按偏微分方程的历史发展过程,偏微分方程分为线性、半线性、拟线性和完全非线性 4 类[18]:

(1) 线性偏微分方程,即未知函数及其各阶偏导数的最高次数是一次的.一般形式为

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x),$$

其中 $a_\alpha(\boldsymbol{x})(|\alpha|\leqslant m)$ 和 $f(\boldsymbol{x})$ 是 Ω 上的已知实函数.例如,波动方程

$$u_{tt}-a^2\Delta u=0 \quad (a>0).$$

(2) 半线性偏微分方程.一般形式为

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\boldsymbol{x})D^\alpha u + b(\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^{m-1}u)=0,$$

其中 $a_\alpha(\boldsymbol{x})(|\alpha|=m)$ 和 b 是 Ω 上的已知函数,至少有一个 $a_\alpha(\boldsymbol{x})$ 不恒等于零,而 $b(\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^{m-1}u)$ 关于 $u,Du,\cdots,D^{m-1}u$ 不是线性的.例如,反应扩散方程

$$u_t = au_{xx}+bu_{yy}+u(1-u)=0 \quad (a>0,b>0).$$

(3) 拟线性偏微分方程.一般形式为

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^{m-1}u)D^\alpha u + b(\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^{m-1}u)=0,$$

其中 a_α 和 b 是 Ω 上的已知函数,至少有一个 $a_\alpha(\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^{m-1}u)$ 含有 u, $Du,\cdots,D^{m-1}u$ 中的项.例如,方程

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+u(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0.$$

(4) 完全非线性偏微分方程:不能够写成上述 3 种情形之一的偏微分方程.例如,Hamilton-Jacobi 方程

$$u_t+H(Du)=0,$$

这里 $H(Du)$ 是 Du 的非线性函数.

二、散度公式

下面给出散度公式.

定理 1.1.1(散度定理)　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个具有分片光滑边界的有界区域,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x))\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$$

是 $\bar{\Omega}$ 上的向量场，则散度公式为

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$是$\partial\Omega$ 上的单位外法向量场，$\mathrm{d}\sigma$ 是$\partial\Omega$ 的面积元.

1.2 广义导数和 Sobolev 空间

对于定义在 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数 $u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，记 $\operatorname{supp} u = \overline{\{\boldsymbol{x} \mid u(\boldsymbol{x}) \neq 0, \boldsymbol{x} \in \Omega\}}$，称 $\operatorname{supp} u$ 为 $u(\boldsymbol{x})$的支集. 若 $\operatorname{supp} u \subset \Omega$，则称 $u(\boldsymbol{x})$在 Ω 中具有紧致支集. 用 $C(\Omega)$表示Ω 内的全体连续实函数组成的集合，$C^m(\Omega)$表示Ω 内所有具有 m 次连续偏导数的函数构成的集合，其中 m 表示非负整数；$C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$，特别地，$C^0(\Omega) = C(\Omega)$. 记

$$C_0^m(\Omega) = \{u(\boldsymbol{x}) \mid u(\boldsymbol{x}) \in C^m(\Omega), \operatorname{supp} u \subset \Omega\},$$

即对任意的 $u(\boldsymbol{x}) \in C_0^m(\Omega)$在 Ω 内具有 m 次连续偏导数，且在其边界$\partial\Omega$ 上有 $D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 (0 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1)$. $C_0^\infty(\Omega)$表示全体在 Ω 内具有无穷次连续偏导数，且在其边界$\partial\Omega$ 上有 $D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0 (0 \leqslant |\alpha| \leqslant \infty)$的函数. 称 $L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$为 Ω 内局部可积的函数空间，表示在 Ω 内的任一闭集上都可积的函数集合.

定义 1.2.1 对于函数 $u \in L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$，若存在函数 $f \in L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$，使得

$$\int_{\Omega} f v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha v \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 f 是 u 的$|\alpha|$阶广义导数，记为 $f = D^\alpha u$.

显然，广义导数是古典导数的推广，若函数 $u(\boldsymbol{x})$具有广义导数，则该导数一定唯一[19].

事实上，设函数 $u(\boldsymbol{x})$具有两个广义导数 f_1 和 f_2，则由定义 1.2.1，有

$$\int_{\Omega} f_1 v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} f_2 v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha v \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

从而有

$$\int_{\Omega} (f_1 - f_2) v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

由于 $C_0^\infty(\Omega)$在 $L^2(\Omega)$中稠密，故有

$$f_1 - f_2 = 0, \text{即 } f_1 = f_2, \quad \text{a. e. } \Omega(\text{即在 } \Omega \text{ 内几乎处处成立}).$$

若 $u(\boldsymbol{x})\in C^{|\alpha|}(\Omega)$，则 $u(\boldsymbol{x})$ 的广义导数与经典导数一致.

记 $L^p(\Omega)=\left\{u(\boldsymbol{x})\,\middle|\,\left(\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$，其范数定义为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

下面定义 Sobolev 空间及其范数.

定义 1.2.2 设 k 为正整数，$1\leqslant p\leqslant\infty$ 为实数，定义 Sobolev 空间为

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u(\boldsymbol{x})\mid D^\alpha u\in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha|\leqslant k\},$$

对 $u(\boldsymbol{x})\in W^{k,p}(\Omega)$，定义 $W^{k,p}(\Omega)$ 上的范数和半范数如下：

(1) 当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$W^{k,p}(\Omega)$ 的范数为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{k,p,\Omega}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |D^\alpha u(\boldsymbol{x})|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}};$$

(2) 当 $p=\infty$ 时，$W^{k,\infty}(\Omega)$ 的范数为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{k,\infty,\Omega}=\sup_{|\alpha|\leqslant k}\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha u(\boldsymbol{x})|\};$$

(3) 当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$W^{k,p}(\Omega)$ 的半范数为

$$|\boldsymbol{u}|_{k,p,\Omega}=\left(\sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega |D^\alpha u(\boldsymbol{x})|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}};$$

(4) 当 $p=\infty$ 时，$W^{k,\infty}(\Omega)$ 的半范数分别为

$$|\boldsymbol{u}|_{k,\infty,\Omega}=\sup_{|\alpha|=k}\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha u(\boldsymbol{x})|\}.$$

可以证明，$W^{k,p}(\Omega)$（k 表示非负整数或 ∞）关于上面定义的模是一个 Banach空间[20]. 可以证明，Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 具有如下关系：

$$C^\infty(\Omega)\subset\cdots\subset W^{k+1,p}(\Omega)\subset W^{k,p}(\Omega)\subset\cdots\subset W^{0,p}(\Omega)\equiv L^p(\Omega).$$

当 $p=2$ 时，记 $W^{k,2}(\Omega)=H^k(\Omega)$，相应的范数和半范数记为 $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ 和 $|\cdot|_{k,\Omega}$ 或 $\|\cdot\|_k$ 和 $|\cdot|_k$，即在不引起混乱时 Ω 也可以省略. 特别地，$H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$.

在 $H^k(\Omega)$ 定义内积

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{k,\Omega}=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant k}D^\alpha u(\boldsymbol{x})\cdot D^\alpha v(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

显然 $H^k(\Omega)$ 在上面定义的内积下是一个 Hilbert 空间[21].

记 $H_0^k(\Omega)=\left\{\boldsymbol{v}\,\middle|\,\boldsymbol{v}\in H^k(\Omega);D^\alpha v\Big|_{\partial\Omega}=0,|\alpha|<k\right\}$，对偶空间 $H^{-k}(\Omega)$ 的范数定义为

$$\| f \|_{-k,\Omega} = \sup_{0 \neq v \in H_0^k(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{\| v \|_{k,\Omega}}, \quad \forall f \in H^{-k}(\Omega).$$

定义 1.2.3 线性空间 X 中的一个非空子集 M 称为 X 中的线性流形;如果 M 对 X 中定义的加法和数乘满足封闭,也可称 M 为 X 的线性子空间.

1.3 Sobolev 空间的性质

一、嵌入定理

嵌入定理研究的是 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 与其他函数空间之间的关系,它描述了 $W^{k,p}(\Omega)$ 连续映射到另一空间的途径.

首先引入嵌入定理的概念，其证明可参见文献[22,23].

定义 1.3.1 设 X,Y 为两个线性赋范空间,且 $X \subset Y$,若对 $\forall \boldsymbol{u} \in X$,由 $I\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ 定义的恒等算子连续,即存在与 $\boldsymbol{u}$ 无关的正常数 C,使得 $\| I\boldsymbol{u} \|_Y \leqslant C \| \boldsymbol{u} \|_X$,则称空间 X 嵌入(连续地)到空间 Y,记为 $X \hookrightarrow Y$.

定理 1.3.1 设区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 满足 Lipschitz 连续,且 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 若 $m > k$,则

(1) 当 $m < k + \frac{n}{p}$ 时,有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad 1 \leqslant q \leqslant \frac{np}{n - (m-k)p}; \tag{1.3.1}$$

(2) 当 $m = k + \frac{n}{p}$ 时,有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty; \tag{1.3.2}$$

(3) 当 $m > k + \frac{n}{p}$ 时,有

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \tag{1.3.3}$$

其中 n 为区域 Ω 的维数.

注 1.3.1 定理 1.3.1 包含如下几方面的内容:

(1)嵌入是恒同嵌入,即 $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,q}(\Omega)$ 或 $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$;

(2)嵌入是有界的,即 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的收敛序列,不仅属于 $W^{k,q}(\Omega)$ 或

$C^k(\bar{\Omega})$，也是 $W^{k,q}(\Omega)$ 或 $C^k(\bar{\Omega})$ 中的收敛序列；

(3) 嵌入算子是完全连续的，即 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的任一有界集，不仅在 $W^{k,q}(\Omega)$ 或 $C^k(\bar{\Omega})$ 中亦是有界集，且存在在 $W^{k,q}(\Omega)$ 或 $C^k(\bar{\Omega})$ 意义下收敛的子序列(即具有紧致性).

上述性质表明 $W^{m,p}(\Omega)$ 比 $W^{k,q}(\Omega)$ 或 $C^k(\bar{\Omega})$ 有更强的拓扑结构.

定义 1.3.2　称 $u|_{\partial\Omega}$ 是函数 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 的迹，称算子 $\mathrm{tr}: u\to u|_{\partial\Omega}$ 为迹算子.

定理 1.3.2(迹定理)　设区域 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中 C^m 型区域，Ω 的边界 $\partial\Omega$ 满足 Lipschitz连续，且 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$n>1$. 若 $mp<n$，且 $p\leqslant q\leqslant\dfrac{(n-1)p}{n-mp}$，则迹算子 tr 满足

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\partial\Omega);\tag{1.3.4}$$

若 $mp=n$，则对 $p\leqslant q<\infty$，迹算子 tr 也满足如下结果：

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\partial\Omega).\tag{1.3.5}$$

二、等价模定理

为了研究函数空间的某些性质及逼近的误差估计，需要研究等价模. 对于一个函数空间的模，若定义得比较恰当，将会给问题的研究带来方便；如果引进的模与原来所熟悉的模等价，就表示对于新的模，空间结构是不变的，它保持了原来空间的某些性质. 首先引进等价模的概念.

定义 1.3.3　称线性空间 X 上的两个模 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的，若存在正常数 α,β，使得

$$\alpha\|\boldsymbol{u}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{u}\|_2\leqslant\beta\|\boldsymbol{u}\|_1,\quad\forall\,\boldsymbol{u}\in X.$$

显然，两种模等价意味着按一种模的意义收敛，则按另一种模意义下也收敛. 可以证明，有限维空间的任意两种模都是等价的.

引理 1.3.1　设 $\boldsymbol{u}=u(\boldsymbol{x})\in W^{k,p}(\Omega)$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，若 $|\boldsymbol{u}|_{k,p,\Omega}=0$，则 $\boldsymbol{u}=u(\boldsymbol{x})$ 几乎处处等于一个次数不超过 $k-1$ 的多项式.

对于 $C^k(\Omega)$ 中的函数，若所有 k 阶导数全为零，则必为 $k-1$ 次的多项式. 引理 1.3.1 说明 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的函数与 $C^k(\bar{\Omega})$ 中的函数相仿. 因此，若由定义 1.2.2 中的所定义的半模 $|\boldsymbol{u}|_{k,p,\Omega}=0$ 时，$\boldsymbol{u}$ 不一定为零，但是必为一个 $k-1$ 次的多项式.

定理 1.3.3(等价模定理)　设 $L_1,L_2,\cdots,L_s$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ $(k\geqslant1)$ 中的有界

线性泛函，它们对于次数小于等于 $k-1$ 的非零多项式不同时取零值，则模 $\|\boldsymbol{u}\|_{k,p,\Omega}$ 与模

$$\|\boldsymbol{u}\|_{*}=\left(|\boldsymbol{u}|_{k,p,\Omega}^{p}+\sum_{i=1}^{s}|L_i(\boldsymbol{u})|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

等价.

证明　由于 $L_1,L_2,\cdots,L_s$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的有界线性泛函，显然

$$\|\boldsymbol{u}\|_{*}\leqslant\beta\|\boldsymbol{u}\|_{k,p,\Omega},$$

其中 β 为某正常数. 下面证明 $\|\boldsymbol{u}\|_{*}\geqslant\alpha\|\boldsymbol{u}\|_{k,p,\Omega}$.

用反证法. 假设不然，则对任意的自然数 n，存在序列 $\{\boldsymbol{u}_n\}_1^{\infty}$，$\boldsymbol{u}_n\in W^{k,p}(\Omega)$，使得

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_{k,p,\Omega}=1,\quad \forall n\geqslant 1,\tag{1.3.6}$$

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_{*}=\left(|\boldsymbol{u}_n|_{k,p,\Omega}^{p}+\sum_{i=1}^{s}|L_i(\boldsymbol{u}_n)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{n}.\tag{1.3.7}$$

由式(1.3.6)知，$\{\boldsymbol{u}_n\}$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的有界序列，由嵌入定理 1.3.1 有 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$，且在 $\{\boldsymbol{u}_n\}$ 中必存在子列（不妨仍记为）$\{\boldsymbol{u}_n\}$ 在 $W^{k-1,p}(\Omega)$ 中收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}_0\|_{k-1,p,\Omega}=0.\tag{1.3.8}$$

又由式(1.3.7)知

$$\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{u}_n|_{k,p,\Omega}=0.$$

易知 $\{\boldsymbol{u}_n\}$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列，又 $W^{k,p}(\Omega)$ 完备，因此 $\{\boldsymbol{u}_n\}$ 的极限为 $\boldsymbol{u}_0$，且 $\boldsymbol{u}_0$ 满足

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{k,p,\Omega}=1,$$

则 $\boldsymbol{u}_0\neq\mathbf{0}$，并且

$$|\boldsymbol{u}_0|_{k,p,\Omega}=0.$$

因此 $\boldsymbol{u}_0$ 是一个次数不超过 $k-1$ 次的多项式. 由定理的条件知

$$L_i(\boldsymbol{u}_0)=0,\quad i=1,2,\cdots,s,$$

则 $\|\boldsymbol{u}_0\|_{*}=\left(|\boldsymbol{u}_0|_{k,p,\Omega}^{p}+\sum_{i=1}^{s}|L_i(\boldsymbol{u}_0)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=0$，这与假设矛盾，故定理得证.

应用该定理，可以得到两个有用的推论：Poincare 不等式和 Friedrichs 不等式.

推论 1.3.1（Poincare 不等式）　对任意的函数 $\boldsymbol{u}(x)\in H^1(\Omega)$，都有

$$\| \boldsymbol{u} \|_1 \leqslant C\left[\left(\int_\Omega \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^2 + |\boldsymbol{u}|_1^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

其中 C 是仅依赖区域 Ω，而与 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 无关的正常数.

证明见文献[19].

推论 1.3.2(Friedrichs 不等式)　对任意的函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in H^1(\Omega)$，都有

$$\| \boldsymbol{u} \|_1 \leqslant C\left[\left(\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s\right)^2 + |\boldsymbol{u}|_1^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

其中 C 是仅依赖区域 Ω 而与 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 无关的正常数，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界.

证明见文献[19].

三、几种常用的不等式

下面介绍几个常用的不等式.

(1)**Hölder 不等式.** 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，且对 $\forall\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L_p(\Omega)$，$\forall\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in L_q(\Omega)$，则 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega)$，并有不等式

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \left(\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^q\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}} = \| \boldsymbol{u} \|_p \cdot \| \boldsymbol{v} \|_q.$$

证明见文献[20].

注 1.3.2　当 $p=2$ 时，**Hölder 不等式**就是大家熟知的 **Schwarz 不等式**，即

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \left(\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \| \boldsymbol{u} \|_2 \cdot \| \boldsymbol{v} \|_2.$$

(2)**Minkowski 不等式.** 设 $1<p<\infty$，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in L_p(\Omega)$，则

$$\| \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \|_p \leqslant \| \boldsymbol{u} \|_p + \| \boldsymbol{v} \|_p.$$

证明见文献[20].

(3)**Gronwall 不等式.** 设 $u(t)$ 在 $[0,T]$ 上连续，且满足 $u(t) \leqslant u_0 + \int_0^t \lambda(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$，其中 $\lambda(\tau) \geqslant 0$ 且 $\lambda(\tau) \in L_1(0,T)$，则有

$$u(t) = u_0 \exp\left(\int_0^t \lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

证明参见文献[25].

(4)**带 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的 Cauchy 不等式.** 对任意的正数 ε 和任意的非负实数 a,b，都有

$$a \cdot b \leqslant \frac{1}{2}\left(\varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2\right).$$