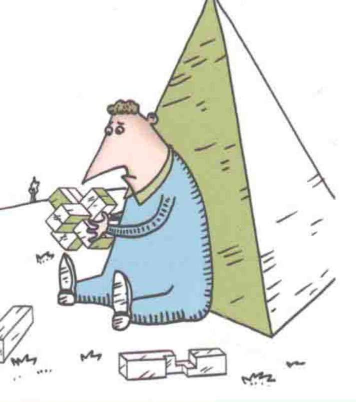
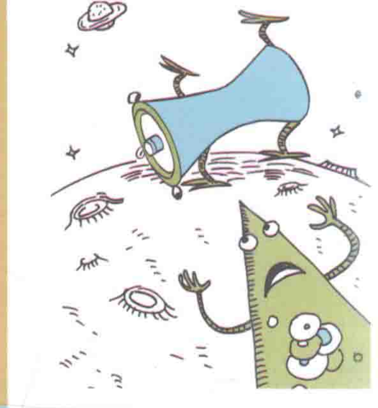


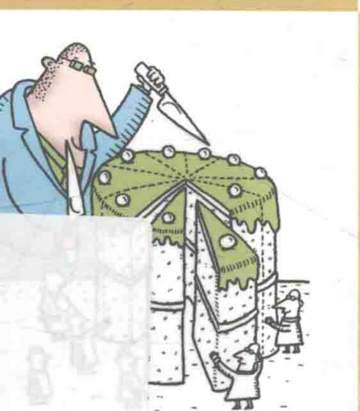


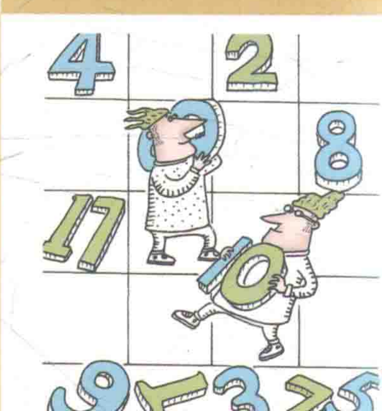
加德纳趣味数学

经典汇编

孔明锁、矩阵博士及陷阱门密码

马丁·加德纳 著　　涂泓 译　　冯承天 译校





MAA

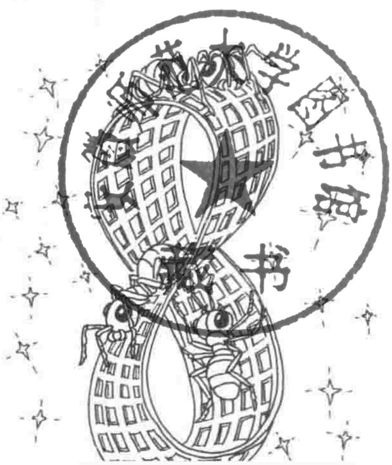
上海科技教育出版社

加德纳趣味数学

经典汇编

孔明锁、矩阵博士及陷阱门密码

马丁·加德纳 著　　涂泓 译　　冯承天 译校



上海科技教育出版社

Penrose Tiles To Trapdoor Ciphers:
And The Return of Dr. Matrix

By
Martin Gardner

责任编辑 李　凌
装帧设计 李梦雪　杨　静

·加德纳趣味数学经典汇编·
孔明锁、矩阵博士及陷阱门密码

[美]马丁·加德纳　著
涂　泓　译
冯承天　译校

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版
(上海市冠生园路393号　邮政编码200235)
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
www.ewen.co　www.sste.com
各地新华书店经销　常熟文化印刷有限公司印刷
ISBN 978-7-5428-6601-1/O·951
图字09-2013-850号

开本 720×1000　1/16　印张 13.75
2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
定价:35.00元

献给彭罗斯[1]

为他在数学、物理和宇宙学方面作出的种种美丽的、惊人的发现;为他在宇宙运作方式方面所具有的那种深刻的、创造性的洞见;以及为他的那种谦逊,因为他以为自己不只是探究了人类心智的各种产物。

① 彭罗斯爵士(Roger Penrose,1931—　),英国数学物理学家,对广义相对论与宇宙学具有重要贡献,在趣味数学和哲学方面也有重要影响。——译者注

序

本书是我在25年间为《科学美国人》(*Scientific American*)所写的一系列专栏文章集成的一本合集。它是这样的合集中的第十三本。如果必须冠上一个统一的标题的话,那么这个标题就是趣味数学,即本着一种游戏精神而呈现的数学。正如前几本书一样,作者根据读者的反馈对这些专栏文章进行了补充、修改和扩展。我在此宣布我的发现:矩阵博士并没有如人们所相信的那样被俄罗斯克格勃间谍谋害,而是还活着,并且在卡萨布兰卡非常健康地生活着。

马丁·加德纳

图书在版编目(CIP)数据

孔明锁、矩阵博士及陷阱门密码/(美)马丁·加德纳著;涂泓译.—上海:上海科技教育出版社,2017.8

(加德纳趣味数学经典汇编)

书名原文:PENROSE TILES TO TRAPDDOR CIPHERS

ISBN 978-7-5428-6601-1

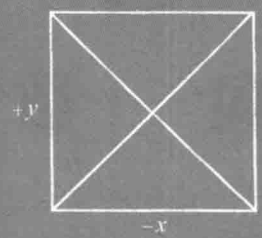
Ⅰ.①孔… Ⅱ.①马…②涂… Ⅲ.①数学—普及读物 Ⅳ.①01.49

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第184647号

目录

第 1 章

负数



负国的居民们看起来出奇地像我们。

他们的学生们追求一个负的年级，他们对于一个正的年级抱怨不休。

那位高尔夫球手轻易获得了负四，他从不增加他的比分。

与此同时，他妻子看待商店购物的价格却是非负的。

——欧文·E·方，

《不幸恋人们的故事》

(*A Tale of Star-crossed Lovers*)

当一个孩子学习说话的时候，头几个正整数的名称对于他的词汇之必要性，几乎相当与“狗”、“猫”和“鸟”。我们的古老祖先们必定有过类似的经历。计数数，有时也称为自然数，无疑是最初的一批词汇，它们有用的程度足以使它们需要名称。现今的数学家们将“数”这个词应用于数百种抽象的怪兽，它们已经和计数远隔万里。

扩大“数”的意义的第一小步是把分数也接纳为数。尽管世上的许多东西通常的体验都不是分数（恒星、奶牛、河流，等等），不过还是很容易了解半个苹果或者12头绵羊的 $\frac{1}{3}$ 是什么意思。不过接下去一步，接受负数，是如此令人望而生畏，以至于直到17世纪，数学家们才开始真正对它感到心安理得。许多人现在仍然对它感到忐忑不安。奥登（W. H. Auden）援引了他在学校里学过的一首短歌，歌词就是这样的：

负负得正。

其中的理由我们不需讨论。

我们必须将负数与减法运算区分开来[①]。一个孩子或者一名没有受过教育的牧民能毫无困难地从10头奶牛中减去6头奶牛。然而，一头“负奶牛”却

① 按近代的看法 $a-b=a+(-b)$，$a,b\in N$，即减去一数等于加上此数的负数，因此两者还是有关联的。——译者注

比一头鬼魂奶牛还要难以想象。一头鬼魂奶牛至少还有某种真实性，但一头负奶牛却比没有奶牛还要来得不真实。一头奶牛减去一头奶牛，什么都没留下。但是将一头负奶牛加上一头正奶牛，结果导致两者都消失不见，就像一个粒子碰到它的反粒子那样，这看起来就像下列这个老笑话一样荒谬可笑。这个笑话讲的是一个人，他的个性是如此地消极负面，以至于当他走进一场聚会时，宾客们就会环顾四周，并问道："谁离开了？"

以下是古希腊人如何感觉负数的。他们热爱几何，并且乐于将各种数学实体想象成他们能够用图形表示的事物。对他们而言，"数"是能够用鹅卵石或石板上的点来模拟的自然数和正整分数[①]。古希腊人的原始代数中没有零，也没有任何负的量。他们甚至不愿意把1称为一个数，因为正如亚里士多德所说的，数是用来度量有多种状态的东西的。而1是度量单位，没有多重性。

很重要的一点我们要意识到，这种态度在很大程度上是一个语言上的偏好问题。希腊数学家们知道$(10-4)(8-2)$等于$(10\times8)-(4\times8)-(2\times10)+(2\times4)$。要承认这样一种相等性，那就是要隐含地接受后来所谓的符号律：任意两个具有同样符号的数的乘积是正的，而任意两个具有不同符号的数的乘积是负的。正是由于这一点，希腊人宁可不把$-n$称为数。对于他们而言，这只不

① 这里指的是具有$a/b, a, b\in N, b\neq 0$形式的数。——译者注

过是一个符号，表示某件要取走的事物。你可以从10个苹果中取走2个苹果，但是要从2个苹果中取走10个苹果对他们来说就是无稽之谈。他们知道$4x+20=4$给出的x值是-4，但是他们拒绝写下这样一个方程，因为它的解“不是一个数”。出于同样的理由，他们也不认可$-\sqrt{n}$是n的一个正当的平方根。

很难确切地知道更早的巴比伦人是如何看待那些负的量的，不过他们对这些量的态度似乎比希腊人要更宽心些。比我们早很多的中国数学家们已用竹算筹飞快地进行计算，他们用红算筹表示正数（“正”），用黑算筹表示负数（“负”）。同样的这两种颜色后来也用来表示书写的正数和负数。《九章算术》是汉代（约公元前200年至公元200年）的一部有名的著作，其中解释了算筹运算步骤，并且人们相信负数第一次以印刷形式出现。不过，书中并不承认负根和符号律。

使用零和负数的系统性代数直到17世纪才建立起来，当时印度数学家们开始在一些涉及余额和欠款的问题中采用负值。他们不仅是首先用一种现代的方式来使用零的，而且在他们所写的一些方程中，用数字上方加一个点或者一个小圆圈这样的符号来表示负数。他们明确地用公式表示符号律，并承认每个正数都有两个平方根，一正一负。

文艺复兴时期的大部分欧洲数学家都承继希腊的传统，抱着怀疑的态度看待负数量。在这里我们还是必须记住，这更多的是语言偏好，而不是不能理解的问题。文艺复兴时期的代数学家们对于如何操作负根心知肚明，他们只是称它们为“假根”。他们很清楚地知道如何用负数去解方程，不过他们就是要避免把“数”这个词应用于小于零的那些量。

到了17世纪，有几位有胆识的数学家修改了他们的语言，以便将负数包括进来成为合法的数，但是这种做法继续遭遇阻力，有时候是来自一些杰出数学

家的抵制。笛卡儿[1]将这些负根说成是“伪根”，而帕斯卡[2]则认为将任何小于零的东西称为一个数都是毫无意义的。帕斯卡的朋友阿诺德(Antoine Arnauld)对负值的荒谬性给出了如下证明：符号律强制我们得出 $-1/1=1/-1$。如果把此式当做是两个比例之间的一个等式，那么我们就必须断言，一个较小数比上一个较大数，就等于一个较大数比上一个较小数。这个表面上看似真的悖论正如克莱因在《古今数学思想》[3]中指出的那样，曾由文艺复兴时期数学家们大量讨论过。尽管莱布尼茨[4]认同这个悖论很难解决，不过他捍卫负数，认为它们是有用的符号，因为没有它们就不能进行正确的计算。

17世纪和18世纪的一些最杰出数学家——举两个来说，如沃利斯[5]和欧拉——接受了负数，但又相信它们大于无穷。为什么？因为有 $a/0=\infty$。因此如果我们用 a 去除以一个小于零的数，比如说-100，我们难道不应去构造一个超过无穷的负商吗？

用于加法和减法的符号在文艺复兴时期发生了相当大的变化。如今我们

---

① 笛卡儿(René Descartes，1596—1650)，法国哲学家、数学家、物理学家。他对现代数学的发展作出了重要的贡献，因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父。——译者注

② 帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)，法国数学家、物理学家、哲学家。早期在数学和物理方面的工作对射影几何、概率论、流体等方面都有重要贡献。晚年专注于沉思和哲学，写下《思想录》(*Pensées*)等经典著作。——译者注

③ 克莱因(Morris Kline，1908—1992)，美国数学史学家，数学哲学家，数学教育家，出版过许多有关数学的著作。《古今数学思想》(*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*)一书中译本由上海科学技术出版社翻译出版，译者张理京，张锦炎，江泽涵等。——译者注

④ 莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716)，德国哲学家、数学家、物理学家、历史学家和哲学家。他和牛顿先后独立发明了微积分，而他所使用的微积分符号得到更广泛的使用。——译者注

⑤ 沃利斯(John Wallis，1616—1703)，英国数学家，对现代微积分的发展作出了贡献。——译者注

所熟悉的加号和减号最初是在15世纪的德国作为仓库中的标志出现的。它们表示一个容器中所装的东西何时超过或者低于某个标准重量。到了16世纪早期，德国和荷兰的代数学家们使用“+”和“-”来作为运算符号，并且这种做法很快就传播到了英格兰。雷科德(Robert Recorde)是爱德华四世和玛丽女王的内科医师，他在1541年写了一本当时很流行的算术教科书，这是英语中首次使用加号和减号，尽管并不是用作运算。他对这两个符号的解释如下：“这个图形+，表示太多，而这根线-，没有竖线的水平线，则表示太少。”雷科德后来撰写的一本书是在英格兰首次使用相等的现代符号。“正如我常常在工作中使用的那样，画出一对平行线……像这样：=，因为没有任何两件事物可以比它们更加能表示等同了。”

在18世纪，负数在代数中的使用在世界各地变得普遍，而这是以负号来标定的。然而，大部分数学家仍然感到困惑。他们的书籍中长篇大论地申述符号律的合理性，有些作者愚蠢到用极过分的步骤，以重新排列各方程来避免两个负数的相乘。下面有一段摘自《关于在代数中使用负号的论文》的文章，其作者梅齐埃男爵(Baron Francis Masères，1731—1824)是一位英国的出庭律师，在加拿大魁北克省担任首席检察官。

一个单独的量永远不能……被看成肯定的，也不能看成否定的。因为如果任何一个单独的量，比如说b，被标上了+号或者-号，而对其他某个它要加上或者减去的量，比如说a，不标上符号，那么这个符号就会毫无意思，或者说毫无意义：因此如果要说-5

的平方……等于+25，那么这样一个断言要么只是意味着5乘以5等于25而完全不考虑符号，要么就必然只不过是无稽之谈和一句隐晦难懂的行话罢了。

德摩根[①]在《一批悖论》(*A Budget of Paradoxes*)一书中引用了这段话。德摩根告诉我们，梅齐埃是如此诚实的一位律师，以至于如果他认为他的委托人是有罪的，而却又能赢得官司，就无法忍受了。德摩根写道，其结果是梅齐埃的生意每况愈下。

再往前翻几页，德摩根对《代数原理》(*The Principles of Algebra*)大肆攻击，此书的作者弗伦德(William Frend)原先是一位牧师，而且恰好是他的岳父。(弗伦德由于他的那些一位论[②]观点而被剑桥大张旗鼓地驱逐出去，这件事轰动一时，后来得到了柯尔律治[③]和普利斯特利[④]的坚决捍卫。)弗伦德的这部两卷本著作很可能是有史以来最有野心的一本代数教科书：零和一切负数在其中都像弗伦德在剑桥一样不受欢迎。

德摩根全文转载了弗伦德的那出关于拉伯雷[⑤]的欢闹的滑稽讽刺戏，剧中的巨人庞大固埃(Pantagruel)对于零的无用性进行了一番狂野的演讲。文中有

① 德摩根(Augustus De Morgan，1806—1871)，英国数学家、逻辑学家，对分析学、代数学、数学史及逻辑学等方面都作出了重要贡献。——译者注

② 一位论认为上帝只有一位，且否定基督神性，是基督教中不信三位一体的唯一教派。——译者注

③ 柯尔律治(Samuel Taylor Coleridge，1772—1834)，英国诗人、文学评论家，英国浪漫主义文学的奠基人之一。——译者注

④ 普利斯特利(Joseph Priestley，1733—1804)，英国自然哲学家、化学家、牧师、教育家和自由政治理论家，对气体特别是氧气的早期研究作出过重要贡献。——译者注

⑤ 拉伯雷(François Rabelais，1494—1553)，文艺复兴时期的法国作家，代表作是长篇小说《卡刚都亚和庞大固埃》(*Gargantua and Pantagruel*)，中译本题为《巨人传》。——译者注

一个哀怨的脚注引用了德摩根夫人的话:"(我父亲)心智的清晰和率直也许导致他在数学方面作出的异端邪说,即在代数运算中拒绝使用负值。很可能是因为这个原因,他使自己失去了一种计算工具,而使用这种工具原本可能会引导他在那些更高的分支上取得更大的成就。

在没有负数的情况下怎么做代数呢?首先,你必须避免任何会导致出现负数个真实物体的方程,也不能将负的大小指派给这些物体的方程。即使当一个方程会导致一个正确的、正的解答时,也必须把它写成避免未知数出现负值的形式。例如:母亲现在29岁,女儿现在16岁,什么时候母亲的年龄是女儿的两倍?我们也许会把这道题目写成$29+x=2\times(16+x)$,然后可能会令我们惊奇地发现,$x=-3$。这个结果导出的是正确答案:当母亲为26岁、女儿为13岁时,母亲的年龄曾是女儿的两倍。作为一位18世纪的代数学家,如果他厌恶负数的话,那么他就会避免这个-3,而将方程重写为:$29-x=2\times(16-x)$。这样安排就会使x有一个可以接受的值3,而这当然会给出与刚才同样的答案。

在过去的几个世纪中,就像现今在初级代数课上那样,接受负数的主要绊脚石是"看出"两个负数之积怎么会是正数。正数乘以正数不会造成任何困难。将三对橙子放进一个空碗,那么这个碗里就会装着六个橙子。正数乘以负数开始变得神秘,不过假如你承认一个负橙子这种抽象的实在性,那么这也不难理解这一点。将三对负橙子放进碗中,于是你就得到六个负橙子。但是,用两个负橙子去乘以-3究竟是什么意思呢?你从两个鬼魂橙子开始,总数比什么都没有还要小,然后你再对它们做某件负的事情。这六个真的橙子从何而来?它们似乎是由于魔法的结果才出现在碗中的。

试图通过沿着如图1.1中所示的数轴走动来对此作出解释,对于初学的学生们而言,此举也不会有多大成效。用从零往右的那些单位标志很容易标定正整数,而用从零往左的那些单位标志则很容易标定负整数。加法是向右移

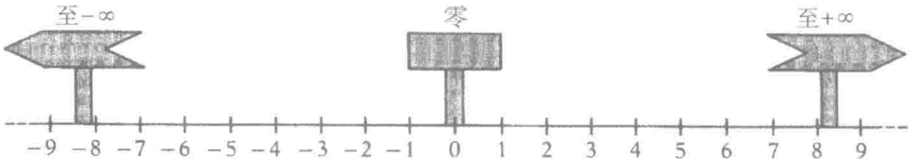


图1.1 整数轴

动，而减法则是向左移动。要用2乘以3，我们就先向右移两个单位，然后重复三遍，这就到达了6。要用-2乘以3，我们就先向左移两个单位，然后重复三遍，这就到达了-6。但是-2乘以-3怎么办呢？有什么超自然的力量会将我们从0的左边突然传输到在右边的6呢？

这就很容易原谅前几个世纪的数学家们将这一概念看成是荒诞不经的了。事实上，直至像群、环和域这样的抽象结构得到仔细定义之后，上述整个过程才能被完全理解。在这里解释这些结构并不适当，因此我满足于指出以下这一点：当数学家们发现可取的做法是扩大数的概念，从而将零和负数包括进来时，他们就想要让这些新数的行为尽可能与原来的数相像。

古老算术中的基本公理之一是分配率，可将它表述为$a(b+c)=ab+ac$。例如，$2\times(3+4)=(2\times3)+(2\times4)$。将2和3改为负数，这时只有当你采纳两个负数之积为正数这条规则时，这个等式才会依旧成立。倘若它们的乘积是负的，那么这个等式就会简化为$-2=-14$，这是一个矛盾。用现代术语来说，整数集合构成了一个关于加法、减法和乘法闭合的“环”。这一条款就意味着，无论我们如何对整数进行相加、相减或相乘，无论它们的符号如何，其结果总是一个整数。原来所有适用于正整数的算术定律，现在仍旧成立，而且我们永远也不会遇到矛盾。（除法不是恒能进行的，因为我们由此可能会得到一个分数，而分数并不是这个环中的元素。）

因此，说数学家们能够“证明”两个负数之积是一个正数，这是不对的。确切点说，这里的情况是对于一些规则的约定，即允许负数遵循原来适用于自然