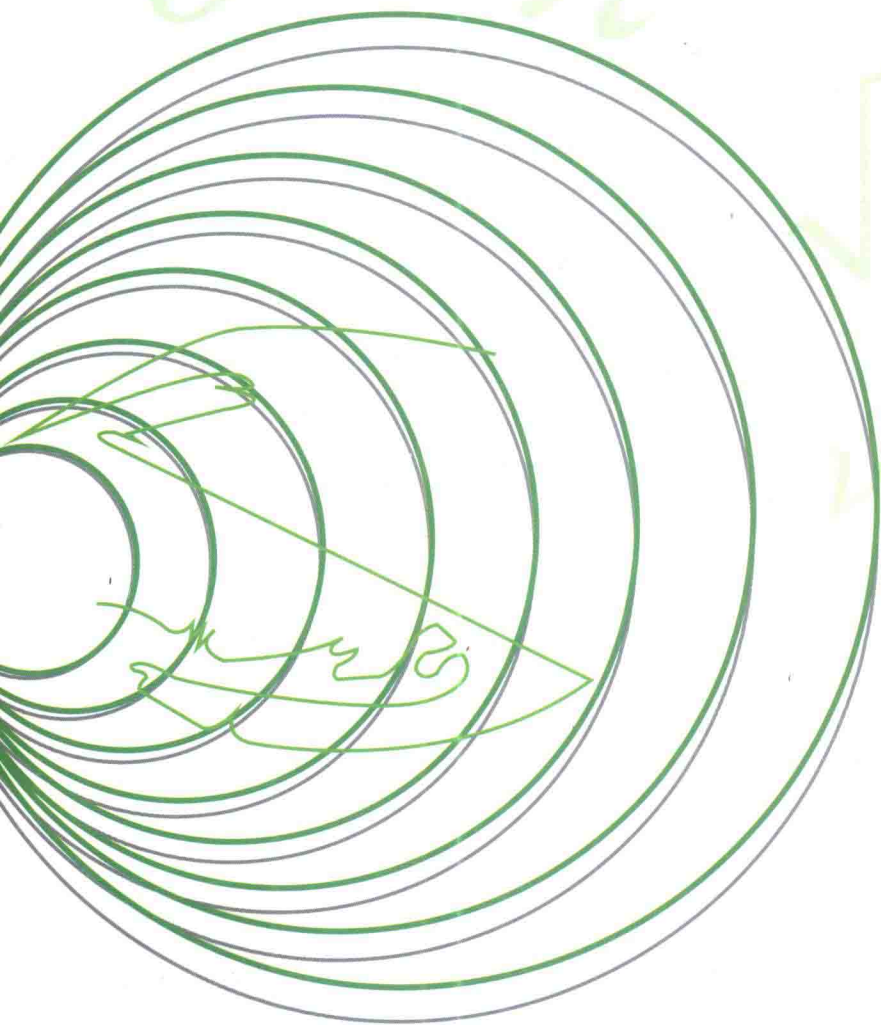


为理解而设计教学： 原理与方法

徐兆洋◎著



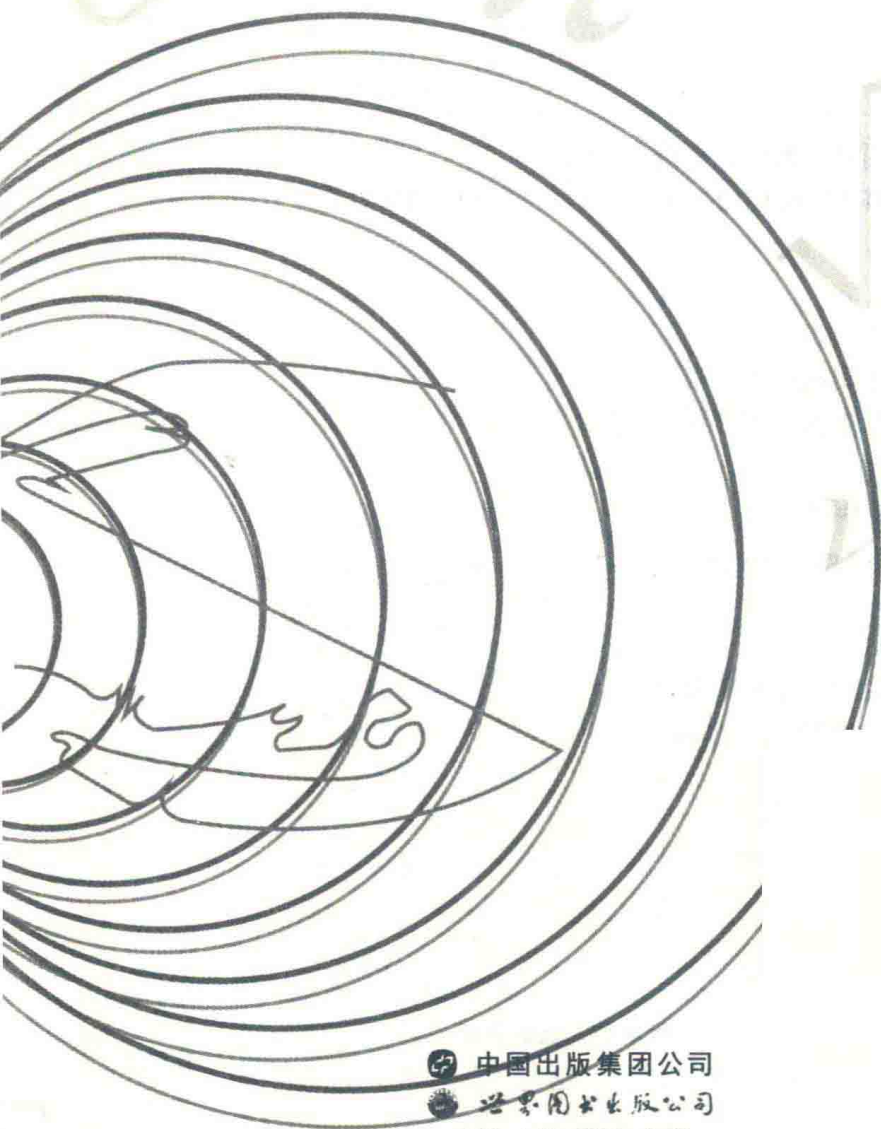
世界图书出版公司

教育部人文社会科学研究规划基金项目资助

一般项目“理解取向的数学教学研究”（项目批准号：12YJA880140）研究成果

为理解而设计教学： 原理与方法

徐兆洋◎著



中国出版集团公司
世界图书出版公司
广州·上海·西安·北京

图书在版编目 (CIP) 数据

为理解而设计教学:原理与方法 / 徐兆洋著. —
广州:世界图书出版广东有限公司, 2017.8
ISBN 978-7-5192-3707-3

I. ①为… II. ①徐… III. ①数学课—课堂教学—教学研究 IV. ①01-4

中国版本图书馆CIP数据核字 (2017) 第220683号

书 名	为理解而设计教学:原理与方法 WEI LIJIE ER SHEJI JIAOXUE: YUANLI YU FANGFA
著 者	徐兆洋
责任编辑	宋 焱
装帧设计	黑眼圈工作室
出版发行	世界图书出版广东有限公司
地 址	广州市新港西路大江冲 25 号
邮 编	510300
电 话	020-84460408
网 址	http:// www.gdst.com.cn
邮 箱	wpc_gdst@163.com
经 销	新华书店
印 刷	北京市金星印务有限公司
开 本	710mm × 1000mm 1/16
印 张	15.75
字 数	264 千
版 次	2017 年10月第 1 版 2017 年10月第 1 次印刷
国际书号	ISBN 978-7-5192-3707-3
定 价	56.00 元

版权所有, 翻版必究
(如有印装错误, 请与出版社联系)

内容简介

教学离不开设计。本书秉持现代教学与设计“理解优先”的基本理念，努力转变数学教学设计的“传递模式”，创设促进理解的、“以学为中心”的理解性学习环境。全书在总结数学理解性教学相关概念和理论的基础上，紧紧围绕“理解性教与学”这一核心思想，分析和构建为理解而设计数学教学的实践模式，从数学理解性学习内容、理解性学习目标、理解性学习问题、理解性学习活动、理解性学习评价五个维度系统阐述了教学设计的基本原理，并通过大量教学案例说明设计的具体方法。考虑到现代信息技术对学校数学教育的影响，全书最后用一章篇幅探讨了如何利用信息技术加强数学理解性教学与设计。

本书注重吸收国内外数学教育研究的最新成果，将抽象的教育理论与具体的设计方法相结合，展现了理论的指导意义以及在教学设计中的应用价值。阅读本书，读者可以将设计原理作为启发性成分，充分发挥创新实践能力，探索理论应用于教学设计的新途径；或者，将设计方法作为参照模式，指导数学教学设计，并发展教学设计和实施的策略。本书的读者对象为中小学数学教育工作者，可作为中小学数学教师专业发展和继续教育的学习用书，亦适合关心我国数学教育改革和对数学理解性教学研究感兴趣的人员参考阅读。

目 录

第一章 理解性教学设计概述	001
第一节 理解与理解性教学	001
第二节 理解性教学设计的基本原理	019
第三节 数学理解性教学设计的基本要求	031
第二章 理解性学习内容的确定	039
第一节 把握数学课程中的核心观念	040
第二节 关注数学知识之间的联系	047
第三节 重视概念性知识的重要地位	055
第四节 理解数学教材的编写逻辑	064
第三章 理解性学习目标的设置	075
第一节 明确需要理解的学习任务	075
第二节 指出着重理解的学习行为	082
第三节 描述达成理解的预期结果	088
第四章 理解性学习问题的设计	096
第一节 设计情景性问题作为理解的平台	096
第二节 设计本原性问题驱动理解的生成	105

第三节	设计变式性问题促进理解的深化·····	112
第四节	设计开放性问题引领理解的发展·····	120
第五章	理解性学习活动的设计·····	128
第一节	关注已有学习经验的重构·····	129
第二节	基于真实任务的问题解决·····	139
第三节	呈现现实世界数学化过程·····	148
第四节	提供多元表征运用的场域·····	155
第六章	理解性学习评价的设计·····	164
第一节	着眼于学生的理解水平·····	164
第二节	关注学生的学习行为·····	173
第三节	体现学生的认知发展·····	181
第七章	信息技术与数学理解性学习·····	188
第一节	信息技术是创设理解性学习环境的基础·····	189
第二节	信息技术是学生理解性学习数学的工具·····	203
第三节	信息技术为理解性学习提供丰富的实践·····	220
第四节	信息技术促进了理解性学习方式的变革·····	230
主要参考文献	·····	240
后 记	·····	245

第一章 理解性教学设计概述

第一节 理解与理解性教学

一、引言

20 世纪中叶以来,学校教育改革一直致力于创造一种促进理解的学习环境,它建基于心理学、社会学、文化学、计算机科学以及其他学科的相关研究。研究者通过深入研究儿童的学习,发现传统的教授主义存在着严重的缺陷,仅靠记忆大量的陈述性知识和程序性知识是远远不够的。学习者只有知道何种情境运用何种知识,并能新的情境中对原有知识做出恰当修正,记忆的陈述性知识和程序性知识才是有效的。20 世纪 90 年代以来,“学习经济”和“终身学习”的理念得到了国际组织和各国政府的广泛认同,有效学习的观念发生了变化,教学的中心已经从记忆和勤奋操练转向学生的理解和对知识的运用上。^[1]学习者必须具有对复杂概念的深层次理解能力,并能基于这些理解生成新的观点、新的理论、新的产品和新的知识。当学生能够对复杂概念形成深刻的概念性理解时,他们才能够以一种更加实用而且深刻的方式获取知识,并将所学知识迁移到真实情境。随着国际教育改革的不断推进以及学习科学的创建及发展,理解被广泛认为是教育活动中的一个重要价值。“为理解而教,为理解而学”的“理解性教学”成为当代教育改革的一种重要思潮。

[1] [美]约翰·D·布兰思福特,安·L·布朗,罗德尼·R·科金编著.人是如何学习的——大脑、心理、经验及学校[M].程可拉,孙亚玲,王旭卿译.上海:华东师范大学出版社,2002:1.

在数学教育领域，“理解性教学”已经成为国际数学课程与教学改革的一个重要目标。在美国，第三次国际数学和科学研究（TIMSS）发现，美国的数学和科学课程存在“一英里宽，一英寸深”的问题，一些有影响的数学和科学教育者、研究者将理解性学习强烈推荐给所有学生，并将其反映在全国数学和科学课程及教学的目标和标准中。为此，从1989年《学校数学课程与评价标准》，到1991年《数学教学专业标准》、1995年《学校数学教育的评估标准》，再到2000年《美国学校数学教育的原则和标准》的正式出版，自始至终渗透着“理解性教与学”这一主题。例如，2000年《美国学校数学教育的原则和标准》在教学原则和学习原则部分分别指出，卓有成效的数学教学要求特别注重学生数学理解能力的发展。教师要理解学生知道什么和需要什么，在此基础上利用不同的策略和方法帮助学生更好地学习。学生必须理解地学数学，在经验和先前知识的基础上，积极主动地掌握知识。

我国的数学教育历来重视“双基”教学、解题训练，强调“熟能生巧”。尽管如何正确评价我国数学教育“优”、“劣”仍有待进一步探讨，但是有学者指出，“熟能生巧”中的“巧”，其实质应是理解。^[1]新一轮数学课程改革在总结我国数学教育“得”与“失”的基础上，明确地提出了理解性教学的基本理念。例如，《全日制义务教育数学课程标准》指出，数学教学活动必须建立在学生的认知发展水平和已有知识经验基础之上。教师应激发学生的学习积极性，向学生提供充分从事数学活动的机会，帮助他们真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法，获得广泛的数学活动经验。有效的数学学习活动不能单纯地依赖模仿与记忆，动手实践、自主探索与合作交流是学生学习数学的重要方式。由于学生所处的文化环境、家庭背景和自身思维方式的不同，学生的数学学习活动应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。由此可见，理解性教学已经成为我国数学教育实践的一个基本原则。

在数学教学活动中，虽然广大的数学教育工作者都认为应该注重“理解”这一目标，而且，许多研究和措施的目标也是推行理解性学习的，但是达成这样的目标并非易事。过去30年大量研究一再表明，学生经常知道的要比理解的多。教学总是强调记忆，而不是理解。教科书充满了要求学生记忆的事实，大多数的测验也只是评价学生记忆事实的能力。事实上，人们对目标的价值有执着的信念，但是要把教学设计得能成功地推动理解却是困难的。在数学课程改革进一步向纵深发展的背景

[1] 张奠宙，于波著. 数学教育的“中国道路”[M]. 上海：上海教育出版社，2013：144.

下,研究和实施理解性教学的意义和价值,得到前所未有的彰显。如何促进理解性教学的实施,推动数学教与学方式的变革,是目前亟待解决的重要问题。

二、理解与数学理解

(一) 什么是理解

“理解”是一个多义词。《辞海》解释理解为“了解、领会”,把理解看作是“应用已有知识揭露事物之间联系而认识新事物的过程”。《哲学大辞典》将理解规定为“理性认识活动”,“是认识借助概念,通过分析、比较、概括以及联想、直觉等逻辑或非逻辑的思维方式,领会和把握事物的内部联系、本质及其规律的思维过程”。

其实,理解是一个很难界定的概念,不同的学科以及不同的学派对此会产生截然不同的认识。从哲学的角度看,理解最早起源于对古代文献的注释和解释。后来,哲学家施莱尔马赫把理解看成人类的一种认知方式、一种心理过程。近代,狄尔泰从人的精神生命的高度来认识理解,把理解看成是“确定生活中有意义和价值的东西”。海德格尔第一次从本体论的角度来把握理解,将理解看成是人的存在的基本方式,实现了理解研究的本体论转向。他的学生伽达默尔进一步将理解定义为“视界融合”的过程,即理解者与被理解者相互作用实现双方的视界融合的过程。概言之,哲学视角下对理解内涵的探讨一直归属于哲学解释学的研究视域之中,在经历了对古典经文进行注解和注释的技术观取向、狄尔泰的理解人类历史生活的方法论取向、理解即存在的本体论取向这一发展历程之后,伽达默尔在后期颇具见地地提出了“理解本质上是视界融合”的观点。理解最终被视为人的一种交往实践活动,该观点实质上强调了个人经验与社会知识、历史知识之间的一种循环影响、相互建构的动态变化。

社会学家强调从历史的、社会的、文化的以及自然的真实情境之中探讨理解的内涵。第一,从知识内涵的角度看,知识理解并非是一种纯粹意义上的客观性、绝对性的知识获得,知识作为一种信念特征的社会意象和社会建构,在社会学意义上承载了一种具有相对性内涵的客观性。个体的理解受到社会性的客观知识的中介,而社会性理解则表现出一种对客观世界认识上的群体协约,这种群体协约通过与个体理解的交互,产生循环建构意义的过程。第二,概念与活动情境、共同体文化是

紧密相连的，概念性知识的理解本质上就是要在活动的情境中体悟共同体内部经社会协商的共同体文化。第三，日常文化实践作为一种活动，可视为人在日常生活中的一种“参与”，这种参与，是在日常实践中改变理解的过程，即学习；此时学习被视为“现实世界中的创造性社会实践活动中完整的一部分”，是“对不断变化的实践的理解与参与”。^[1] 莱夫和温格则进一步表明了如下的看法，即社会性的实践对促进理解是极其重要的，实践蕴含了意义和身份的双重建构，这种建构依托于学习者在特定环境下的活动以及对共同体文化的逐步适应，依托于学习者对共同体实践意义的逐步分享及潜在认同。这种社会学视角下的社会建构的循环论观点与前面所述的哲学视角下的视界融合观本质上可谓如出一辙。

认知科学认为，智力活动是基于表征的。所谓表征，主要是指概念、信念、事实、模式等知识结构。认知学科思考理解的框架基于如下一种假设，知识是一种内部表征，而且这些内部表征是有条理的——结构性的。因此，认知科学描述理解的方法是借助于个人的内部表征构成的方式。早期的认知科学强调内部表征对个体理解和意义建构的重要性。例如，根据皮亚杰的观点，当人们遇到并不知晓却需要理解的事物时，他们通过建构自己的表征或自己的经验模型，然后尝试将它融入其已有的知识结构并确定其意义。在皮亚杰看来，理解本质上是一种意义建构，是个体从内部建构对所理解对象的心智表征或知识结构。斯皮罗则进一步指出，为了达到对复杂知识尽可能完整而全面的理解，个体通常需要以多种表征方式同时建构自己的知识，这样才能将所获得的知识联系起来，产生知识的网络。情境认知理论则认为，当我们考察个体的认知活动时，不能忽视外部环境对心智活动所产生的重要影响，知识的获得主要受到应用它的活动、情境和文化的影响。也就是说，知识是分布于它所处的环境之中的，若要建构起对它意义的理解，就必须了解与之有关的所有因素。可以说，情境认知的突出特点是将个体认知、个体的理解置于更大的物理和社会背景以及由文化建构的工具和意义中，用美国心理学家布雷多的话说就是“从聚焦环境中的个人转向环境与人”。简言之，从认知科学的角度看，理解意味着建构一个有关概念、任务或现象的内在心智表征或心智程序，并且这种心智结构越复杂，理解就越有可能发生及深入。理解与意义的形成是个体建构的结果，教学就是为了促进这种意义的建构而设计学习环境。认知建构的观点直接导致了理解性教学理论

[1] 王文静. 人类学视野中的情境学习[J]. 外国中小学教育, 2004(4): 20-23.

和实践的兴起。

在教育领域,理解通常与教学目标、学习方式联系在一起。杜威认为,所谓理解,就是把握住事物的意义。“要理解一事物、一个事件或一种情境的意义,就是要看它同其他事物的关系:指出它的作用或功能,指出它的结果、它的原因以及如何利用它。”^[1]在杜威看来,理解的本质就是建立联系,“理智的进步就在于直接理解和间接理解的有规律的循环运动”。布卢姆第一次注意到理解对于教学目标的重要性。尽管他在《教育目标分类学》中没有明确地提出“理解”水平,但处于认知目标第二水平的“领会”相当于“理解”。随着对教育目标分类研究的深入,安德森等人对布卢姆的认知目标的“一维”体系进行了修正,提出了认知目标的“二维”模型。其主要特征是把认知目标分为两个维度:一个是“知识”,另一个是“认知过程”。根据安德森的观点,认知过程从低到高可分为六个水平:记忆、理解、运用、分析、评价、创造。在这里,“理解”是从属于认知过程维度的,与其他五个水平一起构成了认知维度的连续统一体。如果教学目标旨在促进迁移,那么,所涉及的认知过程就是从“理解”到“创造”,“理解”处于实现迁移目标的基础性位置,“是中小学和大学强调的以迁移为基础的教育目标中的最大的一个类目”。^[2]

在教学实践层面上,美国哥伦比亚大学教授威金斯对理解的认识极富特色。他在与麦克泰合著的《理解力培养与课程设计》一书中指出,了解事实并且为测验所证明,并不意味着我们实现了理解,对知识的理解和准确的知识之间存在着重大区别。理解是一种需要投入时间及进行实践的工作,最终的结果也不简单归结为理解与不理解,其程度也会游移于一定范围之内。理解表现为从简单到复杂的连续性,而不仅仅局限于准确和错误之分,对其内涵进行理解,重点在于深入下去,体会其中的细微差别。实现理解不仅意味着依靠它掌握更为困难的知识,而且意味着培养了一种适应不同环境与条件的能力。在威金斯看来,理解涉及程度问题,它拥有多重意义并且有多种多样的外在表现。根据威金斯的观点,作为名词的“理解”,与“洞察力”、“智慧”具有相同的意义,表现出与知识有关联但又不同于知识的内涵。作为动词的“理解”,与你能够对一事物进行解释、验证与应用,或者能够读出

[1] [美]约翰·杜威著.我们怎样思维·经验与教育[M].姜文闵译.北京:人民教育出版社,2005:118.

[2] [美]J.L.W·安德森等编著.学习、教学和评估的分类学[M].皮连生主译.上海:华东师范大学出版社,2008:62.

字面以外的意义有关。简言之，理解除了具有智力的含义之外，还具有“思维的转换”，或“心灵的转换”等内涵。转换意味着一种能创造性地、灵活地、流畅地在不同的问题情境中适应自身所具有的知识的能力。也就是说，理解表现为能看到知识之间的联系，并能超越问题所给的信息。按照威金斯的描述，理解的表现包含以下六种不同的形式。^[1]第一，解释——能对现象、事实和数据进行全面、可靠和合理的解释说明。第二，释译——能够揭示故事的意义、进行恰当的翻译，对于所涉及的观点发表自己的看法，通过想象、轶事、例证和模型使以上观点个性化并易于为人所接受。第三，运用——能将所学的知识有效地运用于不同的环境之中。第四，洞察——能用批判的眼光看待事物，并顾全大局。第五，移情——能从别人可能认为陌生或悖于情理的东西中体会到其价值所在，具备敏锐的直观性洞察力。第六，自我认识——一个人身上的某些特质如个人风格、偏见、构想及思维习惯等，它们对理解的实现可能起促进作用，也可能起阻碍作用。对此，个人应该能够明确地认识到：在哪些方面自己还未能理解并知道原因之所在。威金斯指出，理解有不同的表现形式，这些形式之间彼此相互独立又相互交融。理解的这种复杂性决定了我们在教学和评定学生的理解时，应该运用不同的标准。真正的理解或者深刻的理解应该是包含以上六种不同形式、不同程度的理解表现。在教育实践或教学活动中，威金斯关于理解的解读为我们思考教学提供了理论和实践的参照。

（二）什么是数学理解

“数学理解”的含义不同于一般的“理解”，它包含对数学对象及其有关数学知识的理解。目前，关于什么是数学理解有三种代表性的观点，即网络联系说、表征转化说、类型层次说。

1. 数学理解的网络联系说

在数学学习过程中，为了思考数学的概念和进行交流，就需要以某种方式作出表征。所谓外部表征是指概念的口头语言表征、书面符号表征、图像表征、实物表征。所谓内部表征是指概念的心理表征，即在长时记忆或者工作记忆中对信息储存和再现的方式。外部表征、内部表征及其两者之间不是独立的，它们存在着一些联

[1] [美]威金斯，麦克泰著，理解力培养与课程设计[M]，么加利译，北京：中国轻工业出版社，2003：74.

系,相应的外部表征之间建立联系能激发内部表征之间建立联系;在内部表征与内部表征之间、外部表征与外部表征之间可以建立联系。具体说来,外部表征之间建立联系的方式有两种:口头语言、书面符号、图像、实物这些不同表征形式可以基于相似性和差异性建立联系。相同的表征形式可以基于系统内的模式和规则建立联系。内部表征之间建立联系的方式也有两种:一种是垂直的层级网,一些更具包容性的表征把其他表征归到它这一类。另一种是蛛网,结点是被表征的信息(概念),连线就是它们之间的联系或者关系。

所谓数学理解,是指“一个数学的概念、方法或者事实是被理解了,如果它是内部表征网络的一部分”。具体说来,学习一个数学概念、原理、法则,如果能够心理上组织起适当、有效的认知结构,并使之成为个人内部知识网络的一部分,就说我们理解了这些知识,即理解是建立新知识与已有知识之间的联系。理解的发展意味着认知主体头脑中网络的变大或者组织得更加完善。变大指的是网络量的增加,组织得更完善指的是结构的改变。因而,网络的组织方式亦即理解的增长方式有两种:一是量的增加,即把新的数学事实、方法联系到现有的网络上去。二是网络结构的重新组织,旧的结构被改造、包含,或者被放弃,新的结构得以形成。理解意味着网络的重新组织,产生更加丰富、更具包容性的网络结构。学习分数的加法时,就必须改变关于整数加法的网络结构,才能形成对分数加法的理解。量的增加相对容易,而结构的改变往往会带来学习上的较大困难。

评价理解本身是比较困难的,既然理解意味着知识之间的联系,因而,可以通过确定知识是怎样联系在一起的来评价理解。其一,评价符号和符号程序与表征物之间的联系。例如,可以要求学生用合适的实物表征来证实符号程序的合理性,然后要求他们来解释符号程序是怎样与作用在实物上的行动相一致的。其二,评价符号程序与非正式的问题解决程序之间的联系。例如,可以这样来评价书面符号和直观知识之间的联系:在情境中提出可能引出不同答案的问题,然后让学生讨论这些答案之间的联系。其三,评价符号系统内部之间的联系。以上评价理解的方式事实上就是通过评价表征之间的联系来评价理解的,从而也就与下面所介绍的表征转化说在本质上是是一致的。

2. 数学理解的表征转化说

表征既指过程,又指结果。换句话说,是指用某种形式表达数学概念或关系的

行为，也指形式本身。有些表征方式，如图、图像显示、符号表达式，一直是学校数学的一部分。在帮助学生理解数学概念和关系时，在交流数学方法、推理及理解自己和他人的观点时，在学习数学概念间的相互关系时，以及通过建模把数学应用到现实问题情境中去时，我们都应把表征作为一个关键因素来对待。^[1]表征对于理解和应用数学的知识非常关键。表征本身不是教学目标，相反，表征应被视为帮助建立理解的有力工具、作为交流信息的工具以及作为展示推理的工具。

正如希尔伯特所言，人们为了思考数学概念和进行交流，就要对这些东西作出表征。一个人怎么能感受一个本质上抽象的数呢？答案是，不可能。但是，可以感受它的表征。因此，表征是发展数学理解和定量思考的关键要素。没有表征，数学对大多数人而言将是非常抽象的、形而上的和不可理解的。有了数学的表征，数学的概念和思想就可以被描摹，重要的联系就可以得到阐述，通过细心的教育、适当的感受和观察，理解就能够得到培养和促进。也就是说，对数学的表征成为获得、促进理解的抓手、切入点。

布鲁纳认为，在人类的智慧生长期，有三种表征系统在起作用，即动作表征、表象表征和符号表征。也就是人类通过动作、表象以及各种符号来认识事物。一个人可以在三个不同的水平上，即动作、表象、符号，体验并思考一个特别的思想或者概念。学生获得一个数学概念的过程是以线性方式从动作表征过渡到图像表征，最后到抽象思考。在动作表征中，学生的思维必须借助于实物或具体的实际操作活动来达成；表象表征是当具体实物消失时，依据头脑中的实物影像，自己制作心像而进行内在的思维活动；而达到抽象思考的活动阶段的学生则能够直接对数学符号进行思维操作。

莱什将布鲁纳的动作、表象和符号表征的思维活动以线性方式发展修正为平面网络状式的互动发展，从而提出数学理解的五种表征：实际情境、图像、操作、口语符号、书写符号。莱什认为，数学理解，除了布鲁纳的表征理论强调的在深度上的提升外，加强广度的学习也有助于深度的提升。因此，他增加了实物情境和口语符号两种表征，并且强调各种表征之内和表征之间的转换。

要实现表征之间的转换，学生就必须理解包含在给定的表征方式之中的概念。

[1] 全美数学教师理事会著，美国学校数学教育的原则和标准[S]，蔡金法等译，北京：人民教育出版社，2004：65。

而为了用其他的表征方式来表征它,就必须重新解释这个概念。如果不理解这些概念,要实现表征方式之间的转化是不可能的。正是实现在同一表征方式之间或不同表征方式之间的转化,才使得学生获得了要学习的数学概念的意义,亦即获得对要学习的数学概念的理解。理解就是用不同的表征方式表征数学概念、并实现表征方式相互转化的能力。对于学生而言,表征概念的能力预示着他们问题解决、证明和解释任务时的表现。换句话说,表征加深了学生对学科知识在认识水平、问题解决水平和概念水平上的理解。表征转化模型表明,对数学概念的深入理解,需要经历不同的表征方式,要能够建立这些表征方式之间的联系。表征之间的转化需要从用一种表征方式来解释概念转化到用另一种表征方式来重新解释概念,这种转化和相关的智力活动反映了教与学的动态过程。这正符合现代认知理论的观点:学生必须通过积极加入到与周围的环境和他人的互动中,来建构自己的概念。在不同的表征方式之间的转化需要对一些概念进行重新解释和重新建构,正是通过重新解释和建构,学生获得新的见识,强化了目前的概念,导致对目前正在思考的观念的深刻理解。

理解的网络联系说,也是首先从对数学的表征入手,提出了不同的表征方式,并认为这些表征之间是有一定联系的,所谓理解就是能够建立起这些联系,而对理解的评价也就是对三种联系的评价。这三种联系在本质上而言,就是表征之间的联系,就是表征之间的转化。也就是说,理解的网络联系说与理解的表征转化说,在本质上是相通的。在数学教学实践中,理解的表征转化说更具有可操作性。

理解的表征转化说与奥苏贝尔的意义学习理论是一致的:意义学习的实质就是建立新知识与认知结构的实质性与非人为的联系。怎样说明建立了这种联系呢?就是换一种方式来检验所学的知识。换一种方式即换一种表征方式,就是实现表征之间的转化。

3. 数学理解的类型层次说

数学家与数学教育家从数学知识的特征出发,对理解进行了分类和阐述。弗赖登塔尔认为,在分析教师和学生关于某一数学主题的知识时,可以从三个维度来考虑:算法的维度、直觉的维度、形式的维度。算法的维度本质上是一些程序和方法,包括数学规则和运算法则。直觉的维度,包括对数学的信念和用来表征数与运算的心理模型。形式的维度涉及公理、定义、定理与证明。在知识获得和问题解决过程中,知识的这三个维度是相互合作的,而不是分离的。学生关于某一知识的这三个

维度是不一致的、分离的，这就导致错误的认识、认知障碍和对算法的不正确使用。知识的不同维度为我们分析对运算知识的理解提供了参考。亦即我们可以从以上三个方面来分析对数的运算的理解。

斯根普提出事物理解有两种模式：工具性理解和关系性理解。所谓工具性理解，是指一种语义性理解符号 A 所指代的事物是什么，或者一种程序性理解，一个规则 R 所指定的每一个步骤是什么，如何操作。关系性理解则还需加上对符号意义和替代物本身结构上的认识，获得符号指代物意义的途径，以及规则本身有效性的逻辑依据等等。斯根普认为，学生在学习新的数学概念或数学公式时由于对代表学习对象的符号形式不熟悉，尤其是由一些不常见的字母或复杂形态所示的符号，往往把注意力集中于对符号本身含义的描述，而不是它的指代物的意义上，即所从事的是促进工具性理解形成的活动。实际教学中这些活动的结果又往往被视为理解的标志，一些学生在学长方形的面积公式时不理解公式的意义，教师便解释公式的意思，要想得到一个长方形的面积，只要把它的长度与宽度相乘就可以了。学生便认为已经理解了面积公式的意义，而且他随后的工作就是去做一系列类似的练习题，问题的变化至多体现在复杂程度上。当一个学生做练习都能获得正确答案时，我们就认为他已经完全掌握和理解了这个公式。类似的情况在除法被理解为颠倒相乘和移项改号的学习活动中，时常可见。换言之，对概念或法则的理解在这里被定位于工具性理解。斯根普还进一步指出，学生若使用常规的、自己熟悉的思考方式或法则，就能够解决所面临的问题，则他们通常不会去尝试理解超越这些规则的东西，尤其对那些认为知识学习的目的就在于获得一种在类似情境中解决问题的技能的学生来说，这种对理解的定位是非常强烈的。显然，就对概念或法则的学习过程而言，工具性理解应当是其中一个重要的，甚至是不可缺少的环节。例如，个体在学习一个新的对象时，首先是把该对象与代表它的符号视为等同的，这就属于工具性理解的学习活动。而随后对符号本身的操作，包括对它的替代物学习对象的识别，以及对符号本身的运算等，基本上都没有超出工具性理解活动的范畴。传统的定义、定理、实例、练习、习题的数学教学模式所表现出来的对于理解的定位就是工具性理解。要想达到关系性理解，显然还需要让学生从事其他类型的数学学习活动。就数学知识的学习而言，斯根普明确指出，更多的理解应当定位于关系性理解，即最终我们应当让学生获得的是关系性理解。

鉴于斯根普的理解模型没有考虑到在数学内容和它的表征之间作出明确的区分,在斯根普的基础上,研究者提出了理解的四个类型,并进而建构了理解的四面体模型。

直观理解。在这个水平上,学生的推理基于形象化的感知,学生常常通过他们的行为来表达他们的思维。直观的理解水平是通过非形式的知识来表明的,这些知识是由前概念来刻画的。前概念指一类基于形象化感知的思维、最初的非数量化的行为。例如,对于“加”就是把两堆物体合在一起。

程序理解。程序理解是通过程序即解决问题的方法、步骤的获得来表明的。这些程序通过协调直观知识和先决条件,为系统化提供了工具。这样一种系统化必将最终产生解决问题的程序,它摆脱了形象化的感知。例如,“加”就是对合在一起的物体从“1”开始数数。

抽象理解。最初,所获得的是程序,概念是与程序混在一起的,是模糊不清的。渐渐的,概念与程序逐渐分离,概念的轮廓越来越清晰,并获得存在。这就是第三个水平的理解:抽象。抽象是由两个阶段构成的,一是概念同程序分离,这种抽象是通过选择合适的解决问题的程序来表示的;二是不变量的构建,这种抽象是通过概念的一般化,或者反映数学对象的不变性,或者数学变换的可逆性、协调性来表明的。

形式理解。形式理解是通过对符号的使用,或者对运算的逻辑证实、或者对公理的发现来表明的。形式理解必须以先前的抽象理解为基础。

上述三种数学理解观,有许多相似之处:都以认知心理学作为自己的理论前提,都认为理解是一个复杂的过程,理解并非是按照线性顺序发展的,而是一个动态的行进过程,是一个有着丰富内涵、多个侧面、多种成分的交互作用过程。相对于理解的网络联系说,理解的表征转化说,理解的类型层次说对理解进行了比较明确的界定,因而在实际教学活动中,具有较大的可操作性。

(三) 数学理解是如何发生的

理解是一个十分复杂的概念,它不是非此即彼的事实,也不是有或无的现象,它一直在变化和生长。研究表明,下列五种心智活动将有助于数学理解的产生:构建关系、拓展和应用数学知识、反思经验、表达和交流、拥有数学知识。^[1]

[1] Fennema E, Romberg T A. Mathematics classroom that promote understanding[M]. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1999: 24.