



全国高等农林院校“十三五”规划教材

# 高等数学

刘长文 张超 / 主编

第三版

 中国农业出版社

全国高等农林院校“十三五”规划教材  
2014年全国高等农业院校优秀教材

# 高等数学

第三版

刘长文 张超 主编

中国农业出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 刘长文, 张超主编. —3 版. —北京:  
中国农业出版社, 2017. 5  
全国高等农林院校“十三五”规划教材  
ISBN 978-7-109-21433-0

I. ①高… II. ①刘… ②张… III. ①高等数学-高  
等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 042854 号

中国农业出版社出版  
(北京市朝阳区麦子店街 18 号楼)  
(邮政编码 100125)  
策划编辑 魏明龙  
文字编辑 魏明龙

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行  
2004 年 8 月第 1 版 2017 年 5 月第 3 版  
2017 年 5 月第 3 版北京第 1 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 20.25  
字数: 480 千字  
定价: 38.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

# 内 容 提 要

本教材为全国高等农林院校“十三五”规划教材。

本教材共分九章,包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,微分方程与差分方程,空间解析几何简介,多元函数微积分,无穷级数。为便于学生复习总结和自我测试,每章后附有本章重要概念与公式的小结和自测题。另外,本教材适量增加了高等数学在经济管理等领域的应用。书后附有积分表,极坐标与参数方程,各章习题及自测题的参考答案等内容。

本教材的特点是知识结构合理,主次分明,语言简练,通俗易懂;内容阐述清晰明确,循序渐进,便于教学;例题选取难易适度且有助于加深对基本概念的理解和计算方法的掌握;强调数学方法与其他学科的相互联系,增强应用数学方法的意识,为后继课程的学习打好数学基础。

各章节中打有“\*”号的内容和习题是对数学基础要求较高的专业编写的,可作为选学内容或供学有余力的学生提高使用。

本教材既可以作为高等农林和经济管理类院校本、专科(高职)的高等数学课程的教材,也可作为各类成人教育相应课程的教材,还可作为考研阶段的复习参考书。

## 第三版编者

主 编 刘长文 张 超

副主编 王希超 徐胜荣 毛绪平 王俊美

编写人员 (按姓氏笔画排序)

王希超 王学蕾 王俊美 公 艳

毛绪平 孔德洲 吕 军 刘长文

朱柘琍 时彬彬 张 超 张 瑜

徐胜荣

## 第三版前言

本教材自出版以来，得到了使用者的广泛好评，第一版获“2005年全国高等农业院校优秀教材”，第二版获“2014年全国高等农业院校优秀教材”。

本次修订，是在第二版的基础上，做了适当调整。在内容取舍方面，以面向农林、经济类专业的需要和科技发展的需求为原则，舍弃了部分难度较大而应用很少的传统微积分内容。为便于本教材相关内容的教学，在体系编排方面，一方面注意突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点，另一方面尽可能对体系作合理优化，避免繁琐雷同的推证；逻辑推理及证明尽可能做到适可而止（标有\*号内容供阅读参考）；在习题的选配方面，删减了一些较难且不适用的例题和习题，同时为适应各类学生学习的需求，在例题、习题及自测题中进一步增加了近年来相关的考研试题。为了改变传统数学教材在许多非数学专业大学生的心目中只是一堆枯燥无味的公式这种印象，编写时对内容作了适当调整变动，使得本教材更加注重概念和定理的直观描述与实际背景的介绍，更加强调理论联系实际。同时为了便于读者进行阶段性复习，每章末对该章主要内容作了归纳小结，并给出了自测试题。

另外，为了帮助初学者尽快掌握本课程的学习方法，编者倾注了极大的热情，在导学中详述了几十年积淀的行之有效的学习方法。

本教材既可以作为高等农林和经济管理类院校本、专科（高职）的高等数学课程的教材，也可作为各类成人教育相应课程的教材，还可作为考研阶段的复习参考书。

参加第二版修订的人员有：刘长文、杨逢建任主编，副主编由王希超、张超龙、郝建民、袁星担任，参加编写的人员还有公艳、王晶、王俊美、孔德洲、张超、苗新艳。参加第三版修订的人员有：刘长文、张超任主编，副主编由王希超、徐胜荣、毛绪平、王俊美担任，参加编写的人员还有王学蕾、公艳、孔德洲、吕军、朱柘琍、时彬彬、张瑜。

最后，对各编写单位特别是山东农业大学数学与信息科学系的大力支持，表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中错漏之处在所难免，恳请读者特别是使用本教材的教师批评指正，以便本教材在今后教学实践的基础上得以进一步完善。

编者

2016年6月

# 第一版前言

我们根据高等农业院校高等数学课程教学大纲所规定的教学内容和基本要求，精心组织编写了这本全国高等农业院校“十五”规划教材。

本教材在内容取舍方面，以面向农林、经济类专业的需要和科技发展的需求为原则，舍弃了部分难度较大而应用很少的传统微积分内容，增加了数学建模和经济应用等知识。在体系编排方面，一方面注意突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点，另一方面尽可能对体系做合理优化，避免繁琐雷同的推证，逻辑推理及证明尽可能做到适可而止（标有\*号的内容供阅读参考）。在习题的选配方面，各节精选了一些概念性较强、方法有代表性、难度适中的练习题。为了改变传统数学教材在许多非数学专业大学生的心目中只是一堆枯燥无味的无用的公式这种由来已久的形象，编写时注重概念与定理的直观描述与实际背景的介绍，强调理论联系实际。为了便于读者进行阶段性复习，每章末对该章主要内容做了归纳小结，并给出了自测试题。

另外，为了帮助初学者尽快掌握本课程的学习方法，作者倾注了极大的热情，在导学中详述了几十年积淀的行之有效的学习方法。

本书既可以作为高等农林和经济管理类院校本、专科（高职）的高等数学课程的教材，也可作为各类成人教育相应课程的教材，还可作为农业科技人员的参考书。

参加本教材编写的单位和作者有，山东农业大学：刘长文（第三章）、王希超（第六章）、王孝莹（第十章）；仲恺农业技术学院：杨逢建、贺铁山（共同编写第七、八章）；西南农业大学：廖霞（第一章）；新疆农业大学：袁星（第二章）；甘肃农业大学：王万雄（第四章）；内蒙古农业大学：吕雄（第五章）；北华大学农业技术学院：杜凤娥（第九章）。由刘长文负责前五章，杨逢建负责后五章的统稿，最后由刘长文和杨逢建统一定稿。

最后，对上述参编单位，特别是山东农业大学信息与计算机科学系的大力支持，表示衷心感谢。



由于编者水平所限，书中错漏之处在所难免，恳请读者特别是使用本教材的教师批评指正，以便使本教材在今后教学实践的基础上得以完善。

编者

2004年6月

# 目 录

第三版前言

第一版前言

导学 ..... 1

第一章 函数、极限与连续 ..... 4

§ 1.1 函数 ..... 4

一、函数的概念 ..... 4

二、函数的几种特性 ..... 6

三、初等函数 ..... 7

习题 1-1 ..... 9

§ 1.2 极限 ..... 10

一、数列的极限 ..... 10

二、函数的极限 ..... 12

三、函数的左右极限 ..... 15

四、极限的保号性 ..... 16

习题 1-2 ..... 16

§ 1.3 无穷小与无穷大 ..... 17

一、无穷小 ..... 17

二、无穷大 ..... 18

三、极限的四则运算 ..... 19

四、极限存在的两个准则与两个重要极限 ..... 22

五、无穷小的比较 ..... 26

习题 1-3 ..... 29

§ 1.4 函数的连续性 ..... 31

一、函数的连续性 ..... 31

二、函数的间断点及其分类 ..... 32

三、初等函数的连续性 ..... 33

四、闭区间上连续函数的性质 ..... 35

习题 1-4 ..... 35

重要概念与公式 ..... 36

自测题一 ..... 37

第二章 导数与微分 ..... 39

§ 2.1 导数的概念 ..... 39

一、引例 .....	39
二、导数的定义 .....	40
三、导数的几何意义 .....	42
四、可导与连续的关系 .....	42
习题 2-1 .....	43
§ 2.2 几个初等函数的导数 .....	44
习题 2-2 .....	45
§ 2.3 函数的求导法则及基本导数公式 .....	46
一、函数的和、差、积、商的求导法则 .....	46
二、反函数的导数 .....	47
三、复合函数的导数 .....	48
四、基本导数公式与求导法则 .....	50
习题 2-3 .....	51
§ 2.4 隐函数与由参数方程所确定的函数的导数 .....	52
一、隐函数的导数 .....	52
二、对数求导法 .....	53
三、由参数方程所确定的函数的导数 .....	54
习题 2-4 .....	54
§ 2.5 高阶导数 .....	55
习题 2-5 .....	57
§ 2.6 函数的微分 .....	58
一、微分的概念 .....	58
二、微分的几何意义 .....	59
三、微分的运算与一阶微分形式的不变性 .....	60
四、微分在近似计算中的应用 .....	61
习题 2-6 .....	62
重要概念与公式 .....	63
自测题二 .....	64
<b>第三章 微分中值定理与导数的应用</b> .....	<b>66</b>
§ 3.1 微分中值定理 .....	66
习题 3-1 .....	69
§ 3.2 洛必达法则 .....	69
习题 3-2 .....	72
§ 3.3 泰勒公式 .....	73
一、泰勒公式 .....	73
二、麦克劳林公式 .....	74
习题 3-3 .....	76
§ 3.4 函数的单调性、极值 .....	76
一、函数单调性的判别法 .....	76
二、函数的极值 .....	78

三、函数的最大值与最小值 .....	80
习题 3-4 .....	81
§ 3.5 曲线的作图 .....	82
一、曲线的凹凸性与拐点 .....	82
二、曲线的渐近线 .....	83
三、曲线的作图 .....	84
习题 3-5 .....	86
* § 3.6 导数在经济管理中的应用 .....	86
一、经济管理中的函数模型 .....	86
二、边际分析 .....	88
三、弹性分析 .....	89
习题 3-6 .....	90
重要概念与公式 .....	91
自测题三 .....	91
<b>第四章 不定积分</b> .....	<b>93</b>
§ 4.1 原函数与不定积分的概念 .....	93
一、原函数与不定积分的概念 .....	93
二、不定积分的基本性质 .....	94
三、基本积分表 .....	95
四、直接积分法 .....	96
习题 4-1 .....	98
§ 4.2 换元积分法 .....	99
一、第一类换元法 .....	99
二、第二类换元法 .....	102
习题 4-2 .....	106
§ 4.3 分部积分法 .....	106
习题 4-3 .....	111
§ 4.4 几种特殊类型的积分 .....	111
一、有理函数的积分 .....	111
二、三角函数有理式的积分 .....	115
三、简单无理函数的积分 .....	116
习题 4-4 .....	118
重要概念与公式 .....	119
自测题四 .....	119
<b>第五章 定积分</b> .....	<b>121</b>
§ 5.1 定积分的概念与性质 .....	121
一、定积分问题举例 .....	121
二、定积分的定义 .....	122
三、定积分的几何意义 .....	124

四、定积分的性质 .....	125
习题 5-1 .....	127
§ 5.2 微积分基本公式 .....	127
一、变上限的定积分 .....	127
二、微积分基本公式 .....	128
习题 5-2 .....	131
§ 5.3 定积分的换元积分法和分部积分法 .....	132
一、换元积分法 .....	133
二、分部积分法 .....	135
习题 5-3 .....	137
* § 5.4 定积分的近似计算 .....	138
一、矩形法 .....	138
二、梯形法 .....	139
三、抛物线法 .....	139
习题 5-4 .....	142
§ 5.5 广义积分 .....	142
一、无穷区间上的广义积分 .....	142
二、无界函数的广义积分 .....	143
三、 $\Gamma$ 函数 .....	145
习题 5-5 .....	146
§ 5.6 定积分的应用 .....	146
一、元素法 .....	147
二、几何应用 .....	147
* 三、定积分在物理学中的应用 .....	153
四、平均值 .....	156
* 五、定积分在经济管理中的应用 .....	158
习题 5-6 .....	161
重要概念与公式 .....	163
自测题五 .....	165
<b>第六章 微分方程与差分方程 .....</b>	<b>167</b>
§ 6.1 微分方程的基本概念 .....	167
习题 6-1 .....	169
§ 6.2 一阶微分方程 .....	169
一、可分离变量的微分方程 .....	169
二、齐次方程 .....	171
三、线性方程及伯努利方程 .....	173
习题 6-2 .....	176
§ 6.3 可降阶的高阶微分方程 .....	177
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程 .....	177
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 .....	177
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程 .....	178

习题 6-3 .....	179
§ 6.4 二阶常系数线性微分方程 .....	179
一、二阶常系数齐次线性微分方程 .....	180
二、二阶常系数非齐次线性微分方程 .....	182
习题 6-4 .....	185
* § 6.5 差分方程 .....	185
一、差分与差分方程的概念 .....	186
二、一阶与二阶常系数线性差分方程的特征方程解法 .....	187
习题 6-5 .....	189
§ 6.6 微分方程与差分方程的应用举例 .....	190
重要概念与公式 .....	193
自测题六 .....	194
<b>第七章 空间解析几何简介</b> .....	<b>196</b>
§ 7.1 空间直角坐标系 .....	196
一、空间直角坐标系 .....	196
二、空间两点间的距离 .....	197
习题 7-1 .....	197
§ 7.2 曲面及其方程 .....	197
一、曲面方程的概念 .....	197
二、柱面 .....	198
三、旋转曲面 .....	199
习题 7-2 .....	200
§ 7.3 空间平面与空间曲线 .....	200
一、空间平面及其方程 .....	200
二、空间曲线及其方程 .....	202
习题 7-3 .....	202
§ 7.4 常用的二次曲面 .....	202
习题 7-4 .....	203
自测题七 .....	203
<b>第八章 多元函数微积分</b> .....	<b>205</b>
§ 8.1 多元函数 .....	205
一、区域 .....	205
二、多元函数的概念 .....	205
三、二元函数的极限 .....	207
四、二元函数的连续性 .....	208
习题 8-1 .....	209
§ 8.2 偏导数 .....	209
一、一阶偏导数 .....	209
二、高阶偏导数 .....	211

习题 8-2 .....	212
§ 8.3 全微分 .....	213
一、全微分的概念与性质 .....	213
* 二、全微分在近似计算中的应用 .....	215
习题 8-3 .....	216
§ 8.4 多元函数的求导法则 .....	216
一、多元复合函数的求导法则 .....	216
二、一阶全微分形式的不变性 .....	219
三、隐函数的导数 .....	219
习题 8-4 .....	222
§ 8.5 多元函数的极值 .....	222
一、二元函数的极值和最大、最小值 .....	223
二、条件极值与拉格朗日乘法 .....	226
* 三、最小二乘法 .....	229
习题 8-5 .....	231
§ 8.6 二重积分 .....	232
一、二重积分的概念与性质 .....	232
二、利用直角坐标计算二重积分 .....	235
三、利用极坐标计算二重积分 .....	239
习题 8-6 .....	242
重要概念与公式 .....	244
自测题八 .....	245
<b>第九章 无穷级数</b> .....	<b>247</b>
§ 9.1 常数项级数 .....	247
一、常数项级数的概念 .....	247
二、常数项级数的性质 .....	248
习题 9-1 .....	250
§ 9.2 正项级数及其审敛法 .....	250
习题 9-2 .....	253
§ 9.3 任意项级数及其审敛法 .....	254
一、交错级数及其审敛法 .....	254
二、绝对收敛与条件收敛 .....	255
习题 9-3 .....	256
§ 9.4 幂级数 .....	256
一、函数项级数的概念 .....	256
二、幂级数及其收敛区间 .....	257
三、幂级数的基本性质 .....	259
习题 9-4 .....	260
§ 9.5 函数展开成幂级数 .....	261
一、泰勒级数 .....	261

---

二、函数展开成幂级数 .....	263
* 三、幂级数的应用 .....	265
习题 9-5 .....	266
重要概念与公式 .....	267
自测题九 .....	268
附录一 积分表 .....	270
附录二 极坐标与参数方程 .....	280
附录三 习题参考答案 .....	283
参考文献 .....	307



# 导 学

高等数学的主要内容是微积分，微积分是其他数学课程的基础和先导，是未来所学后继课程的基础。高等数学的鲜明特点是：高度的抽象思维，严密的逻辑推理，严谨的研究论证，巧妙的计算方法。学习高等数学对开发智力、培养能力、提高素质起着不可估量的推动作用。学习高等数学的两大难关是学懂难、会用更难。

怎样才能学好高等数学？首先要有一个强烈的求知愿望和勤奋刻苦的学习精神，其次掌握科学的学习方法也是非常重要的。

学习高等数学，主要是通过课本来进行的，所以有必要弄清课本中各知识板块的体系结构。不难发现，数学课本的每个单元，大致由四部分内容组成：（一）本单元提出的主要问题（实际问题或理论问题）是什么？（二）解决问题的主要思路和方法是什么？（三）得出的主要结果及导出的相应结论是什么？（四）这些结果、结论如何应用？学习高等数学，就是要千方百计弄清楚上述问题，从中掌握知识、学到方法、培养能力、提升水平，从而为后继课程的学习及以后的考研打下坚实的基础。

学习高等数学，主要是通过预习、听课、复习、作业及总复习等步骤来完成的，也就是说，要通过以上五步，达到掌握知识、学到方法、培养能力，实现“学懂”、并且“会用”的目的。

## 一、预习法

高等数学内容多、学时少、进度快、信息量大且难于理解，所以课前预习是十分必要的。在听课之前，对老师要讲的内容要做到心中有数，就需要预习。预习时看书要尽量细，将其中比较简单的、能看懂的部分先搞清楚，暂时看不懂的部分，要做记号，留待听课时重点解决；如果时间允许，可试做一部分例题及习题，以减轻听课时的负担，使学习处于主动状态。上课时集中全力去听重点、难点内容，深入理解其思想和方法，从而全面掌握这些内容。长期坚持预习，养成习惯，自学能力也会不断提高，久而久之，对于其他课程来说，即使不用听讲，自己也可以通过看书获取知识了。这对将来的工作、学习是非常重要的。

## 二、听课法

听课是在校学生学习高等数学的最重要的环节。教师在课堂上全面系统地讲授教学内容的同时，也给学生提供了大量及时解决疑难问题的最好机会。作为学生，首先，要在预习的基础上，“带着问题听课”。在预习的过程中，有些问题已经弄懂；有些问题虽有一定程度的理解，但理解尚不深刻全面，甚至会有偏差；有些问题一点也不懂。带着这些问题进入课堂，课还未上，就有通过听课解决问题的急切心情，这种意识必然会提高听课效率，收到事半功倍的效果。其次，要紧紧围绕教学内容听课、听问题、听解决问题的思路和方法、听结