A Mathematical Approach to High School Physics

王溢然　编著

中学物理数学方法讲座

中国科学技术大学出版社

东北师范大学物理实验教学中心系列教材
吉林省精品课主讲教材

基础物理实验

Physics Laboratory Experiments

东北师范大学物理实验教学中心组织编写
主编：孙迎春　贾　艳　陈艳伟　安奎生
编者：高志华　王春亮　高　旭

东北师范大学出版社　长　春

图书在版编目（CIP）数据

基础物理实验/孙迎春等主编. —长春：东北师范大学出版社，2015.3
ISBN 978 - 7 - 5681 - 0709 - 9

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ. ①04—33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 064460 号

□责任编辑：张正吉　□封面设计：张　曼
□责任校对：刘晓军　□责任印制：刘兆辉

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
电话：0431—84568096
网址：http：//www.nenup.com
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春市利源彩印有限公司
长春市净月小合台工业区（邮政编码：130117）
2015 年 3 月第 1 版　2015 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：16.25　字数：390 千

定价：38.00 元

前 言

在人类追求真理、探索未知世界的过程中，物理学展现了一系列科学的世界观和方法论，深刻影响着人类的思维方式和对物质世界的认识，也为人类文明提供了坚实的基础。在高等学校人才培养的过程中，物理学具有不可替代的作用。但是，无论是麦克斯韦的电磁理论、爱因斯坦的相对论，还是卢瑟福的原子学说、玻尔的量子理论，都无一不是源于实验，立于实验。因此可以说，物理学本质上是一门实验科学。

基础物理实验作为高校理工科的基础课程，是大学生系统地学习科学实验的基础知识、基本实验方法和测量方法与技术的入门课程，对学生科学思维方式、创新意识、科研能力、科学作风以及综合素质的培养都具有极其重要的作用，是高校基础教学中不可缺少的重要环节。面对科学技术的飞速发展，我们感受到社会对高素质创新人才的迫切需求，它也对大学物理实验教学提出了严峻的挑战。因此，本书在编写的过程中力求做到以下几点：

第一，使学生学习和掌握基本实验仪器的使用，基本实验方法和技能，在观察、测量、分析和讨论过程中，加强对物理概念、定理定律的深入理解；

第二，学习实验的物理思想，掌握通过实验探索问题的基本方法；

第三，培养学生创新思维和创新能力，注重启发、引导和对比等多方法配合的灵活方式，加强培养学生自主分析问题、解决问题的能力。

本书是一项集体创作，是对过去的实验教学的总结和提高，也是开拓未来的起点。本书特地在部分实验内容中引入了二维码，可直接链接到相应的实验视频，便于学生有针对性地随时随地学习。参加编写的人员有：孙迎春（绪论、第一章和第三章），贾艳（第一章和第四章），陈艳伟（第一章和第二章），安奎生（绪论），高志华（第二章），王春亮（第三章），高旭（第四章），全书由孙迎春组织编写并统稿。此外，感谢参加视频录制及编辑工作的戴瑞、刘俊平、邵晓强、王伟、张涔等老师，实验视频网页编辑制作工作的张文娟老师，书中实验插图绘制并做了很多其他工作的研究生谢宁和周海越同学。在此还要感谢东北师范大学物理学院领导和全体实验教学中心其他老师的大力支持，感谢东北师范大学出版社各位编辑付出的努力。

由于编写时间仓促，书中的错误和不足之处敬请读者批评指正，编写一本有特色的实验教材有赖于长期的探索研究和教学实践的考验。我们所做的尝试，希望能起到抛砖引玉的作用，真诚希望使用本书的教师、同学不吝指正，以使我们的工作得到改进。

本书是在东北师范大学物理实验教学中心组织下编写完成的。在编写过程中，物理学院的全体实验教师和实验技术人员给予了热心帮助，在此表示感谢。

编 者

2015 年 3 月

目　录

绪 论

第一节 普通物理实验课的目的

物理学是一门实验科学. 物理实验在物理学的创立和发展中占有十分重要的地位. 因此,学习物理学时,物理实验就是一门重要的必修科目.

普通物理实验属于素质教育范畴,主要任务是培养学生基本的实验技能,为今后的工作和科学研究打基础,所以普通物理实验课的目的是:(1)通过观察、测量和分析,加强对物理概念和物理规律的认识;(2)学习物理实验的基本知识、基本方法,培养基本的实验技能,以及分析问题和解决问题的能力;(3)培养严肃认真、实事求是的科学态度和工作作风.

物理实验课是在教师指导下的学习环节,但在实验过程中,学生有较大的独立性,因此,要求学生应以研究者的态度去对待实验. 要做好一个实验,除了要了解有关的实验理论外,还必须能运用恰当的实验方法,合理地选择符合实验要求的仪器,懂得怎样装配、调整及正确操作这些装置,在取得数据之后,能从中得出切合实际的结论,并能分析、判断实验结果的可靠程度和存在的问题. 通过实验,学生可以提高动手能力,激发实验创新潜能,培养科学探索精神.

第二节 测量与误差

在物理实验中,要用实验的方法研究各种物理规律,因此要定量地测量出有关物理量的大小. 所谓测量就是借助仪器用某一计量单位把待测量的大小表示出来,即待测量是该计量单位的多少倍.

测量可分为两类:一类是直接测量,它是直接用计量仪器和待测量进行比较,得到结果;另一类是间接测量,它不是直接用计量仪器把待测量测量出来的,而是根据待测量和某几个直接测量值的函数关系求出的,即通过公式计算间接得到的.

每一个物理量都是客观存在的,在一定条件下有固定的大小,即该物理量的真值. 测量的目的是想获得真值. 但是测量是依据一定的理论或方法,使用一定的仪器,在一定的环境中,由一定的人进行的. 而由于实验理论的近似性,实验仪器灵敏度和分辨能力的局限性,环境的不稳定性等因素的影响,待测量的真值是不可能得到的. 测量结果和被测量真值之间总会存在或多或少的偏差,这种偏差称为测量值的误差.

设被测量的真值为 a,测量值为 x_i,误差为 ε_i,则

$$x_i - a = \varepsilon_i \tag{0-2-1}$$

测量所得的一切数据，毫无例外都含有误差，因而没有误差的测量结果是不存在的，即一切测量都存在误差，这就是误差公理. 在误差必然存在的情况下，测量的任务是：(1)设法将误差减至最小；(2)求出在测量条件下的最佳值；(3)估计最佳值的可靠程度. 为此必须研究误差的性质、来源，以便采取适当措施，达到最好的结果.

按照对测量值影响的性质，误差可分为系统误差、偶然误差和粗大误差三类. 实验数据中，三类误差是混杂在一起出现的，但必须分别讨论其规律，以便采取相应的措施去减少误差.

1. 系统误差

在同一条件下(方法、仪器、环境和观测人不变)多次测量同一量时，符号和绝对值保持不变的误差，或按某一确定规律变化的误差，称为系统误差. 例如：游标卡尺，螺旋测微计的零点误差；天平不等臂，砝码不准，空气浮力影响等因素引入的误差；伏安法测电阻时，由于安培表内接或外接而引进的误差等都是系统误差.

系统误差按其产生的原因又可分为：

(1) 仪器误差：这是所用量具或装置不完善而产生的误差；

(2) 方法误差(理论误差)：这是由于实验方法本身或理论不完善导致的误差；

(3) 装置误差：这是由于测量装置不当而引起的误差；

(4) 环境误差：这是外界环境(如光照、温度、湿度、电磁场等)的影响而产生的误差；

(5) 人身误差：这是由于观测人的感官而引起的误差.

系统误差的出现一般都有较明确的原因，因此可采取适当措施进行系统误差补正，使之降低到可忽略的程度. 但是又没有一定的规律可循，怎样找到产生系统误差的原因，因此，在实验过程中逐渐积累经验，提高实验素养是很重要的.

2. 偶然误差(随机误差)

在同一条件下多次测量同一量时，在消除系统误差之后，测量值总是有稍许差异而且变化不定，这部分绝对值和符号不定的误差称为偶然误差.

产生偶然误差的原因很多，比如观测时目的物对得不准，平衡点确定得不准，读数不准确，实验仪器由于环境温度、湿度、电源电压的起伏而引起的微小变化，振动的影响等. 这些因素的影响一般是微小的，并且是混杂出现的，因此难以确定某个因素产生的具体影响的大小，所以对待偶然误差不能像对待系统误差那样，找出原因加以补正.

偶然误差并非毫无规律，它的规律性是在大量观测数据中才显现出来的统计规律：

(1) 绝对值相等的正和负的误差出现的机会相同；

(2) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多；

(3) 误差不超出一定的范围.

减小偶然误差的办法是增加测量次数，求其算术平均值. 算术平均值的误差随着测量次数的增加而减小，但测量次数也不是越多越好，因为增加次数必定要延长测量时间，这将给保持稳定的测量条件增加困难，而时间延长也会给观测者带来疲劳，可能会引进较大的观测误差. 而增加测量次数只能减小偶然误差，不会减小系统误差的影响. 物理实验中测量次数一般取 4～10 次.

3.粗大误差(过失误差)

对测量结果影响特别大,不能给出客观解释的那些突出的误差,可能是粗大误差. 粗大误差实质上是一种错误,它可能由于缺乏经验、粗心大意、疲劳等原因引起的.

粗大误差将会明显地歪曲测量结果,应当努力将其删除,但删除时要慎重,不能随心所欲,随意删除,必须有规律可循.

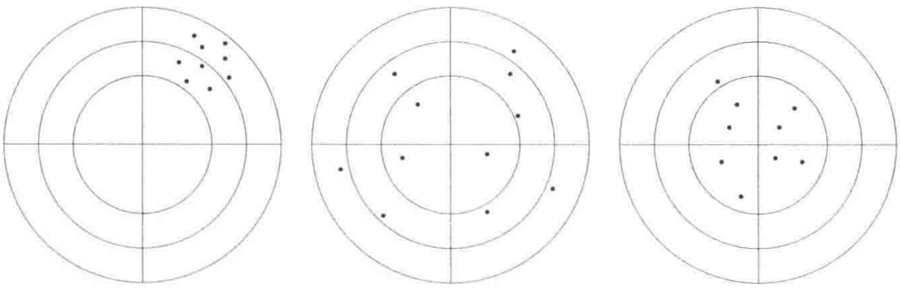
本节最后介绍一下测量的精密度、准确度和精确度.

精密度、准确度和精确度都是评价测量结果好坏的,但这三个词的含义不同,应加以区别. 精密度高是指测量数据比较集中,偶然误差较小,但系统误差的大小不明确.

准确度高是指数据的平均值偏离真值较少,系统误差较小,但偶然误差的大小不明确.

精确度高是指数据比较集中在真值附近,即系统误差和偶然误差都比较小. 它是对测量的系统误差与偶然误差的综合评定.

图 0 - 2 - 1 是用打靶时弹着点的情况为例,说明这三个词的意义. (a)图表示射击的精密度高,但准确度较差;(b)图表示射击的准确度高,但精密度较差;(c)图表示精密度和准确度均较好,即精确度高.



(a) (b) (c)

图 0 - 2 - 1 靶纸上的弹着点

第三节 直接测量值的误差估计

我们知道,所谓直接测量就是直接用仪器测定,它的步骤是采集数据,求出算术平均值,再对误差进行分析和讨论.

我们知道真值是测不到的,那么误差也是未知的,式(0 - 2 - 1)只是个定义式,它是不能用来运算的. 要对直接测量误差进行估计,我们还需要引入一个新的概念——残差.

所谓残差就是测量值与算术平均值的差,即

$$x_i - \bar{x} = v_i \qquad (0-3-1)$$

它是衡量每个测定值误差大小的.

直接测量误差估计中,都是用残差进行估算的.

任何实验数据中都毫无例外地包含一定的误差,它们都不是完全可靠的. 测量过程中,三类误差是混杂在一起的,但在数据处理时,一定要排除粗大误差(即要删除坏数据). 对于系统误差一般应尽量找到原因,进行补正. 实际测量中,当系统误差恒定时,一般不是从一个一个数据中消除它,而是在求出算术平均值后再将系统误差取相反数作为修正值,加入

其中.

应注意的是，下面讨论的问题，是假定数据中已不存在系统误差和粗大误差.

1. 测量列标准偏差(均方差)

测量列是指一组测量值，在同一条件下进行测量(称为等精度测量)所得的各数据，由于存在偶然误差而相互稍有不同，标准偏差是对这组数据可靠性的一种评价.

测量列标准偏差的定义为：各测量值残差的平方和的平均值的平方根，故又称均方差. 公式如下：

$$s=\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{0-3-2}$$

此式又称为贝塞尔公式，其统计意义为：标准偏差是衡量测量数据的可靠程度的，即数据的分散情况. 标准偏差小，则说明数据比较集中，可靠程度高；反之，数据分散，可靠性差. 按照偶然误差的高斯理论，任何一个测量值的残差 v_i 落在 $(-s, +s)$ 区间内的概率为 68.3%，落在 $(-2s, +2s)$ 区间内的概率为 95.5%，落在 $(-3s, +3s)$ 区间内的概率为 99.7%，即落在 $\pm 3s$ 区间外的可能性只有 0.3%，因此，一般将 $3s$ 称为极限误差.

2. 算术平均值标准偏差

测量值存在偶然误差，它们的算术平均值也必然存在偶然误差，而测量值的偶然误差成分在相加时有所抵消，因此算术平均值的误差绝对值较小，它的标准偏差也应小于式(0-3-2)求出的测量列标准偏差，二者的关系为①

$$s(\bar{x})=\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{0-3-3}$$

它表示算术平均值的误差落在 $[-s(\bar{x}), +s(\bar{x})]$ 之间的概率为 68.3%.

3. 关于测量次数 n

在第二节讨论偶然误差时曾提过减小偶然误差的办法是增加测量次数，现在可从式(0-3-3)得到解释.

(1)从式(0-3-3)中我们可知道，n 增加，算术平均值标准偏差 $s(\bar{x})$ 的绝对值减小. 这说明增加测量次数可以减小算术平均值的误差，平均值的可靠性增加，所以一般测量时都要进行重复测量. 但我们还能看到，随着 n 的逐渐增大，$s(\bar{x})$ 变化将越来越不明显，n 无限增大时，$s(\bar{x})$ 值趋于恒定. 这点我们可从图 0-3-1 中看得很清楚.

(2)n 增大只对减小偶然误差有作用，对系统误差则无影响，而测量误差是偶然误差和系统误差之和.

(3)测量次数过多，测量者会疲劳，测定条件也可能出现不稳定，因而有可能增加偶然误差的趋势.

综上所述，增加测量次数，虽然可以提高平均值的可靠程度，但是作用是有限的. 实际上，只有改进实验方法和仪器，才能从根本上改善测量结果. 因此普通物理实验中测量次数一般取 4～10 次为宜.

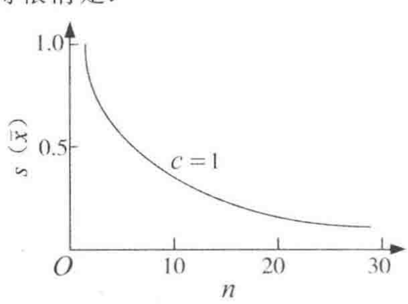


图 0-3-1 $s(\bar{x})$—n 关系

① 式(0-3-3)的推导请见第六节之后的附注[1].

4. 单次测量值标准偏差的估计

有些实验，是在动态中测量，不可能重复测定；也有一些实验的精密度不高；或者在间接测量中，某些量误差影响较小等情况，可以只测一次. 而单次测量值是无法用公式计算标准偏差的. 还有一种情况，就是重复测量多次，数据不变，若用式(0－3－2)计算，标准偏差为零. 这两种情况不是不存在误差，只是前者无法计算，后者则是仪器精度不足以反映其微小差异而已.

那么这两种情况的标准偏差如何估计呢？

对于单次测量一般是先估计它的极限误差 Δ，有的测量偶然误差比较小，可取仪器的分度值为极限误差，有的测量偶然误差比较大，就要取仪器分度值的几倍为极限误差. 因此，误差的估计要根据测量的实际情况.

取极限误差 Δ 的几分之一为标准偏差的估计值，要看对极限误差的估计，如果估计极限误差为 $2s$，就要取 $\frac{1}{2}\Delta$ 为 $s(\bar{x})$，如果极限误差估计为 $3s$，就取 $\frac{1}{3}\Delta$ 为 $s(\bar{x})$. 对于多次测量数据不变的，可估计其标准差为 $\frac{\delta}{2}$，δ 为仪器的最小分辨率.

5. 可疑数据的取舍

前面我们曾讨论过粗大误差，粗差实质上是一种错误，它明显地歪曲实验结果. 因此，我们必须将错误数据删除，但删除错误数据必须有充分理由，不能随心所欲任意删除. 也就是说，实验数据不能人为地任意挑选，审查数据要有一定的理论根据，要有一些准则. 下面予以介绍.

审查数据要借助于误差理论. 它是在计算测量列标准偏差 s 之后，再根据测量次数，确定该组测量残差最大限 $v_{\max}$. 若测量列中各测量值的残差 v_i 中某一个的绝对值大于 $v_{\max}$，那么该数据就是坏数据，应该从测量列中删除，然后重新求平均值，标准偏差，再重新审查数据，直至测量列中无坏数据为止.

(1)拉依达准则

它是以测量列极限误差为界限，即 $v_{\max}=3s$，这个界限太宽了，有 99.7% 的数据落在 $(\bar{x}\pm3s)$ 区间内，所以测量数据少于 10 时，此准则无效. 因此，该准则目前很少用.

(2)肖维涅准则

它给出的残差最大限为 $v_{\max}=C_n\cdot s$，式中 C_n 称为肖维涅系数，它与测量次数有关. 具体见表 0－3－1.

表 0－3－1 C_n 数据表

n	C_n	n	C_n	n	C_n
5	1.65	14	2.10	23	2.30
6	1.73	15	2.13	24	2.31
7	1.80	16	2.15	25	2.33
8	1.85	17	2.17	30	2.39
9	1.92	18	2.20	40	2.49

续 表

n	C_n	n	C_n	n	C_n
10	1.96	19	2.22	50	2.58
11	2.00	20	2.24	75	2.71
12	2.03	21	2.26	100	2.81
13	2.07	22	2.28	200	3.02

当用计算机处理数据时，可用如下的拟合公式去计算 C_n

$$C_n = \ln(n-1.69)/2.84 + 1.22 - n/3300 \tag{0-3-4}$$

(3)格罗布斯准则

它给出的残差最大限为 $v_{\max} = G_n \cdot s$，G_n 称为格罗布斯系数，G_n 也与测量次数有关，见表 0-3-2.

表 0-3-2　G_n 系数表

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
G_n	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.28	2.33
n	14	15	16	17	18	19	20	22	25	50	
G_n	2.37	2.41	2.44	2.48	2.50	2.53	2.56	2.60	2.66	2.74	

也可用拟合公式计算 G_n.

$n<30$ 时，取

$$G_n = \frac{\ln(n-2.65)}{(2.31)} + 1.305 \tag{0-3-5}$$

$n>30$ 时，取

$$G_n = \frac{\ln(n-3)}{(2.30)} + 1.36 - \frac{n}{550} \tag{0-3-6}$$

审查数据时用肖维涅准则可以，用格罗布斯准则也可以，二者大体相同，只是格罗布斯准则比肖维涅准则界限稍宽些. 这可从 C_n 数据表和 G_n 数据表中看出：当 n 为 10 时，$C_n=1.96$，而 $G_n=2.18$；当 n 为 20 时，$C_n=2.24$，而 $G_n=2.56$.

例　测得一组长度值(单位：cm).

10.05	10.01	10.22	10.03	9.95
10.04	10.00	10.02	10.06	9.98

计算出 $\bar{x}=10.036\text{cm}$，$s=0.073\text{cm}$.

现在用前面介绍的三种准则来分别审查数据.

(1)用拉依达准则审查

$v_{\max}=3s=0.218$，$\bar{x}-3s=9.818\text{cm}$，$\bar{x}+3s=10.254\text{cm}$.

数据全部在此区间内，无坏数据.

(2)用格罗布斯准则审查

$n=10$，$G_n=2.18$，$v_{\max}=0.158\text{cm}$. $\bar{x}-G_n \cdot s=9.878\text{cm}$，$\bar{x}+G_n \cdot s=10.194\text{cm}$.

数据 10.22 在此范围之外应舍去，再重新计算

$$\bar{x}=10.016\text{cm}, s=0.035\text{cm}, s(\bar{x})=0.012\text{cm}$$

再审查一遍，这时

$$n=9, G_n=2.11, v_{\max}=0.074\text{cm}. \bar{x}-G_n\cdot s=9.942\text{cm}, \bar{x}+G_n\cdot s=10.09\text{cm}$$

数据全部在此范围内，无坏数据.

(3)用肖维涅准则审查

$$n=10, C_n=1.96, v_{\max}=0.142\text{cm}. \bar{x}-C_n\cdot s=9.894\text{cm}, \bar{x}+C_n\cdot s=10.18\text{cm}$$

同样数据 10.22 不在此范围之内，应舍去重新计算.

$$\bar{x}=10.016\text{cm}, s=0.035\text{cm}, s(\bar{x})=0.012\text{cm}$$

再审查一次，这时

$$n=10, C_n=1.92, v_{\max}=0.067\text{cm}. \bar{x}-C_n\cdot s=9.948\text{cm}, \bar{x}+C_n\cdot s=10.083\text{cm}$$

数据全部在此范围内，已无坏数据.

所以最后取

$$\bar{x}=10.016\text{cm}, s=0.035\text{cm}, s(\bar{x})=0.012\text{cm}$$

6.误差的表示方法

(1)绝对误差

测量值 x_i 与真值 a 之差，称为误差。它是有单位的，其单位与测量值的单位相同，它反映测量值偏离真值的大小，所以称为绝对误差. 前面曾提到的残差，标准偏差，极限误差等都是绝对误差，它是误差的一种表示方法.

(2)相对误差

绝对误差可以表示一个测量结果的可靠程度，但在比较不同测量结果时则不适用. 例如测量两个物体的质量，一个是 1.00 g，另一个是 100.00 g，如果测量的绝对误差都是 0.01 g，那么从绝对误差来看，两者是相同的. 但这两个测量结果的可靠性显然不同，因此引入相对误差的概念. 相对误差，即该测量值的绝对误差与测量值之比. 相对误差是一个比值，没有单位，通常用百分数来表示. 上面两个物体质量的相对误差分别为 1%和0.01%，显然，后者的可靠性比前者大得多. 相对误差也是误差的一种表示方法.

7.测量结果的报导

假如一组测量数据为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，它的算术平均值为 $\bar{x}$，其算术平均值标准偏差为 Δx（这里 $\Delta x=s(\bar{x})$），那么用绝对误差表示，测量结果的报导为

$$x=\bar{x}\pm\Delta x \tag{0-3-7}$$

第四节 间接测量结果的误差估计

由于直接测定值存在误差，那么间接测定结果也必然存在误差. 其误差的大小除了取决于各直接测定值误差大小之外，还与它们之间的函数关系有关. 间接测定结果的误差与各直接测定值的误差之间的关系式，称为误差传递公式. 下面我们将根据不同的函数关系

分别进行讨论.

为讨论问题方便起见,我们只讨论两个直接测定值的情况,即 $y=f(x_1,x_2)$. 假定 $\overline{x}_1$,$\overline{x}_2$ 为其算术平均值,Δx_1,Δx_2 为其平均值标准偏差.

1. 加减关系

先讨论 $y=ax_1+bx_2$(a,b 为常数)考虑误差之后,可将上式写成

$$y\pm\Delta y=a(x_1\pm\Delta x_1)+b(x_2\pm\Delta x_2)$$

那么

$$\pm\Delta y=(\pm a\Delta x_1)+(\pm b\Delta x_2)$$

取绝对值相加,则有

$$\Delta y=a\Delta x_1+b\Delta x_2 \tag{0-4-1}$$

同理 $y=ax_1-bx_2$(a,b 为常数),也有

$$\Delta y=a\Delta x_1+b\Delta x_2 \tag{0-4-2}$$

小结:如果函数关系是加减的话,那么间接测定结果的绝对误差与各直接测定值绝对误差满足 $\Delta y=a\Delta x_1+b\Delta x_2$($a$,$b$ 为常数).

2. 乘除关系

首先讨论 $y=ax_1\cdot x_2$(a 为常数),考虑误差之后,上式可写成

$$y\pm\Delta y=a(x_1\pm\Delta x_1)(x_2\pm\Delta x_2)$$

展开有

$$\pm\Delta y=\pm ax_2\Delta x_1\pm ax_1\Delta x_2\pm a\Delta x_1\cdot\Delta x_2$$

考虑到 $\Delta x_1\cdot\Delta x_2$ 乘积为微小量,可忽略掉,所以

$$\pm\Delta y=\pm ax_2\Delta x_1\pm ax_1\Delta x_2$$

求绝对值

$$\Delta y=ax_2\Delta x_1+ax_1\Delta x_2$$

用相对误差表示,则有

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta x_1}{x_1}+\frac{\Delta x_2}{x_2} \tag{0-4-3}$$

同理 $y=ax_1/x_2$(a 为常数),公式为

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta x_1}{x_1}+\frac{\Delta x_2}{x_2} \tag{0-4-4}$$

小结:如果函数关系是乘除的话,那么间接测定量的相对误差等于各直接测定值相对误差之和.

3. 指数关系

$y=ax^b$(a 为常数,指数 b 为任意数),其相对误差为

$$\frac{\Delta y}{y}=|b|\frac{\Delta x}{x} \tag{0-4-5}$$

4. 函数关系

$y=Ax_1^a\cdot x_2^b\cdots x_n^m$ 是乘除关系和指数关系的通式,综合以上讨论,可知其相对误差公式为

$$\frac{\Delta y}{y}=|a|\frac{\Delta x_1}{x_1}+|b|\frac{\Delta x_2}{x_2}+\cdots+|m|\frac{\Delta x_n}{x_n} \tag{0-4-6}$$

此式即为间接测量的误差传递公式. 计算间接测定量的误差时,除加减关系外,一般是

先求相对误差$\frac{\Delta y}{y}$，再乘以间接测量的平均值 $\bar{y}$，求出绝对误差 Δy，最后将间接测量结果报导为

$$y=\bar{y}\pm\Delta y \tag{0-4-7}$$

下面给出一些误差公式的实例.

例 1 距离 $s=x_2-x_1$ 的误差公式为

$$\Delta s=\Delta x_2+\Delta x_1 \tag{0-4-8}$$

例 2 圆柱体体积公式 $V=\frac{1}{4}\pi d^2 l$ 的误差公式为

$$\frac{\Delta V}{V}=2\,\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta l}{l} \tag{0-4-9}$$

例 3 加速度公式 $a=\frac{d^2}{2s}\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)$的误差公式为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta a}{a}&=2\,\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta s}{s}+\Delta\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)\Big/\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)\\&=2\,\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta s}{s}+\left[\Delta\left(\frac{1}{t_2^2}\right)+\Delta\left(\frac{1}{t_1^2}\right)\right]\Big/\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)\\&=2\,\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta s}{s}+\left(2\,\frac{\Delta t_2}{t_2^3}+2\,\frac{\Delta t_1}{t_1^3}\right)\Big/\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)\end{aligned} \tag{0-4-10}$$

从上面例 3 中可以看到，当函数关系比较复杂，即加减乘除和指数关系混杂在一起时，误差公式推导比较烦琐. 有些公式，像用静力称衡法测固体密度公式 $\rho=\rho_0 m/(m-m_1)$，很容易出错. 还有些公式，像棱镜玻璃折射率公式 $n=\sin\left(\frac{A+\delta}{2}\right)\Big/\sin\frac{A}{2}$则无法用上述方法进行推导. 那么对任意函数该如何求其误差传递公式呢？下面予以介绍.

对于任意函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为各直接测定量的最佳值，Δx_1，$\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$ 为其标准偏差. 根据多元函数微分法则，对上式求全微分有

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{0-4-11}$$

因为误差是个小量，通常远小于测量值，把式(0 - 4 - 11)中的 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 和 $\mathrm{d}y$ 相应换成误差 $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$ 和 Δy，则式(0 - 4 - 11)就变成误差传递公式了，即

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{0-4-12}$$

在计算误差时，由于误差本身的正或负是不可知的，因此式(0 - 4 - 12)中各 Δx 的系数取其绝对值，即

$$\Delta y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\Delta x_1+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\Delta x_2+\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\Delta x_n \tag{0-4-13}$$

用式(0 - 4 - 13)计算出的是间接测定量的绝对误差，但有时很麻烦，不方便. 因此，通常用相对误差计算. 公式如下：

$$\frac{\Delta y}{y}=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\frac{\Delta x_1}{y}+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\frac{\Delta x_2}{y}+\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\frac{\Delta x_n}{y} \tag{0-4-14}$$

(0 - 4 - 13)和(0 - 4 - 14)两式是间接测定量误差传递公式最基本的. 无论函数关系

如何，都可以用这两个公式求出误差公式，现举几例.

例 1 $V=\frac{1}{4}\pi d^2 l$.

根据式(0 - 4 - 13)有

$$\Delta V=\frac{\partial V}{\partial d}\Delta d+\frac{\partial V}{\partial l}\Delta l$$

即
$$\Delta V=\frac{1}{4}\pi l\cdot 2d\Delta d+\frac{1}{4}\pi d^2\Delta l$$

这就是体积 V 的绝对误差，显然计算比较麻烦，若用相对误差来表示，就变得十分简单了，即

$$\frac{\Delta V}{V}=2\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta l}{l} \tag{0 - 4 - 15}$$

此式与式(0 - 4 - 9)是一致的.

例 2 $a=\frac{d^2}{2s}\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)$.

根据式(0 - 4 - 13)有

$$\Delta a=\left|\frac{\partial a}{\partial d}\right|\Delta d+\left|\frac{\partial a}{\partial s}\right|\Delta s+\left|\frac{\partial a}{\partial t_2}\right|\Delta t_2+\left|\frac{\partial a}{\partial t_1}\right|\Delta t_1$$

式中各系数为

$$\left|\frac{\partial a}{\partial d}\right|=\frac{\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)}{2s}2d;$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial s}\right|=\frac{d^2}{2}\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)(-1)s^{-2};$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial t_2}\right|=\frac{d^2}{2s}(-2)t_2^{-2};$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial t_1}\right|=(-1)\frac{d^2}{2s}(-2)t_1^{-3}$$

将各系数取绝对值代入上式，有

$$\Delta a=\frac{\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)}{2s}2d\Delta d+\frac{d^2}{2}\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)s^{-2}\Delta s+\frac{d^2}{2s}2t_2^{-3}\Delta t_2+\frac{d^2}{2s}2t_1^{-3}\Delta t_1$$

相对误差为

$$\frac{\Delta a}{a}=2\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta s}{s}+2t_2^{-3}\Delta t_2\Big/\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)+2t_1^{-3}\Delta t_1\Big/\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)$$

整理后，得

$$\frac{\Delta a}{a}=2\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta s}{s}+\left(2\frac{\Delta t_2}{t_2^3}+2\frac{\Delta t_1}{t_1^3}\right)\Big/\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right) \tag{0 - 4 - 16}$$

此式与式(0 - 4 - 10)也完全一致.

例 3 $\rho=\rho_0 m/(m-m_1)$

(式中 m 为物体在空气中的称衡的质量，m_1 为物体浸在水中的视重，ρ_0 为水的密度)

根据式(0－4－13),有

$$\Delta\rho=\frac{\partial\rho}{\partial m}\Delta m+\frac{\partial\rho}{\partial m_1}\Delta m_1$$

公式中系数

$$\frac{\partial\rho}{\partial m}=\left[\frac{\rho_0}{m-m_1}+\rho_0 m(-1)(m-m_1)^{-2}\right]$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m_1}=\rho_0 m(-1)(m-m_1)^{-2}(-1)$$

系数取绝对值代入上式,得

$$\rho=\left[\frac{\rho_0}{m-m_1}+\rho_0 m\ (m-m_1)^{-2}\right]\Delta m+\rho_0 m\ (m-m_1)^{-2}\Delta m_1$$

相对误差

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{m-m_1}\right]\Delta m+\frac{1}{m-m_1}\Delta m_1 \qquad (0-4-17)$$

例 4　$n=\sin\left(\frac{A+\delta}{2}\right)/\sin\frac{A}{2}$(式中 A 为三棱镜的顶角,δ 为最小偏向角)

根据式(0－4－13)有

$$\Delta n=\frac{\partial n}{\partial A}\Delta A+\frac{\partial n}{\partial\delta}\Delta\delta$$

公式中系数

$$\frac{\partial n}{\partial A}=\left[\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A+\delta}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sin\frac{A+\delta}{2}\cdot(-1)\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{-2}\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{\partial n}{\partial\delta}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A+\delta}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

将系数取绝对值代入上式,得

$$\Delta n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A+\delta}{2}-\sin\frac{A+\delta}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{-2}\cos\frac{A}{2}\right]\Delta A+\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A+\delta}{2}\Delta\delta$$

相对误差为

$$\frac{\Delta n}{n}=\frac{1}{2}\left[\cot\frac{A+\delta}{2}-\cot\frac{A}{2}\right]\Delta A+\frac{1}{2}\cot\frac{A+\delta}{2}\Delta\delta \qquad (0-4-18)$$

以上讨论了间接测量误差和各直接测量误差之间的关系,在讨论时我们没有考虑 Δx_1,Δx_2,…,Δx_n 各误差的符合在实际上不会完全相同,它们传递给间接测量值时有相互抵消一些的可能. 比如 $y=x_1+x_2$,当 Δx_1 是正号时,Δx_2 不一定是正号,所以 Δy 不一定是 Δx_1 和 Δx_2 之和,然而我们无法判断各误差的实际符号,而从最不利的情形考虑,将各误差取绝对值相加,这样估计的误差将有些偏大. 为了更符合实际情况,下面介绍误差的方和根形式.

所谓方和根形式,就是将各直接测量定量误差(绝对误差或相对误差)先平方再求和,然后开方,即