"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

沈恒范 编著
严钦容 沈侠 修订

概率论与数理统计教程

（第六版）

Probability and Mathematical Statistics

高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

概率论与数理统计教程

（第六版）

Probability and Mathematical Statistics

高等教育出版社·北京

内容提要

本书参照2014年版“工科类本科数学基础课程教学基本要求”进行修订，删除了“自学例题分析与详解”，改写了部分内容，更换了部分习题，增加了附录一（R语言统计分析入门）。本次修订仍保留了第五版“概率少，统计多”的特色。

前四章是概率论的基本内容，为数理统计准备必要的理论基础；后五章在概率论的基础上侧重介绍如何用统计方法分析、解决带有随机性的实际问题。两部分内容紧密配合。全书讲解透彻，文字流畅；内容安排重点突出，难点分散，由浅入深，便于理解。

本书可作为工科院校本科非数学类各专业的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计教程 / 沈恒范编著；严钦容，沈侠修订. --6版. --北京：高等教育出版社，2017.8
ISBN 978-7-04-048049-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①沈…②严…③沈… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第157223号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 李 蕊　封面设计 赵 阳　版式设计 王艳红
插图绘制 尹文军　责任校对 刘丽娴　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京市文林印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	21.5	版　　次	1966年4月第1版
字　　数	390千字		2017年8月第6版
购书热线	010-58581118	印　　次	2017年8月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	40.00元

物 料 号 48049-00

第六版序言

沈恒范教授是我国高等院校工科概率统计教学与研究领域的先行者。他编著的《概率论讲义》(本书第一版)早在1966年4月即由高等教育出版社出版。半个世纪以来,本书历经多次改版修订,至第五版(2011年)已累计发行逾百万册,是我国高校工科数学的代表性经典教材。

2014年10月,本书第五版列入“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材后,为适应新的时代环境与教学条件,沈恒范教授决定对第五版进行修订。考虑到他当时的身体状况,他与我们详细讨论了修订方案并把具体的修订工作交给了我们。

在本次修订中,我们主要做了以下工作:(1) 为控制第六版的篇幅,删去了第五版中小字排印的“自学例题分析与详解”,其中部分题目经改编后进入了正文和课后习题;(2) 为一些重要概念、公式、方法的引入增加了引导性例题和说明;(3) 在某些章节增加、更换了一些例题和课后习题,使教学内容与例题和习题更加匹配;(4) 特别强调了用统计计算软件求解数据分析问题的重要性,增加附录一(R语言统计分析入门)引导读者学习使用R语言;(5) 为配合使用R语言求解假设检验问题,在第七章中增加了基于p值的假设检验方法;(6) 编写了数理统计部分有关统计计算与分析的例题在统计计算软件R中的解法、课外阅读材料等,有需要的读者可以发邮件至hengfan.shen@gmail.com索取。

在本书修订过程中,我们得到了湖北汽车工业学院、瑞典卡罗琳斯卡医学院(Karolinska Institutet)、英国爱丁堡大学(University of Edinburgh)的支持以及高等教育出版社数学分社的协助,在此我们表示诚挚的谢意。

2014年12月7日,沈恒范教授去世前八天在医院病房和我们商谈本书修订细节的往事历历在目。我们虽尽全力不辜负他的嘱托,但限于我们的学识和能力,本书难免还存在某些缺点和错误,恳请读者批评指正。

谨以本书的出版表达我们对沈恒范教授的崇高敬意与深切怀念!

严钦容　沈侠

2016年9月

第五版序言

本书主要参照教育部数学基础课程教学指导分委员会最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》进行了修订，增减了部分内容，更新了一些例题。同时，为满足普通高等学校本科毕业生报考非数学类专业硕士研究生的需要，修订时也参考了教育部考试中心制订的非数学类专业《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的有关概率论与数理统计部分，并对内容和习题做了相应的调整。

为了提高高等教育质量，应使本科生有更多的自学时间，很多高校普遍缩减了各门课程的学时，高等工科院校“概率论与数理统计”课程的学时一般是在42~48学时之间。因此，本书修订时在多数章节中补充了若干留给读者自学的具有启发性、应用性和综合性的例题，所有自学例题都给出一定的分析和详尽的解答。这样，教师讲课时不妨少讲一些例题，而让学生在课余时间自学，不仅节省了讲课的学时，并且可以培养学生的自学能力。所选的自学例题大都紧密结合生活和工程实际，学生通过学习这些例题将提高分析和解决实际遇到的各种随机性问题的能力。特别是，有些例题由于运用完全不同的分析思路，从而给出两种或两种以上不同的解法。这对于进一步启发读者的思维，灵活机动地处理实际遇到的随机性问题，起到了极好的作用，也可以激发读者学习本课程的兴趣。

沈侠(Uppsala University)和黄伟琳(中国人民大学)为本书精选了绝大多数自学例题，并对全部自学例题做出了分析和详解。

湖北汽车工业学院理学系应用数学教研室的甄新副教授、彭晓珍副教授、肖海霞副教授为本书精心研制了电子教案，喻方元教授和严钦容教授对该电子教案进行了审稿。该电子教案的内容与本书的内容紧密配合，取材精练、制作新颖、配有动画、利于教学，已由高等教育出版社制成光盘。使用本书的教师可向lirui@hep.com.cn发送电子邮件索取。著者衷心感谢他(她)们付出了大量的劳动，并赞赏他(她)们研制的成果。

在本书修订过程中，得到湖北汽车工业学院领导的关心和支持，还得到高等教育出版社数学分社编辑的大力协助，著者谨致以诚挚的谢意！

本书难免还存在某些缺点和错误，恳请读者批评指正。

沈恒范

2010年10月

第四版序言

2001年我国加入了世界贸易组织，与世界各国的国际经济与贸易往来日益增多。为了与国际接轨，便于今后的国际交往，我国在近几年中陆续颁布了一系列的国家标准。概率论与数理统计课程由于在自然科学、社会科学、工农业生产、金融、经济等各方面有着广泛的应用，所以本课程在高等学校中的重要性也就更加突出。本书主要是根据上述国家标准及全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》对概率论与数理统计课程中某些基本概念的定义以及有关的定理、公式等的叙述进行了修订，并对某些数学名词作了修改。

随着21世纪科学技术的迅速发展，现代化的教学设施已在高等学校中得到普遍使用。本课程的教学方法和教学手段也必须适应这一新的形势，所以本书特别强调应当尽量利用电子计算器或计算机以及有关的软件进行统计计算，这样不仅可以提高计算的精确性，而且可以大大节省计算的工作量。

随着高等教育改革的深入发展，更好地培养高等学校学生的能力和素质，缩减各门课程的教学时数已是必然的趋势。为此，这次修订参照教育部颁发的高等学校《概率论与数理统计课程教学基本要求》中的第Ⅱ类（概率少、统计多）教学基本要求，精简了第三版中的若干内容，同时采用了新的课程教学体系。这样，讲授本课程教学基本要求的全部内容一般只需48学时。此外，本书中还有少量超出本课程教学基本要求的内容，都已用*号表明，供读者选学时参考。

本书所用的课程教学体系是著者与四川大学王明慈教授于1996年共同拟订，并在以后的教学和教材中付诸实施的；1998年又得到天津大学齐植兰教授和吉林工业大学高文森教授的合作，进一步完善了课程体系，充实了教学内容；对于促进本课程的教学改革，提高本课程的教学质量，都起了重要的作用。所以，著者特别感谢上述三位教授长期友好的合作，并向他们致以最诚挚的谢意。

本书修订过程中，曾经得到湖北汽车工业学院领导同志的关心和支持，著者谨致以衷心的谢意。黄明副教授、严钦容副教授、迟彦惠副教授以及华中科技大学于寅教授、北京邮电大学王丽霞副教授等都曾经对本书的修订稿提出了很多有益的意见和建议，著者也向他们致以诚挚的谢意。

限于著者的水平，本书难免还存在某些缺点和错误，诚恳希望读者批评指正。

沈恒范

2002年9月

目 录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件及其频率·概率的统计定义

1. 随机事件及其频率

概率论是研究随机现象(偶然现象)的规律性的科学.

人们在自己的实践活动中,常常会遇到随机现象.例如,远距离射击较小的目标,可能击中,也可能击不中,每一次射击的结果是随机(偶然)的.自动车床加工出来的机械零件,可能是合格品,也可能是废品.进行试验时,把得到的试验数据在坐标图纸上用点表示出来,我们可以看到,这些点(假设它们足够多)通常不是位于一条曲线上,而是散布在某一带形区域内,这就是所谓实验点的随机散布.

在事物的联系和发展过程中,随机现象是客观存在的.但是,在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性又始终是受事物内部隐藏着的必然性所支配的.

现实世界上事物的联系是非常复杂的,一切事物的发展过程中既包含着必然性的方面,也包含着偶然性的方面,它们是互相对立而又互相联系的,必然性经常通过无数的偶然性表现出来.

科学的任务就在于,要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性,即事物的客观规律性.这种客观规律性是在大量现象中发现的.

在科学研究或工程技术中,我们会经常遇到在不变的条件下重复地进行多次试验或观测.抽去这些试验或观测的具体性质,就得到概率论中试验的概念.所谓试验就是一定的综合条件的实现,我们假定这种综合条件可以任意多次地重复实现.大量现象就是很多次试验的结果.

当一定的综合条件实现时,也就是在试验的结果中,所发生的现象叫做事件.如果在每次试验的结果中,某事件一定发生,则这一事件叫做必然事件;相反地,如果某事件一定不发生,则叫做不可能事件.

在试验的结果中,可能发生、也可能不发生的事件,叫做随机事件(偶然事

件).例如,任意抛掷硬币时,图案向上是随机事件;远距离射击时,击中目标是随机事件;自动车床加工机械零件时,加工出来的零件为合格品是随机事件;等等.

通常我们用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示随机事件,而用字母 U 表示必然事件,V 表示不可能事件.

例 已知一批产品共 100 个,其中有 95 个合格品和 5 个次品.检查产品质量时,从这批产品中任意抽取 10 个来检查,则在抽出的 10 个产品中,"次品数不多于 5 个"这一事件是必然事件 U;"次品数多于 5 个"这一事件是不可能事件 V;而事件 A:"没有次品";B:"恰有 1 个次品";C:"有 2 个或 3 个次品";D:"次品数少于 4 个"等等都是随机事件.

用数字表示大量现象中的规律性时,联系到下面的概念.

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次,则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的相对频率(简称频率),记作 $f_n(A)$;用公式表示为

$$f_n(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

显然,**任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数,即**

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1. \tag{1.2}$$

对于必然事件,在任何试验序列中,我们有 $m=n$,所以**必然事件的频率恒等于 1,即**

$$f_n(U)=1. \tag{1.3}$$

对于不可能事件,我们有 $m=0$,所以**不可能事件的频率恒等于 0,即**

$$f_n(V)=0. \tag{1.4}$$

经验表明,当试验重复多次时,随机事件 A 的频率具有一定的稳定性;就是说,在不同的试验序列中,当试验次数 n 充分大时,随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 常在一个确定的数字附近摆动.

例如,我们来看下面的试验结果,表中 n 表示抛掷硬币的次数,m 表示图案向上的次数,$f_n(A)=\frac{m}{n}$ 表示图案向上的频率.

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	$f_n(A)$	m	$f_n(A)$	m	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498

续表

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	$f_n(A)$	m	$f_n(A)$	m	$f_n(A)$
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上表我们可以看出,当抛掷硬币的次数较少时,图案向上的频率是不稳定的;但是,随着抛掷硬币次数的增多,频率越来越明显地呈现出稳定性.如上表最后一列所示,我们可以说,当抛掷硬币的次数充分多时,图案向上的频率大致是在 0.5 这个数字的附近摆动.

历史上,曾经有一些著名的统计学家进行过抛掷硬币的试验,得到如下的结果:

试验者	抛掷硬币次数 n	图案向上次数 m	频率 $f_n(A)$
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
费希尔(Fisher)	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

所有这些结果都充分验证了上述结论.

类似的例子可以举出很多.这说明随机事件在大量重复试验中存在着某种客观规律性——频率的稳定性.因为它是通过大量统计显示出来的,所以称为统计规律性.

正是由于大量现象中随机事件的统计规律性是客观存在的,才使得数学家和统计学家们对各种随机现象进行深入的研究,并取得了极其丰富的重要成果.概率论与数理统计的理论与方法在自然科学、社会科学、工农业生产、国家经济

建设中有着广泛的应用.

2. 概率的统计定义

设在大量重复试验中随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个数字 $p(0<p<1)$ 的附近.如果这个数字 p 较大,则事件 A 的频率 $f_n(A)$ 也相应较大,这就是说,事件 A 在 n 次试验中发生的次数较多,从而表明事件 A 发生的可能性较大;相反,如果这个数字 p 较小,则表明事件 A 发生的可能性较小.

由随机事件的频率的稳定性可知,随机事件在试验中发生的可能性的大小可以用一个数字来表示.这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的、介于 0 与 1 之间的数字 p 叫做随机事件 A 的概率,记作 $P(A)$,即

$$P(A)=p \quad (0<p<1). \tag{1.5}$$

随机事件的概率的这个定义通常称为概率的统计定义.

当试验次数 n 充分大时,随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 正是在它的概率 $P(A)$ 的附近摆动.在上面的例子中,我们可以认为图案向上的概率等于 0.5.

直接估计某一事件的概率是非常困难的,甚至是不可能的,仅在比较特殊的情况下才可以计算随机事件的概率.概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法:我们把多次重复试验中随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 作为随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的近似值,即当试验次数 n 充分大时,

$$P(A)\approx f_n(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.6}$$

因为必然事件的频率恒等于 1,所以**必然事件的概率等于 1**,即

$$P(U)=1. \tag{1.7}$$

又因为不可能事件的频率恒等于 0,所以**不可能事件的概率等于 0**,即

$$P(V)=0. \tag{1.8}$$

这样,**任何事件 A 的概率满足不等式**

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{1.9}$$

应该指出,随机事件的频率是与我们已进行的试验有关的,而随机事件的概率却是完全客观地存在着的.在实际进行的试验中,随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现.随机事件的概率表明,试验中综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系,它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证统一.

还应指出,随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性,这种客观属性是与我们认识主体无关的.不应该把概率看作认识主体对于个别现象的信念程度.有时一个人说某事件“可能发生”或“很少可能发生”,这仅表示说话的人对该事件发生的可能性的一个判断而已.因为个别现象不是发生,就是不发生,

所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的.

§1.2 样 本 空 间

为了深入理解随机事件,我们来叙述试验的样本点与样本空间的概念.

在不变的条件下重复地进行试验,虽然每次试验的结果中所有可能发生的事件是可以明确知道的,并且其中必有且仅有一个事件发生,但是在试验之前却无法预知究竟哪一个事件将在试验的结果中发生.

试验的结果中每一个可能发生的事件叫做试验的样本点,通常用字母 ω 表示.

试验的所有样本点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots$ 构成的集合叫做样本空间,通常用字母 Ω 表示,于是,我们有

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}.$$

例 1 设试验为任意抛掷一枚硬币,则有样本点

ω_1 表示"图案向上",ω_2 表示"数字向上".

于是样本空间是由两个样本点构成的集合

$$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

例 2 设试验为从装有三个白球(记为1,2,3号)与两个黑球(记为4,5号)的袋中任取两个球.

(1) 如果观察取出的两个球的颜色,则有样本点

ω_{00} 表示"取出两个白球",

ω_{11} 表示"取出两个黑球",

ω_{01} 表示"取出一个白球与一个黑球".

于是样本空间是由三个样本点构成的集合

$$\Omega_2=\{\omega_{00},\omega_{01},\omega_{11}\}.$$

(2) 如果观察取出的两个球的号码,则有样本点

ω_{ij} 表示"取出第 i 号与第 j 号球"$(1\leqslant i<j\leqslant 5)$.

于是样本空间是由 $C_5^2=10$ 个样本点构成的集合

$$\Omega_2'=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}.$$

这个例子表明,试验的样本点与样本空间是根据试验的内容而确定的.

例 3 设试验为观察放射性物质在一段时间内放射的粒子数,则有样本点

ω_i 表示"放射 i 个粒子"$(i=0,1,2,\cdots)$.

于是样本空间是由可数无穷多个样本点构成的集合

$$\Omega_3=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}.$$

例 4 设试验为测量车床加工的零件的直径,则有样本点

ω_x 表示"测得零件的直径为 x mm"($a \leqslant x \leqslant b$).

于是样本空间是由不可数无穷多个样本点构成的集合

$$\Omega_4 = \{\omega_x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

现在我们说明随机事件与样本空间的关系.

在例 2 中,设随机事件 A 表示"取出的两个球都是白球",则对于样本空间 Ω_2 来说,我们有

$$A = \{\omega_{00}\};$$

而对于样本空间 Ω_2' 来说,我们有

$$A = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}.$$

这表明随机事件 A 是样本空间 Ω_2 或 Ω_2' 的一个子集.

在例 3 中,设随机事件 B 表示"放射性物质在一段时间内放射的粒子数不超过 10 个",则我们有

$$B = \{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{10}\}.$$

这表明随机事件 B 是样本空间 Ω_3 的一个子集.

由此可见,**任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集,该子集中任一样本点 ω 发生时事件 A 即发生**.

因为样本空间 Ω 中任一样本点 ω 发生时,必然事件 U 都发生,所以 U 是所有样本点构成的集合;这就是说,**必然事件 U 就是样本空间 Ω**.今后我们就把必然事件记作 Ω.

因为样本空间 Ω 中任一样本点 ω 发生时,不可能事件 V 都不发生,所以 V 不是任何样本点的集合;这就是说,**不可能事件 V 是空集$\varnothing$**.今后我们就把不可能事件记作$\varnothing$.

应该指出,试验的任一样本点 ω 也是随机事件,今后我们把试验的样本点称为试验的基本事件.显然,**基本事件就是样本空间 Ω 的仅由单个样本点构成的子集**.

§1.3 事件的关系及运算

为了研究随机事件及其概率,我们需要说明事件之间的各种关系及运算.

正如 §1.2 中已经指出的,任一随机事件都是样本空间的一个子集,所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的.在下面的讨论中,我们叙述事件的关系及运算时所用的符号也是与集合的关系及运算的符号基本上一致的.

(1) 如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记作

$$B \supset A \quad 或 \quad A \subset B.$$

例如,在图 1.1 中,设试验是让点随机地落在矩形区域内,事件 A 表示"随机点落在小圆内",事件 B 表示"随机点落在大圆内",则我们有 $A \subset B$.

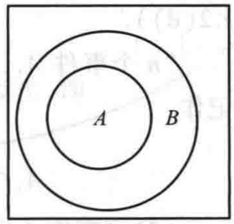

图 1.1

(2) 如果事件 B 包含事件 A,且事件 A 包含事件 B,即

$$B \supset A \quad 且 \quad A \supset B;$$

也就是说,二事件 A 与 B 中任一事件的发生必然导致另一事件的发生,则称事件 A 与事件 B 相等,记作

$$A = B.$$

(3) "二事件 A 与 B 中至少有一事件发生"这一事件叫做事件 A 与事件 B 的并,记作

$$A \cup B.$$

例如,在图 1.2 中,设试验是让点随机地落在矩形区域内,事件 A 表示"随机点落在左边的圆内"(图 1.2(a)),事件 B 表示"随机点落在右边的圆内"(图 1.2(b)),则事件 $A \cup B$ 表示"随机点落在任一圆内"(图 1.2(c)).

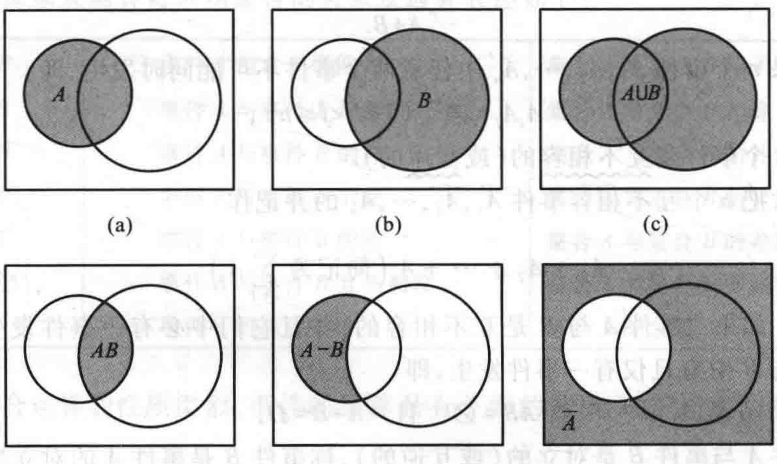

图 1.2

"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一事件发生"这一事件叫做事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并,记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n (简记为 \bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

(4)“二事件 A 与 B 都发生”这一事件叫做事件 A 与事件 B 的交,记作

$$A\cap B \quad 或 \quad AB.$$

例如,在图 1.2 中,事件 $A\cap B$ 就表示“随机点落在二圆的公共部分内”(图 1.2(d)).

“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生”这一事件叫做事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,记作

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \quad 或 \quad A_1A_2\cdots A_n(简记为\bigcap_{i=1}^{n}A_i).$$

(5)“事件 A 发生但事件 B 不发生”这一事件叫做事件 A 与事件 B 的差,记作

$$A-B.$$

例如,在图 1.2 中,事件 $A-B$ 表示“随机点落在左边的圆内且落在右边的圆外”(图 1.2(e)).

(6) 如果二事件 A 与 B 不可能同时发生,即

$$AB=\varnothing,$$

则称二事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的).

通常把两个互不相容事件 A 与 B 的并记作

$$A+B.$$

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生,即

$$A_iA_j=\varnothing \quad (1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

通常把 n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n\left(简记为\sum_{i=1}^{n}A_i\right).$$

(7) 如果二事件 A 与 B 是互不相容的,并且它们中必有一事件发生,即二事件 A 与 B 中有且仅有一事件发生,即

$$AB=\varnothing \quad 且 \quad A+B=\Omega,$$

则称事件 A 与事件 B 是对立的(或互逆的),称事件 B 是事件 A 的对立事件(或逆事件),同样事件 A 也是事件 B 的对立事件(或逆事件),记作

$$B=\overline{A} \quad 或 \quad A=\overline{B}.$$

例如,在图 1.2 中,事件 $\overline{A}$ 表示“随机点落在左边的圆外”(图 1.2(f)).

由此可知,对于任意的事件 A,我们有

$$\overline{\overline{A}}=A, \tag{1.10}$$