普通高等院校“十二五”规划教材

运筹学

Yunchouxue

主　编　罗剑　李明
副主编　杨洋　甘宇　李萌

西南财经大学出版社
中国·成都

普通高等院校“十二五”规划教材

运筹学

Yunchouxue

主　编　罗剑　李明
副主编　杨洋　甘宇　李萌

西南财经大学出版社
中国·成都

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/罗剑,李明主编 .—成都:西南财经大学出版社,2017.6

ISBN 978 -7 -5504 -3055 -6

Ⅰ.①运… Ⅱ.①罗…②李… Ⅲ.①运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 140570 号

运筹学

主　编:罗剑　李明
副主编:杨洋　甘宇　李萌

责任编辑:廖韧
助理编辑:张春韵
责任校对:唐一丹
封面设计:墨创文化　张姗姗
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028 -87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	成都双流鑫鑫印务有限公司
成品尺寸	185mm ×260mm
印　　张	16.25
字　　数	375 千字
版　　次	2017 年 7 月第 1 版
印　　次	2017 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	1— 2000 册
书　　号	ISBN 978 -7 -5504 -3055 -6
定　　价	36.00 元

1. 版权所有,翻印必究。
2. 如有印刷、装订等差错,可向本社营销部调换。

前 言

运筹学的重要性和实用性越来越受到人们的重视，目前，各高校开设运筹学课程的专业越来越多。为适应运筹学教学的需求，编写一本适合理工科以及管理和经济等专业使用的教材就尤其重要。

本教材注重实用性，强调理论联系实际，具有一定的深度和广度。叙述深入浅出、通俗易懂，每章末都有习题。本教材适合于相关专业本、专科生选用，同时也兼顾了硕士研究生和实际应用人员的使用需求。

本教材由西华大学罗剑和李明担任主编，共分为10章。其中，第1章由李明、甘宇、李萌编写；第2章由李明、甘宇、张秋凤编写；第3章由罗剑、牟绍波、唐选坤编写，第4章由李萌、杨洋、简相伍编写，第5章由罗剑、杨洋、郑杲奇编写，第6章由罗剑、牟绍波、曾雪编写，第7章由罗剑、杨洋、周杉杉编写，第8章由杨洋、牟绍波、辜鹏编写，第9章由罗剑、杨洋、杜静编写，第10章由罗剑、杨洋、范柳编写。本教材由西华大学李明统稿、罗剑定稿。

在本教材的编写过程中，编者参阅了大量中外文献资料，在此对文献作者和译者表示衷心感谢！由于编者水平有限，不足之处，恳请广大读者批评指正。

编 者

2017年6月

目录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1 绪 论

运筹学是高等学校经济管理、工业工程、工程管理等管理类专业的本科生必修的一门专业基础课；是分析和解决经营管理领域最优化问题的一门方法论学科；是每个有志于从事现代经营管理工作的人都应该掌握的重要的数量分析工具。

1.1 运筹学简史

何谓“运筹学”？它的英文名称是 Operations Research，直译为“运作研究”，就是研究在经营管理活动中应如何行动，如何以尽可能小的代价获取尽可能好的结果，即所谓的“最优化”问题。汉语是世界上最善于表情达意的语言，中国学者把这门学科意译为“运筹学”，就是取自古语“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”，其意为运算筹划，出谋献策，以最佳策略取胜。这就极为恰当地概括了这门学科的精髓。

在人类历史的长河中，运筹谋划的思想俯拾皆是，经典的运筹谋划案例也不鲜见。《孙子兵法》就是我国古代战争谋略之集大成者；诸葛亮更是家喻户晓的一代军事运筹大师；田忌赛马和丁渭修皇宫等故事，都充分说明了我国不仅很早就有了朴素的运筹思想，而且已在生产实践中运用了运筹方法。

然而，把“运筹学”真正当成一门科学来研究，则还只是近几十年来的事。第二次世界大战中，英、美等国抽调各方面的专家成立了“运作研究”（Operations Research）小组，参与各战略战术的优化研究工作，运用科学方法成功地解决了许多非常复杂的战略和技术问题，获得了显著的成功，大大推进了胜利的进程。例如，如何合理运用雷达以有效地对付德国军队的空袭；对商船如何进行编队护航，使船队遭受德军潜艇攻击时损失最小；在各种情况下如何调整反潜深水炸弹的爆炸深度，才能增加对德军潜艇的杀伤力，等等。

第二次世界大战结束以后，从事这些活动的许多专家转到了经济部门、民用企业、大学或研究所，继续从事关于决策的数量方法的研究。运筹学作为一门学科，逐步形成并得以迅速发展。第二次世界大战后的运筹学主要在以下两方面得到了发展：其一，运筹学的方法论得到了快速的发展，形成了运筹学的许多分枝，如数学规划（线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等）、图论与网络、排队论、存储论、维修更新理论、搜索论、可靠性和质量管理等。1947 年，由丹捷格（George Dantgig）提出的求解线性规划问题的单纯形法是运筹学发展史上最重要的进展之一。其二，由于电子计算机的迅猛发展和广泛应用，使得运筹学的方法论能成功地、及时地解决大量经济管理中的决策问题。计算机的发展推进了运筹学的发展、普及和应用，使得运筹学不仅仅为“运

作研究"小组那样的专家所掌握和使用,也成为广大管理工作者进行最优决策和有效管理的常用工具。这促进了运筹学有关理论和方法的研究和实践,使得运筹学迅速发展并逐步成熟起来了。

1.2 运筹学的性质和特点

运筹学是一门应用科学,至今还没有统一且确切的定义。莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)曾对运筹学下过定义:"为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时,提供以数量化为基础的科学方法。"它首先强调的是科学方法,其含义不单是某种研究方法的分散和偶然的应用,而是可用于整个一类问题上,并能传授和有组织地活动。它强调以量化为基础,必然要运用数学。但任何决策都包含定量和定性两方面,而定性方面又不能简单地用数学表示,如政治、社会等因素,只有综合多种因素的决策才是全面的。运筹学工作者的职责是为决策者提供量化分析,指出那些定性的因素。关于运筹学的另一定义是:"运筹学是一门应用科学,它广泛运用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者做出最优决策提供定量依据。"这一个定义表明运筹学具有多学科交叉的特点,如综合运用经济学、心理学、物理学、化学中的一些方法。运筹学强调最优决策,"最"则过分理想了,在实际生活中往往用"次优""满意"等概念代替"最优"。因此,运筹学的又一定义是:"运筹学是一种给出问题坏的答案的艺术,否则的话问题的结果会更坏。"

根据以上定义,可以看出运筹学有以下几个基本特点:

(1)科学性。是在科学方法论的指导下在一系列规范化步骤下进行的,它是广泛利用多种学科的技术知识进行的研究。运筹学不仅仅涉及数学,还要涉及经济科学、系统科学、工程物理科学等其他学科。

(2)系统性。运筹学研究问题是从系统观点出发的,它研究全局性的问题,研究综合优化的规律,是系统工程的基础。系统的整体优化是运筹学系统性的一个重要标志。一个系统一般由很多子系统组成,运筹学不是对每一个子系统的每一个决策行为孤立地进行评价,而是把相互影响的各方面作为统一体,从总体利益的观点出发,寻找一个优化协作方案。

(3)数学模型化。运筹学是一门以数学为主要工具、寻求各种问题最优方案的学科,所以是一门研究优化的科学。随着生产管理的规模日益庞大,其数量关系也更加复杂,引进数学研究方法对这些数量关系进行研究,是运筹学的一大特点。

(4)跨学科性。由有关的各种专家组成的进行集体研究的运筹小组,综合应用多种学科知识来解决实际问题,是早期军事运筹研究的一个重要特点。这种组织和这种特点一直在一些地方和一些部门以不同的形式保留下来,这往往是研究和解决实际问题的需要。从世界范围看,运筹学应用的成败及应用的广泛程度,无不与这样的研究组织及其工作水平有关。

(5)实践性。运筹学以实际问题为分析对象,通过鉴别问题的性质、系统的目标以及

系统内主要变量之间的关系,利用数学方法达到对系统进行最优化的目的。更为重要的是,分析获得的结果要能被实践检验,并被用来指导实际系统的运行。在运筹学学术界,非常强调运筹学的实用性和对研究结果的执行。

1.3 运筹学的应用步骤

运筹学在解决大量实际问题过程中形成了自己的应用步骤:

(1)提出和形成问题。即要弄清问题的目标、可能的约束、问题的可控变量以及有关参数,并搜集有关资料。

(2)建立模型。即把问题中可控变量、参数和目标与约束之间的关系用一定的模型表示出来。

(3)求解。用各种手段(主要是数学方法,也可用其他方法)对模型求解。解可以是最优解、次优解、满意解。复杂模型的求解需用计算机,解的精度要求可由决策者提出。

(4)解的检验。首先检查求解步骤和程序有无错误,然后检查解是否反映现实问题。

(5)解的控制。通过控制解的变化过程决定是否对解进行一定的改变。

(6)解的实施。它是指将解用到实际中必须考虑到实施的问题,如向实际部门讲清解的用法,以及在实施中可能产生的问题和修改。

以上过程应反复进行,直至完全达到目的。

1.4 运筹学在管理中的应用

运筹学在管理中的应用情况,可以从两个方面来观察。一方面是在管理中运筹学的应用所涉及的方面;另一方面是企业实际使用运筹学知识的频率。首先来看一看,在管理中运筹学的应用所涉及的方面。

(1)生产计划。使用运筹学方法从总体上确定适应需求的生产、贮存和劳动力安排等计划,以谋求最大的利润或最小的成本,主要用线性规划、整数规划以及模拟方法来解决此类问题。例如,巴基斯坦一家重型制造厂用线性规划安排生产计划,节省了10%的生产费用。此外,还有运筹学在生产作业计划、日程表的编排、合理下料、配料问题、物料管理等方面的应用。

(2)库存管理。存储论应用于多种物资库存量的管理,能确定某些设备的合理的能力或容量以及适当的库存方式和库存量。例如,美国某机器制造公司应用存储论之后节省了18%的费用。

(3)运输问题。用运筹学中有关运输问题的方法,可以确定最小成本的运输的线路、物资的调拨、运输工具的调度以及建厂地址的选择等。例如,印度巴罗达市对公共汽车行车路线和时刻表进行研究改进后,该市公共汽车载运系数提高了11%,减少了10%的车辆使用率,既节省了成本又改善了交通拥挤的状况。又如,美国柯达公司在选厂址方

面，运用运筹学方法取得了很好的效果。

(4)人事管理。可以用运筹学方法对人员的需求和获得情况进行预测；确定适合需要的人员编制；用指派问题对人员进行合理分配；用层次分析法等方法确定人才评价体系；等等。

(5)市场营销。可把运筹学方法用于广告预算和媒介的选择、竞争性的定价、新产品的开发、销售计划的制订等方面。例如，美国杜邦公司从20世纪50年代起就非常重视运筹学在市场营销上的应用。

(6)财务和会计。这里涉及预测、贷款、成本分析、定价、证券管理、现金管理等，使用较多的运筹学方法为统计分析、数学规划、决策分析等。

另外，运筹学还成功地应用于设备维修、更新和可靠性分析，项目的选择与评价，工程优化设计，信息系统的设计与管理，以及各种城市紧急服务系统的设计与管理中。

我国从1957年开始把运筹学应用于交通运输、工业、农业等领域，并取得了很大的成功。例如，为了解决粮食的合理调运问题，粮食部门提出了“图上作业法”；为了解决邮递员合理投递问题，管梅谷提出了“中国邮路问题”的解法；在工业生产中推广了合理下料、机床负荷分配等有关的方法；在纺织业中用排队论方法解决了细纱车间劳动组织以及最优拆布长度等问题；在农业中也研究了作业布局、劳动力分配和打麦场设置等问题；在钢铁行业，投入产出法首先得到了应用；统筹法的应用在建筑业、大型设备维修计划等方面也取得了长足的进展；优选法也在我国得到了大力推广；排队论、图论在研究矿山、港口、电信以及线路设计方面都得到了极大的应用。

国际运筹与管理科学协会(INFORMS)以及下属的管理科学实践学会(College for the Practice of the Management Sciences)主持评定的弗兰茨厄德曼奖久负盛名。该奖是为奖励运筹学在管理中的应用取得卓越的成就而设立的。该奖每年评选一次，在对大量富有竞争力的入围者进行严谨的评审后，一般会将该奖授予六位优胜者。这些获奖项目的文章都于第二年发表在著名刊物《Interface》新年第一期上。表1-1列出了发表在该期刊上的部分获奖项目。

表1-1　获奖项目

组织	应用	效果
联合航空公司	最满足乘客需求的前提下，以最低成本进行订票及机场工作班次安排	每年节约成本600万美元
Citgo石油公司	优化炼油程序及产品供应、配送和营销	每年节约成本7 000万美元
荷马特发展公司	优化商业区和办公楼销售程序	每年节约成本4 000万美元
AT&T	优化商业用户的电话销售中心选址	每年节约成本4.06亿美元，销售额大幅增加
标准品牌公司	控制成品库存(制定最优再订购点和订购量，确保安全库存)	每年节约成本300万美元

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

表1-1(续)

组织	应用	效果
施乐公司	通过调整战略,缩短维修机器的反应时间并改进维修人员的生产率	生产率提高50%以上
保洁公司	重新设计北美生产和分销系统以降低成本并加快市场进入速度	每年节约成本2亿美元
法国国家铁路公司	制定最优铁路时刻表并调整铁路日运营量	每年节约成本1 500万美元,年收入大幅增加
Delta航空公司	优化配置上千个国内航线、航班来实现利润最大化	每年节约成本1亿美元
IBM	重组全球供应链,在保持最小库存的同时满足客户需求	每年节约成本7.5亿美元
Merit青铜制品公司	安装、统计销售预测和成品库存管理系统,改进客户服务	为客户带来更优质的服务
Taco Bell	优化员工安排,以最低成本服务客户	每年节约成本1 300万美元

由此可以看出,运筹学是一门非常实用的学科,它在经济建设和管理中的前景也是非常广阔的。

其次,可从企业实际使用的频率来看运筹学的应用情况。

美国学者福吉尼(Forgionne)在1983年对美国公司做的一份调查表如表1-2所示。

表1-2　美国运筹学方法使用频率调查表

方法	从不使用(%)	有时使用(%)	经常使用(%)
统计	1.6	38.7	59.7
计算机模拟	12.9	53.2	33.9
网络计划	25.8	53.2	21.0
线性规划	25.8	59.7	14.5
排队论	40.3	50.0	9.7
非线性规划	53.2	38.7	8.1
动态规划	61.3	33.9	4.8
对策论	69.4	27.4	3.2

从表1-2中可以清楚看到:

(1)各个企业使用运筹学方法的频率是不平衡的,有的经常使用,有的有时使用,而有的却从不使用。

(2)对于各种不同的运筹学方法,使用的程度也大不相同。从表1-2中可以看出,统计、计算机模拟、网络计划、线性规划、排队论是企业最常用的方法。

运筹学的使用情况还和公司的规模和所在行业有关。托马斯等人的研究表明,大公

司、大企业使用运筹学方法的比例较高,期中88%的大公司使用预测方法,超过50%的大公司把运筹学方法应用于生产计划制订、存储控制、资金预算和运输方面的工作。盖瑟(Gaither)的研究表明,在制造业中经常使用的运筹学方法为网络计划,其次为统计分析、模拟、线性规划。

运筹学方法在中国的使用情况如表1-3所示。对于中国企业使用运筹学的现状,我们对105家公司做了一个随机的调查,所得的结果是一致的。只是使用运筹学方法的企业的比例更低一些,这说明在我国推广运筹学在企业中的应用的担子更重、任务更艰巨。

表1-3　中国运筹学方法使用频率调查表

方法	从不使用(%)	有时使用(%)	经常使用(%)
统计	7.6	41.9	50.5
计算机模拟	57.1	24.8	18.1
网络计划	68.6	19.0	12.4
线性规划	52.4	38.1	9.5
排队论	66.7	23.8	9.5
非线性规划	67.6	24.8	7.6
动态规划	72.4	20.0	7.6
对策论	89.5	8.6	1.9

综上所述,无论在国内或国外,运筹学在管理中的应用前景都是非常广阔的,但是存在的问题也很多,还有大量的工作需要我们去做。

本书的目的就是要在企业管理者与运筹学之间架起一座桥梁,帮助企业的管理者进一步了解运筹学,告诉他们在管理工作中如何使用运筹学方法,更好地进行决策,从而创造出更高的效益。

1.5　运筹学在中国的发展趋势展望

运筹学自1957年引入中国,经过60年的快速发展,已经成为一门成熟的科学,对于解决实际生产生活的问题能够提供行之有效的解决方法。社会不断进步,新事物不断出现,国际环境日趋复杂,运筹学的发展也会伴随社会发展的步伐与时俱进,运筹学将在以下几个方面继续发挥它的重要作用:

1.5.1　运筹学与大系统

大系统是规模巨大、构成要素复杂、影响广泛、包含众多子系统的系统,即可被认为是一个有共同目的而有机结合起来的,具有内在联系的若干子系统的大集合体。随着生产的发展和科学技术的进步,出现了许多大系统,如电力系统、城市交通网络、数字通信

网、110 指挥系统、柔性制造系统、生态系统、水资源系统、社会经济系统等。这类系统的特点是规模庞大、结构复杂,而且地理位置分散。大系统性能的优化将产生巨大的经济效益或者社会效益。例如,110 指挥系统的优化可以挽救更多的生命,增加更多社会财富;交通运输系统的优化可以降低出行的成本,使得社会效益显著提高。

在大系统优化中,运筹学的知识将起到非常重要的作用。例如,考虑一个大型集团公司的运行管理问题时,它的运行涉及的因素很多,也很复杂,问题的规模很大,比如涉及工厂生产、货物库存、消费中心和消费区域等方面的管理。我们不能对各个环节孤立地进行研究和管理,必须把这些环节连接起来加以研究,以便获得一个全局性的运行管理系统。这就构成了一个典型的大系统优化问题。在此问题中,运筹学中的数学规划理论、存储论、运输问题、对策论及最优化方法等知识均有重要作用。

1.5.2 运筹学与信息化

信息化,就是在国民经济各部门和社会活动各领域普遍采用现代化信息技术,以便有效地开发和利用信息资源,大大提高决策水平、工作效率和创新能力。21 世纪,世界全面进入信息化时代,整个社会的构架将发生改变,整个社会的经济形态将由传统经济逐步转化为"知识经济",一个国家的信息化程度将被作为衡量一个国家生产力水平和综合国力的重要标志。

近年来,运筹学在新兴的信息技术领域的作用越来越明显。例如,在信息化制造领域中,会涉及管理运筹学、工业工程运筹学、随机运筹学和随机服务系统(排队论)等相关知识;在信息的处理与计算中,会涉及数学最优化、图论和组合优化、计算运筹学、随机运筹学等;在 Internet、宽带 IP 网络、电子商务领域,涉及数学最优化、计算运筹学、图论与组合优化等。

1.5.3 运筹学呈现出多学科交叉与融合的特点

运筹学研究的是人类对各种资源的运用及筹划活动,其研究目的在于了解和发现这种运用及筹划活动的基本规律,以便实现有限资源的最大收益来达到全局优化的目标。目前,由于社会系统的复杂性,运筹学的应用也越来越呈现出多学科交叉的特点。由于专家们来自不同的学科领域,具有不同的经验,增强了其发挥小组集体智慧、提出问题和解决问题的能力。这种多学科的协调配合在研究的初期,在分析和确定问题的主要方面,以及在选定和探索解决问题途径时,显得特别重要。在当前这个大数据、大系统化的社会背景下,几乎每个运筹学问题都会涉及多个领域、多个方面的知识,所以运筹学的发展需要多学科知识的支撑。

2 线性规划与单纯形法

线性规划是运筹学的一个重要分支。自 1947 年丹捷格(G. B. Dantzig)提出了一般线性规划问题求解的方法——单纯形法之后,线性规划在理论上趋向成熟,在实践中日益广泛与深入。特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后,线性规划的适用领域更为广泛了。从解决技术问题的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用。它已是现代科学管理的重要手段之一。查恩斯(A. Charnes)与库伯(W. W. Cooper)继丹捷格之后,于 1961 年提出了目标规划;艾吉利(Y. Ijiri)提出了用优先因子来处理多目标问题,使目标规划得到发展。近十多年来,斯·姆·李(S. M. Lee)与杰斯开莱尼(V. Jaaskelainen)应用计算机处理目标规划问题,使目标规划在实际应用方面比线性规划更广泛,更为管理者所重视。

2.1 线性规划问题

线性规划是研究在一组线性不等式或等式约束下使得某一线性目标函数最大(或最小)的极值问题。下面我们通过几个例子来介绍线性规划问题的数学模型。

【例 2.1】某工厂生产Ⅰ、Ⅱ两种型号的计算机,生产一台Ⅰ型和Ⅱ型计算机,所需要原料分别为 2 个单位和 3 个单位,需要的工时分别为 4 个单位和 2 个单位。在计划期内可以使用的原料为 100 个单位,工时为 120 个单位。已知生产每台Ⅰ型和Ⅱ型计算机可获得的利润分别为 6 个单位和 4 个单位(见表 2-1),试确定获利最大的生产方案。

表 2-1　某工厂生产情况

设备	Ⅰ	Ⅱ	计划期内可用资源
原料	2	3	100
工时	4	2	120
利润	6	4	

这问题可以用以下的数学模型来描述,设 x_1、x_2 分别表示在计划期内产品Ⅰ、Ⅱ的产量。因为原料的总量为 100 个单位,这是一个限制产量的条件,所以在确定产品Ⅰ、Ⅱ的产量时,要考虑不超过原料的总量,即可用不等式表示。

$$2x_1 + 3x_2 \leq 100$$

同理,工时限制可用不等式表示为:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 120$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下,如何确定产量 x_1、x_2 以得到最大的利润。若用 z 表示利润,这时 $z = 6x_1 + 4x_2$。综合上述,该计划问题可用数学模型表示为:

目标函数: $\max z = 6x_1 + 4x_2$

满足约束条件: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

【例 2.2】某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司乘人员数如表 2-2 所示,设司乘人员在各时间段一开始上班,需要连续工作 8 小时,问该公司线路至少应配备多少名司乘人员。列出该问题的数学模型。

表 2-2　　某公交线路每天各时间段内所需司乘人员

班次	时间	所需人数(人)
1	6:00—10:00	60
2	10:00—14:00	70
3	14:00—18:00	60
4	18:00—22:00	20
5	22:00—02:00	20
6	02:00—06:00	30

分析:设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 为各班新上班人数,考虑到在每个时间段工作的人数既包括在该时间段上班的人又包括在上一个时间段上班的人员,按所需人员最少的要求可列出本例的数学模型。

目标函数: $\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

满足约束条件 $\begin{cases} x_6 + x_1 \geq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 70 \\ x_2 + x_3 \geq 60 \\ x_3 + x_4 \geq 20 \\ x_4 + x_5 \geq 20 \\ x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$

上面两例优化模型,都具有下述特征:

(1) 每个问题都用一组未知变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示所求方案,通常这些变量都是非负的,被称为决策变量。

(2) 存在一组约束条件,这些约束条件都可以用一组线性等式或不等式表示。

(3) 都有一个要求的目标,并且这个目标可表示为一组决策变量的线性函数,被称为

目标函数。目标函数可以是求最大,也可以是求最小。

具有上述特征的数学模型就被称为线性规划模型。其一般形式为:

目标函数: $\max(\min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (2-1)

$$\text{满足约束条件}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{11}x_2+\cdots+a_{11}x_n \leq (=) \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leq (=) \geqslant b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leq (=) \geqslant b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

(2-2)

(2-3)

在线性规划的数学模型中,式(2-1)被称为目标函数;式(2-2)、式(2-3)被称为约束条件;式(2-3)也被称为变量的非负约束条件。

2.2 两变量线性规划的图解法

图解法简单直观,有助于了解线性规划问题求解的基本原理。现对下例问题用图解法求解。

【例 2.3】某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品,已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗,如表 2-3 所示。

表 2-3　　某工厂生产Ⅰ、Ⅱ两种产品的情况

设备	Ⅰ	Ⅱ	可用资源
所需台时(台时)	1	2	8
原料 A(千克)	4	0	16
原料 B(千克)	0	4	12

该工厂每生产一件产品Ⅰ可获利 2 元,每生产一件产品Ⅱ可获利 3 元,问:应如何安排才能使该工厂获利最多?这问题可以用以下的数学模型来描述,设 x_1、x_2 分别表示在计划期内产品Ⅰ、Ⅱ的产量。因为设备的有效台时是 8 台时,这是一个限制产量的条件,所以在确定产品Ⅰ、Ⅱ的产量时,要考虑不超过设备的有效台时数,即可用不等式表示为:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

同理,因原材料 A、B 限量,可以得到以下不等式:

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_2 \leq 12$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下,如何确定产量 x_1、x_2 以得到最大的利润。若用 z 表示利润,这时 $z = 2x_1 + 3x_2$。综上所述,该计划问题可用数学模型表示。

目标函数: $\max z = 2x_1 + 3x_2$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com