高等学校教材

高等数学学习指南

钟仪华　谢祥俊 ◎ 主编

石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高等学校教材

高等数学学习指南

钟仪华　谢祥俊　主编

石油工业出版社

内 容 提 要

本书共九章,包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,积分学的应用,无穷级数. 每章内容均具有基础性、综合性与代表性,为教学中的重难点和学生学习中的易混点,旨在帮助学生巩固并深入理解基本概念、基本性质,掌握基本方法. 全书按照循序渐进、由浅入深的原则合理安排,既注重基础也重视方法,强调学生数学思维能力的培养和提高以及数学素养的拓展训练,强化了创新意识和能力的训练及培养.

本书以对数学有不同要求的一般工科院校的本科生为主要对象,也可供有关教师和高年级本科学生作为教学和考研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指南/钟仪华,谢祥俊主编. —北京:石油工业出版社,2017.8

高等学校教材

ISBN 978-7-5183-1798-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①钟…②谢… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第030100号

出版发行:石油工业出版社

(北京市朝阳区安华里2区1号楼 100011)

网 址:www.petropub.com

编辑部:(010)64523579 图书营销中心:(010)64523633

经 销:全国新华书店

排 版:北京市密东股份有限公司

印 刷:北京中石油彩色印刷有限责任公司

2017年8月第1版 2017年8月第1次印刷

787毫米×1092毫米 开本:1/16 印张:29

字数:742千字

定价:49.90元

(如发现印装质量问题,我社图书营销中心负责调换)

前　言

由西南石油大学理学院谢祥俊、涂道兴等老师编写的讲义《数学基础知识与综合提高学习辅导(高等数学)》已经在校使用了多年，受益学生几万人.学生取得包括全国大学生数学竞赛、全国大学生数学建模竞赛在内的国家级奖项二十余项、省级奖项四十余项，人才培养效果得到极大提升.

《高等数学学习指南》是在此讲义的基础上，结合四川省高等教育人才培养质量和教学改革项目“多元化人才培养模式下的大学数学系列课程改革与实践”的成果，由数学学科十位老师共同编写完成的，是教改组和数学学科老师集体智慧的结晶.

本书共分九章，每章又分为教学大纲及知识结构图，内容提要(基本概念、基本性质、基本方法和典型方法)，典型例题(基本题型、综合题型)，数学文化拾趣园(数学家趣闻轶事、数学思维与发现)，数学实践训练营(数学实验及软件使用、建模案例分析)，考研加油站(考研大纲解读、典型真题解答及思考)，自我训练与提高(数学术语的英语表述、习题与测验题)七个部分.其中“教学大纲及知识结构图”和“内容提要”是为读者进行复习而设计的，它包括了本章的学时分配、目的要求和重难点，基本概念、主要定理、基本公式及其之间的联系；“典型例题”是本书的主体，精选了各类基本题和综合提高题，并通过分析或说明的方式对典型例题进行分析、归纳和总结，特别是一题多解，使读者掌握各类题目的解题思路、方法和步骤，力争能够举一反三、学会如何利用所学的知识和方法分析解决问题；“数学文化拾趣园”旨在激发和培养读者学习数学的兴趣，提高读者的数学思维和数学素养；“数学实践训练营”重在培养读者用计算机和数学知识分析问题解决问题的能力和意识；“考研加油站”旨在为有考研需求的读者助力加油打气；“自我训练与提高”目的在于促使读者内化学习及反思学习，并为其阅读英文数学文献奠定基础.每部分都体现了培养不同层次人才的要求，读者可根据自己的需要选择相应内容学习、拓展和提高.

本书的最大特点是在对高等数学的基本概念、基本性质和基本方法进行归纳总结的同时，画出各知识点的结构和关系图，提炼出各章的典型方法；特别针对不同人才培养模式的需求，加强对典型例题和考研真题的求解思路和方法指导及一题多解的选讲；注重数学文化、数学应用的介绍，强化创新意识和能力的训练及培养；既注重基础也重视方法，强调学生数学思维能力的培养和提高及数学素养的

拓展训练,激发学生学习数学的兴趣和自主学习的能力.

本书由钟仪华和谢祥俊担任主编.各章撰写人分别是:第一章钟仪华,第二章张晴霞,第三章林敏,第四章和第五章丁显峰,第六章钟仪华、肖建英,第七章金检华,第八章李玲娜,第九章蒋尚武、张晴霞.其中,第一章至第四章和第六章由钟仪华负责指导修改,第五章和第七章至第九章由谢祥俊负责指导修改.全书的内容结构由钟仪华和谢祥俊主持设计制定;钟仪华负责全书的统稿和定稿工作.

本书在编写过程中,参考和引用了相关专家、同行的教材和专著上的成果及网上的一些资料,在此一并感谢!

限于编者的水平与学识,疏漏与错误难免,敬请广大读者和同行批评指正.

若读者想了解更多西南石油大学"高等数学"建设情况,可扫描下面的二维码,进入西南石油大学"高等数学"课程中心。

编　者

2017年2月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　教学大纲及知识结构图

一、教学大纲

1. 高等数学Ⅰ

1)学时分配

“函数与极限”这一章授课学时建议 16 学时：函数与映射(2 学时)；数列的极限(2 学时)；函数的极限(2 学时)；极限存在准则，两个重要极限(2 学时)；无穷小(2 学时)；函数的连续性与间断点(2 学时)；闭区间上连续函数的性质(2 学时)；习题课(2 学时).

2)目的与要求

学习本章的目的是使学生理解函数、极限和连续，能熟练进行极限运算，用极限方法分析问题和处理问题. 本章知识的基本要求是：

(1)理解映射、函数；理解符号函数、取整函数、分段函数、基本初等函数、初等函数、双曲函数.

(2)掌握函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；熟悉基本初等函数的性质和图形，能建立简单实际问题中变量之间的函数关系式.

(3)理解数列极限的定义，掌握收敛数列的性质，熟练掌握数列极限的四则运算法则，能运用数列极限的四则运算法则计算数列极限.

(4)理解极限、左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系；掌握函数极限的性质.

(5)能求函数图形的水平渐近线、铅直渐近线和斜渐近线.

(6)熟练掌握极限运算的四则运算法则和复合函数的极限运算法则.

(7)掌握极限存在的两个准则(夹逼准则和单调有界准则)，会利用它们证明极限的存在性并计算极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8)理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的性质与比较方法及用等价无穷小因子替换求极限的方法.

(9)理解函数连续性(含左连续与右连续)的概念，会判别函数间断点的类型.

(10)理解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质解决相关问题.

3)重点和难点

(1)重点：数列的极限和函数的极限，极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则，两个重要极限公式及等价无穷小因子替换求极限的方法，连续函数的概念及性质.

(2)难点:数列的极限和函数的极限概念,极限存在准则的应用,函数间断点及其分类,闭区间上连续函数性质的应用.

2. 高等数学Ⅱ

1)学时分配

"函数""极限和连续"两章授课学时建议 18 学时:函数(4 学时);数列的极限(2 学时);函数的极限(2 学时);极限存在准则,两个重要极限(2 学时);无穷小(2 学时);函数的连续性与间断点(2 学时);闭区间上连续函数的性质(2 学时);习题课和单元测验(2 学时).

2)目的与要求

学习本章的目的是使学生理解函数的概念,能建立简单实际问题中变量之间的函数关系式;理解极限和连续等概念,能熟练进行极限运算,用极限方法分析问题和处理问题.本章知识的基本要求是:

(1)理解笛卡尔乘积、邻域、映射、单射、满射、双射、逆映射和复合映射等概念;理解函数、符号函数、取整函数、分段函数、基本初等函数、初等函数、双曲函数等概念.

(2)掌握函数的有界性、奇偶性、单调性和周期性等四种特性,能建立简单实际问题中变量之间的函数关系式.

(3)理解数列极限的定义,掌握收敛数列的性质,熟练掌握数列极限的四则运算法则,能运用数列极限的四则运算法则计算数列极限.

(4)理解极限、左极限与右极限等概念,掌握函数极限存在的充分必要条件,能求函数图形的水平渐近线,掌握函数极限的性质.

(5)熟练掌握极限运算的四则运算法则和复合函数的极限运算法则,能用极限运算法则计算极限.

(6)掌握夹逼准则和单调有界准则这两个极限存在准则,会利用极限存在准则证明极限存在并求极限,能利用两个重要极限公式求极限.

(7)理解无穷小、无穷大的概念,能求函数图形的铅直渐近线,掌握无穷小的性质与比较,会用等价无穷小替换计算极限.

(8)理解函数在一点处连续、左连续与右连续、函数的间断点等概念,掌握函数在一点处连续的充分必要条件,能判定函数的间断点的类型,理解初等函数的连续性.

(9)理解最大值、最小值定理和介值定理等闭区间上连续函数的性质定理,并会用其解决有关问题.

3)重点和难点

(1)重点:函数的有关概念,建立简单函数关系式,数列和函数的极限,极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则,两个重要极限公式及等价无穷小因子替换求极限的方法,连续函数的概念及性质.

(2)难点:笛卡尔乘积、函数的有界性和复合函数的概念,建立简单函数关系式,数列的极限和函数的极限概念,极限存在准则的应用,函数间断点及其分类,闭区间上连续函数性质的应用.

3. 高等数学Ⅲ

1)学时分配

"函数与极限"这一章授课学时建议 8 学时.初等函数(2 学时);极限的概念及四则运算法则(2 学时);两个重要极限,无穷大与无穷小(2 学时);函数的连续性(2 学时).

2)目的与要求

学习本章的目的是使学生理解函数、极限和连续的概念，能熟练进行极限运算. 本章知识的基本要求是：

(1)理解函数的概念，了解函数的有界性、奇偶性、单调性和周期性四种特性，会建立简单实际问题中变量之间的函数关系式.

(2)了解复合函数和反函数的概念.

(3)掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

(4)理解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念，以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系；能运用极限四则运算法则计算极限.

(5)掌握利用两个重要极限公式求极限的方法.

(6)了解无穷小、无穷大的概念；了解无穷大与无穷小的关系.

(7)理解函数连续和间断的直观概念，了解连续函数的性质和初等函数的连续性，会利用函数的连续性计算初等函数的极限.

(8)了解最大值、最小值定理和介值定理等闭区间上连续函数的性质定理.

3)重点和难点

(1)重点：函数和连续函数的概念，基本初等函数的性质及图形，利用极限的四则运算法则、两个重要极限公式、初等函数连续性求函数的极限.

(2)难点：建立简单函数关系式，极限的定义，无穷小和无穷大的概念，闭区间上连续函数的性质.

二、知识结构图

高等数学Ⅰ的知识结构图如图 1—1 所示，高等数学Ⅱ的知识结构图如图 1—2 所示，高等数学Ⅲ的知识结构图如图 1—3 所示.

第二节　内 容 提 要

函数是现实世界中变量依赖关系在数学中的反映，是微积分学的主要研究对象. 而极限方法是研究变量的一种基本方法. 本节总结和归纳本章的基本概念、基本性质、基本方法及一些典型方法.

一、基本概念

1. 集合的相关概念

集合是数学中最基本的概念之一，它在现代数学中非常重要，大多数数学家相信所有数学用集合论语言表达是可能的. 集合也是一种原始概念，无法给出精确的定义，只能给出说明性的描述.

集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

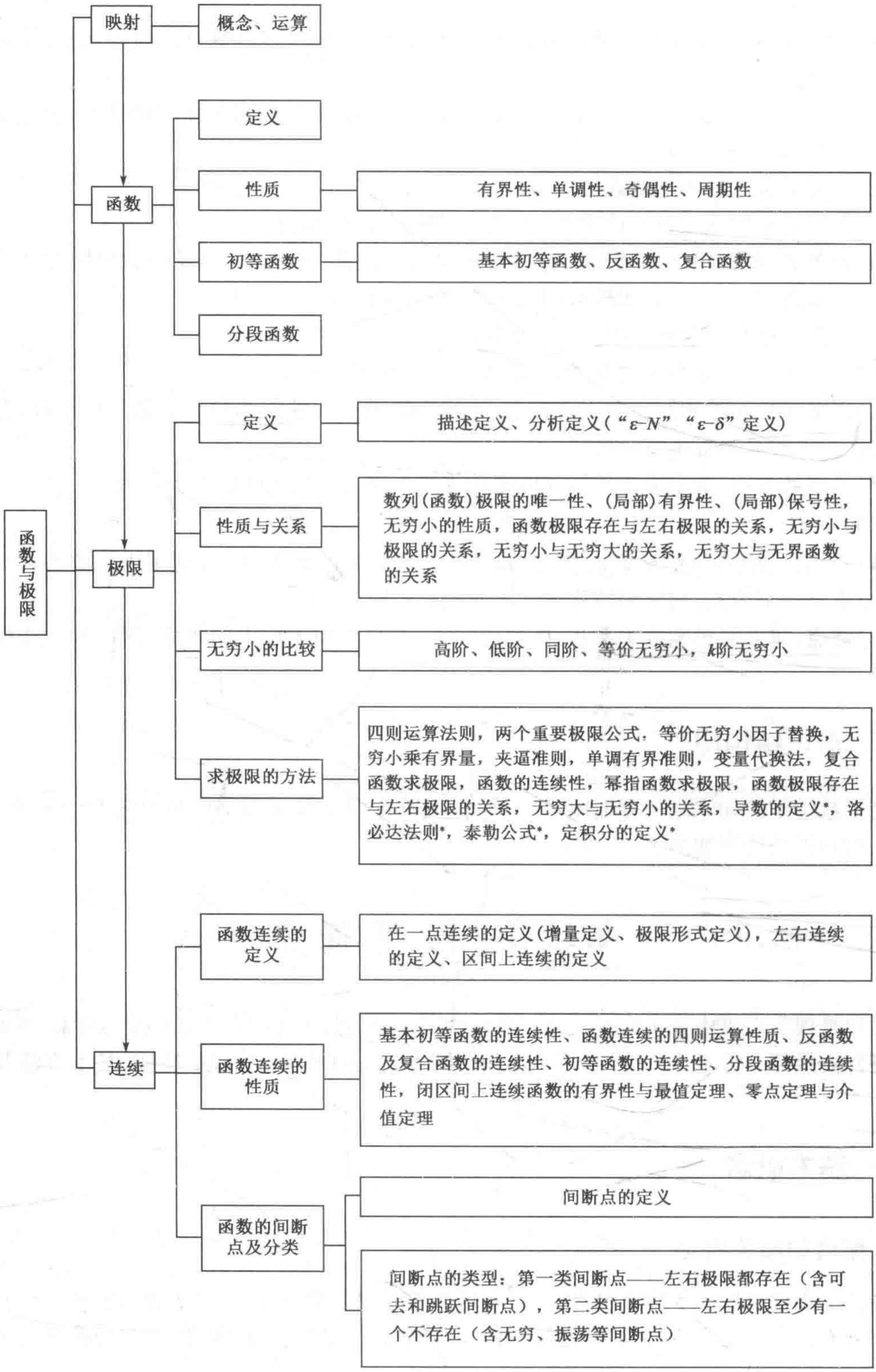

图 1—1

“*”表示不是本章所讲的方法. “$A \to B$” 表示由“A”推广可得到“B”.

- 函数、极限与连续
  - 集合
    - 笛卡尔乘积、邻域
  - 映射
    - 概念、运算
  - 函数
    - 定义
    - 性质
      - 有界性、单调性、奇偶性、周期性
    - 初等函数
      - 基本初等函数、反函数、复合函数
    - 分段函数
    - 建立函数关系
  - 极限
    - 定义
      - 描述定义、分析定义（“ε-N”、“ε-δ”定义）
    - 性质与关系
      - 数列(函数)极限的唯一性、(局部)有界性、(局部)保号性，无穷小的性质，函数极限存在与左右极限的关系，无穷小与极限的关系，无穷小与无穷大的关系，无穷大与无界函数的关系
    - 无穷小的比较
      - 高阶、低阶、同阶、等价无穷小
    - 求极限的方法
      - 四则运算法则，两个重要极限公式，等价无穷小因子替换，无穷小乘有界量，夹逼准则，单调有界准则，变量代换法，复合函数求极限，函数的连续性，函数极限存在与左右极限的关系，无穷大与无穷小的关系，导数的定义*，洛必达法则*，泰勒公式*，定积分的定义*
  - 连续
    - 函数连续的定义
      - 在一点连续的定义(增量定义、极限形式定义)，左右连续的定义、区间上连续的定义
    - 函数连续的性质
      - 基本初等函数的连续性、函数连续的四则运算性质、反函数及复合函数的连续性、初等函数的连续性、分段函数的连续性，闭区间上连续函数的有界性与最值定理、零点定理与介值定理
    - 函数的间断点及分类
      - 间断点的定义
      - 间断点的类型：第一类间断点——左右极限都存在（含可去和跳跃间断点），第二类间断点——左右极限至少有一个不存在（含无穷、振荡等间断点）

图 1—2

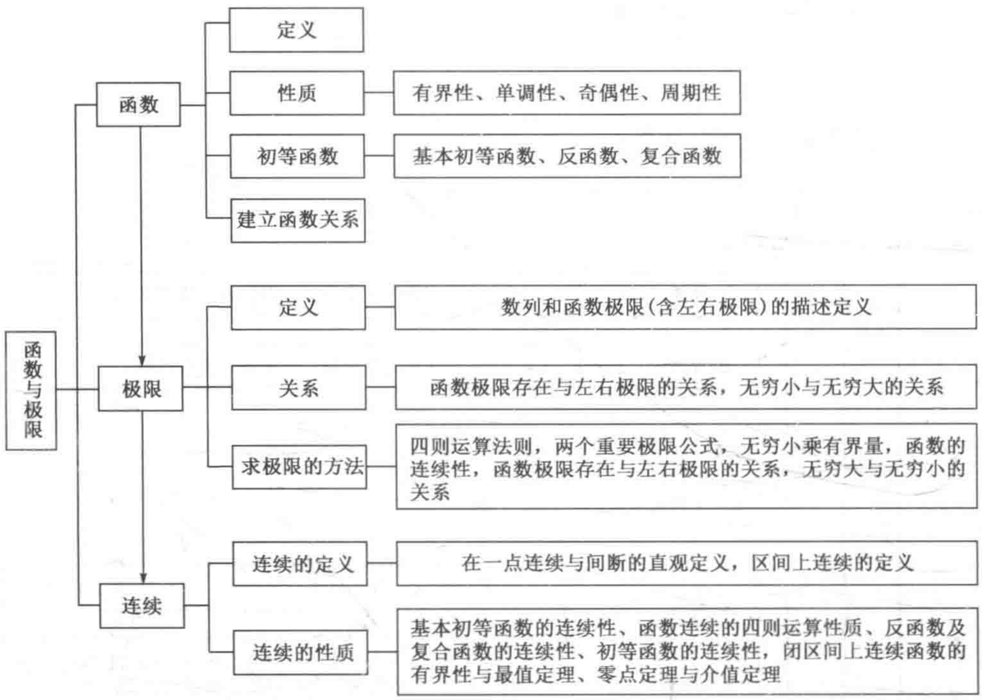

图 1—3

1)表示集合的常用方法

通常有两种:第一种是列举法,它是把集合中的所有元素按某一次序逐一列在花括号内,元素之间用逗号隔开.列举法中,元素的次序是无关紧要的,元素的重复出现无足轻重.

第二种方法是描述法,它是以某个小写的英文字母来统一表示该集合的元素,并描述出集合元素具有的性质,而不属于这个集合的元素不具有该性质,其形式为

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\},$$

这里 A 是具有性质 P 的元素 x 的全体组成的集合,花括号内的符号"|"读作"系指".

列举法适用于元素不太多的有限集或元素的构造规律比较明显简单的集合,好处是可以具体看清集合的元素,而描述法刻画了集合元素的共同特征.应用时可根据方便任意选用,不受限制.

2)笛卡儿乘积

设 A 和 B 是任意两个集合,用 A 中的元素作为第一元素,B 中的元素作为第二元素,构成序偶,所有这样的序偶组成的集合,称为 A 和 B 的**笛卡儿乘积**,记作 $A\times B$, 即

$$A\times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

3)邻域的有关概念

设 a 是实数,δ 是正实数,则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$, 即

$$U(a,\delta) = \{x|x \in R, |x-a| < \delta\} = (a-\delta,a+\delta).$$

其中 a 称为这个**邻域的中心**,δ 称为这个**邻域的半径**.

称 $(a-\delta,a) \cup (a,a+\delta)$ 为点 a 的**去心** δ **邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$, 即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x|0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta,a) \cup (a,a+\delta).$$

其中 a 称为这个**邻域的中心**，δ 称为这个**邻域的半径**.

称开区间 $(a-\delta,a)$ 为点 a 的**左** δ **邻域**、开区间 $(a,a+\delta)$ 为点 a 的**右** δ **邻域**.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 面内的一个定点，δ 是正实数，则称

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,P\in R^2,|PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

为点 P_0 的 δ **邻域**，称

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,P\in R^2,0<|PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\,|\,0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

为点 P_0 的**去心** δ **邻域**.

2. 映射的相关概念

1）映射的定义

设 X 和 Y 为两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对于集合 X 中的每一个元素 x，按照法则 f，在集合 Y 中有一个唯一确定的元素 y 与它对应，那么称 f 为从 X 到 Y 的一个**映射**(**mapping**)，记为

$$f:X\to Y,x\to y.$$

其中元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**，记为 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的**原像**；又称 X 为映射 f 的**定义域**，记为 D_f，即 $D_f=X$，而 $\{y\,|\,y=f(x),x\in X\}$ 称为映射 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}.$$

f 是从 X 到 Y 的映射的充分必要条件是：(1) $D_f=X$，即对 X 的每个元素都要有像(存在性条件)；(2)如果 $y_1=f(x)$，$y_2=f(x)$，那么 $y_1=y_2$，即对每一个 X 的每一个元素都只有一个像(唯一性条件).

2）映射的类型

设 $f:X\to Y$，且对任意 x_1、$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，总有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为从 X 到 Y 的**单射映射**；设 $f:X\to Y$，且 $R_f=Y$，则称 f 为从 X 到 Y 的**满射映射**；设 $f:X\to Y$，且 f 既是单射映射又是满射映射，则称 f 为从 X 到 Y 的**双射映射**.

设 f 为从 X 到 Y 的一个单射，则对任意 $y\in f(X)$，都存在唯一的 $x\in X$，使得 $y=f(x)$，令

$$g:f(X)\to X,y\to x,$$

其中 x 满足 $y=f(x)$. 根据映射的定义，g 为从 $f(X)$ 到 X 的映射，我们称 g 为映射 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}. 显然，$D_{f^{-1}}=f(X)$，$R_{f^{-1}}=X$.

设 $f:X\to Y$ 和 $g:U\to V$ 是两个映射，其中 $Y\subseteq U$，则根据映射的定义，

$$X\to V,x\to g(f(x))$$

为从 X 到 Y 的映射，我们称这个映射为 f 和 g 的复合映射，记为 $g\circ f$.

由 f 和 g 求得 $g\circ f$ 的运算"$\circ$"称为**复合运算**.

3. 函数的相关概念

1）函数

(1)定义. 设 $D\subseteq\mathbf{R}$，$D\neq\varnothing$，则称由 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**一元函数**，简称**函数**，通常记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 y 为 x 的函数，x 为自变量，y 为因变量. 记为 $y = f(x)$，D 为函数 f 的**定义域**，记为 D_f. 称 $f(x)$ 为函数 f 在 x 处的**函数值**，因变量与自变量之间的这种依赖关系称为**函数关系**，函数值的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

(2)确定定义域的方法. 通常有两种：一是在实际问题中由实际问题确定，其自变量的取值要使实际问题有意义；二是在非实际问题中我们约定函数的定义域就是使该函数有意义的所有自变量的集合.

(3)表示函数的方法. 通常有三种：解析法(公式法)、表格法和图形法. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的图形，D 是函数 $y = f(x)$ 的定义域.

2)分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数.

3)有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，数集 $X \subseteq D$.

(1)有上界的函数. 如果存在实数 M_1，使得对任意 $x \in X$，均有 $f(x) \leqslant M_1$ 成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

(2)有下界的函数. 如果存在实数 M_2，使得对任意 $x \in X$，均有 $f(x) \geqslant M_2$ 成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**，而 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

(3)有界和无界函数. 如果存在正实数 M，使得对任意 $x \in X$，均有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；如果这样的正实数 M 不存在，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

4)基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

5)初等函数

初等函数是指由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并能够用一个式子表示的函数.

4. 数列及其有界性的定义

(1)数列的定义. 如果按照某一个法则，对每个 n，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数按照下标从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**，记为 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的**一般项**.

(2)数列的有界性. 对于数列，如果存在正数 M，使得对于一切 x_n 都满足不等式 $|x_n| \leqslant M$，那么称数列 $\{x_n\}$ 有界；如果这样的正数 M 不存在，那么称数列 $\{x_n\}$ 无界.

5. 数列极限的定义

(1)描述定义. 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 a，当 n 无限增大时，$\{x_n\}$ 无限接近于常数 a ，那么称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛 a ，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数，那么就称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者称数列**发散**，习惯上也称 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

(2)分析定义. 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛 a.

6. 函数极限的定义

(1)描述定义. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内（在 $|x|>X_0$ 时）有意义，如果存在常数 A，当 x 无限趋近于 x_0（$|x|$ 无限增大）时，$f(x)$ 无限接近于常数 A，那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的**极限**，或者称 $f(x)$ 的极限是 A，记为

$$\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x) = A$$

或

$$f(x)\to A, x\to x_0(x\to\infty).$$

否则，称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的极限不存在.

(2)**分析**（ε—δ **或** ε—X）**定义**. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内（在 $|x|>X_0$ 时，X_0 是正数）有意义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 $\delta(X)$，使得当 x 满足

$$0<|x-x_0|<\delta\ (|x|>X)$$

时，对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么就称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的极限，或者称 $f(x)$ 的极限是 A.

7. 单侧(边)极限的定义

(1)左、右极限. 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_1, x_0)$ [$(x_0, x_0+\delta_1)$] 内有意义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足

$$x_0-\delta<x<x_0 (x_0<x<x_0+\delta)$$

时，对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么就称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左(右)**极限**，或者称 $f(x)$ 在 x_0 处的左(右)极限是 A，记为

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A\left(f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A\right);$$

否则，称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左(右)极限不存在.

(2) $x\to-\infty(+\infty)$ **的极限**. 设 X_0 是正数，$f(x)$ 在 $x<-X_0(x>X_0)$ 时有意义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 $X>X_0$，使得当 x 满足

$$x<-X(x>X)$$

时，对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么就称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$（$x\to+\infty$）时的**极限**，记为