常微分方程基本问题与注释

韩茂安 编著

科学出版社

常微分方程基本问题与注释

韩茂安　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者在上海师范大学主讲数学专业本科生常微分方程课程的教学与学习配套用书，所采用教材是作者与合作者所编写的《常微分方程》(高等教育出版社). 本书的主要内容可分为两部分. 一部分是针对教材的每一节内容列出了五个基本问题，供学生课前预习时参考，通过问题引领，有的放矢地让学生自学教材，理解了这些问题就领会了所学内容. 另一部分是作者根据该节内容和自己的理解与体会所写的主要内容以及具有鲜明特色的注释，帮助学生正确理解和掌握课本知识，此外，各节配备了习题及其答案或提示，各章还补充了典型例题并配备了练习题，以及对重点难点所做的总结与思考.

本书是作者在长期从事常微分方程教学与课程改革的基础上整理多年的积累和经验写作而成的，可作为高等院校理工科各专业本科生的学习材料，也可作为从事常微分方程教学高校教师教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程基本问题与注释/韩茂安编著. —北京：科学出版社，2018.1
ISBN 978-7-03-055048-4

Ⅰ.①常… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①常微分方程 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 265196 号

责任编辑：张中兴 梁 清 / 责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 1 月第二次印刷 印张：9 1/4
字数：187 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

大学教育的中心任务是培养有知识有能力有素质的高素质人才，在实施教育的过程中最关键最重要的环节当属课程教学. 课程教学追求的是教学质量和学习效果. 古往今来，许多学者都十分重视教学教法和学习方法的研究，一些著名学者对教与学也有专门的论述. 孔子曾说“学而时习之，不亦说乎？”“学而不思则罔”. 郑板桥认为“读书求精不求多”. 华罗庚强调学习“要循序渐进，读书先薄到厚，再厚到薄”. 钱伟长要求“大学生一定要学会自学，研究生要会看论文，博士研究生要有满肚子的问题”. 李大潜主张数学专业的本科生和研究生，学习数学要坚持“四字诀”，即“少、慢、精、深”. 这些论述都是学习之法. 关于如何施教，德国教育家第斯多惠说过“教学的艺术不在于传授本领，而在于激励、唤醒和鼓舞”. 我国教育家陶行知指出“我以为好的先生不是教书, 不是教学生, 乃是教学生学”. 荷兰数学家弗赖登塔尔则认为“数学教学方法的核心是学生的再创造”. 然而，在施教过程中如何能够体现出这些教育理念呢？

传统的教学模式是老师讲课为主，优点是学生学习较为轻松，考试成绩较好，缺点是学生参与教学的程度较低，学生能力培养的进程较慢. 最近几年，国内外教育界将现代传媒手段应用于课堂教学，其中一种就是所谓的翻转课堂教学模式. 这种教学模式颠覆惯用的传统教学模式，将主动预习引入课堂之前，将指导、答疑、讨论等引入课堂之中，学生从以前的被动听讲改为主动学习. 这种新模式更好地体现了教学的“激励、唤醒和鼓舞”、“教学生学”和“再创造”. 当然，翻转课堂在具体操作上并没有统一的模式，这不但因课而异，因人 (教师) 而异，也因地 (学校) 而异. 显然，在考试成绩方面翻转课堂模式一般比不过传统的教学模式，而在学习能力与创新思维的培养方面，翻转课堂则具有独特的优势，它注重的是潜能的引导和发挥，而这正是优秀人才所渴望的，因此，翻转课堂在众多大学都有或多或少的实践，并收到了良好效果.

十多年来，作者先后在上海交通大学数学系和上海师范大学数学系坚持给本科生进行常微分方程课程的教学，在最近几年的施教过程中大胆改革，尝试新的教学模式，其关键做法与“翻转课堂”有异曲同工之效. 下面做一简单介绍.

该课程所用文献是作者与合作者主编的《常微分方程》(文献 [1])，采用下面的方法进行教学.

1. 学生根据老师提供的学习材料《常微分方程基本问题与注释》，对《常微分方程》教科书进行课前预习，并在预习每一节的内容之后思考、回答《常微分方程

基本问题与注释》中列出的相关"基本问题"，同时对书中可能的疑难公式或推理做标记，并准备好在课上提问老师或者回答老师的提问.(这是必须做的，也是关键的一步.)

2. 每堂课 (2 节课，每节课 45 分钟) 这样安排教学.

(1) 当堂自学与提问 (35 分钟). 学生在课前预习的基础上当堂自学，随时举手提问，老师当堂对提问的同学进行辅导答疑.

(2) 要点难点讲解 (35 分钟). 首先，解释学生提出的共性问题. 然后，结合"基本问题"，讲述当次课的要点与难点，特别是做思路和难点分析.

(3) 师生互动 (20 分钟). 回到"基本问题"或老师偶然想到的问题，提问学生，并对学生的回答做点评，进一步答疑解惑. 最后布置作业.

经思考作者认为还有另一种可能的模式：

(1) 要点难点讲解 (60 分钟). 即结合"基本问题"，讲述当次课的要点与难点，特别是做思路和难点分析.

(2) 师生互动 (30 分钟). 即先由对尚不明白的内容举手提问，老师给予辅导答疑. 然后老师提问学生，并对学生的回答做点评，进一步答疑解惑. 最后布置作业.

3. 根据学生人数进行分组，每组选一优秀学生为组长. 组长的主要任务是：收集小组的问题并反馈给老师、协助老师解答同学的问题、负责组织所在小组的"每章小结"评比选出一位代表本小组参加全班每章一次的评比活动，就是做 PPT 汇报"每章小结"，全班投票选出优胜者 (出现并列第一时，由老师决定取其一还是取其二)，称之为"章冠军". 小结内容包括：本章主要内容 (概念、定理、方法、重点难点)、题目讲解和通过查阅其他文献后对本章内容的补充. 每个小组代表奖励 8 分，每个章冠军奖励 15 分.

上述教学过程可以概括为：先通过问题引领让学生以研究的方式学习课程内容，后通过老师讲解要点提炼思想来加深理解，再通过小结评比激发学生学习兴趣. 我们不妨将这种教学方法叫做"问题主导的研究式教学模式". 这种教学模式成功与否与同学们的配合程度密切相关. 欲有好的教学效果，广大同学必须重视课前预习，并在课堂上积极发问，还需要各小组成员齐心协力合作完成每章小结.

作者要求并希望学生做到以下几点：课前认真预习，课堂积极提问，专心听讲并适当做笔记，课后把书读懂读透，书中推导有跳跃之处要思考并补上过程，作业要按时独立完成. 关于看书，建议课前先看一遍常微分方程教材，再来看《常微分方程基本问题与注释》中的"基本问题"，带着这些问题，再去看教材与《常微分方程基本问题与注释》中的"主要内容与注释"等，并标出疑难之处，以备课堂提问. 如果学生能对每个问题给出自己的书面回答，那无疑对自学能力的培养是非常有益的. 同时，作者还鼓励学生选一两本常微分方程的其他文献，作为参考书经常查阅.

本书初稿的编写历时五年，且在使用过程中不断充实和改进. 在写作过程中得到李继彬教授的不断支持和鼓励，在初稿的使用过程中同事同行丁玮、邢业朋、尚德生和田云等教授提出了有益的修改意见，同事邢业朋教授和研究生尚新宇同学为本书部分习题提供了答案. 作者在常微分方程的多年教学中也参考了一部分优秀同学的作业. 在最后阶段的出版过程中，北京大学的李承治教授和科学出版社的张中兴老师提出了宝贵的修改意见，最后科学出版社的梁清老师又对书稿清样进行了认真的校对与规范. 作者在此向他们一并表示由衷的感谢!

作者还有一个目的，就是希望读者通过学习本书中常微分方程课程基本知识的梳理、疑难内容的解读以及教材内容深处的引申与评注等内容，能够发现问题、思考问题和解决问题，切实有效地培养他们的思考习惯、思维能力和创新精神.

限于作者水平有限，本书存在诸多不足，恳请广大读者批评指正.

韩茂安

2017 年 7 月

目　　录

第 1 章　一阶微分方程

1.1　微分方程和解

1.1.1　基本问题

1. 什么叫做微分方程，与之相关的概念有哪些？

2. n 阶常微分方程的一般形式是什么，它的解是怎么定义的，与解相关的概念有哪些？

3. 显式解的定义区间与相应的微分方程的定义域有什么关系？特别地，微分方程 $xy' = 4y$ 与 $y' = \dfrac{4y}{x}$ 是不一样的微分方程吗，前者有通解 $y = Cx^4$, 它也是后者的通解吗，后者的通解应怎样写？

4. 如何理解隐式解与隐式通解，通解包含所有解吗？

5. 查阅有关文献，找出 n 阶常微分方程的通解中出现的 n 个任意常数应满足什么条件才能体现它们之间的“独立性”？

1.1.2　主要内容与注释

常微分方程是数学学科各专业的一门重要的基础课，学这门课需要掌握微积分学和线性代数的基本知识, 其内容在物理、生物、工程技术等许多其他学科中有广泛的应用. 此外，常微分方程的现代理论又是现代数学的一个重要分支. 因此，学好常微分方程十分重要.

本节主要内容有两个方面. 一个方面是简单描述了有生物学和物理学背景的人口增长模型与加速度–速度模型，它们一个是一阶常微分方程，另一个是二阶常微分方程. 推导出这两个简单方程旨在对常微分方程的来源和应用背景有一个基本的认识. 另一个方面的内容是给出了常微分方程最基本的概念，例如常微分方程的阶与解. 需要重点理解的是解的概念，包括通解，特别是隐式通解.

基本概念一定要正确理解并熟记，可能一下子做不到，但多看书、勤思考，基本概念就能够理解和掌握了.

下面对本节出现的主要概念该如何理解做一些阐述.

在线性代数中我们学过线性方程，它是一种特殊的代数方程. 在数学分析中，我们学过隐函数定理，它给出了一个函数方程存在唯一局部解的充分条件. 这一节我们要介绍一类新型的方程，叫做微分方程，它是**含有未知函数的导数的等式**. 仔

细想想这个定义的措词是不是不能再简单了，含义是不是明确了？与微分方程相关的概念有下面这些.

常微分方程：微分方程里所出现的未知函数都是同一个自变量的函数.

偏微分方程：不是常微分方程，或者等价地，至少含有两个自变量的微分方程，此时出现的导数一定是偏导数.

微分方程的阶数：未知函数的导数的最高阶数.

根据定义，n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

其中 F 是一个已知的 $n+2$ 元函数，其定义域一般是 $\mathbf{R}^{n+2}$ 中的某一区域. 常见的 n 阶常微分方程的形式是下面所谓的 n 阶显式方程：

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$$

其中 f 是一个已知的 $n+1$ 元函数.

常微分方程又分为线性常微分方程与非线性常微分方程. 详细给出线性常微分方程的定义还真不容易，各种文献也说法不一. 严格说来，我们说常微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 是线性的，如果函数 F 可以写成

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = F_0(x) + F_1(x, y, y', \cdots, y^{(n)}),$$

其中 F_1 关于 $(y, y', \cdots, y^{(n)})$ 是线性函数，即如果令 $Y = (y, y', \cdots, y^{(n)})$, 并把 F_1 记为

$$F_1(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = F_1(x, Y),$$

则对任何常数 α, β, 以及任何 $n+1$ 维向量 Y_1 与 Y_2,

$$F_1(x, \alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha F_1(x, Y_1) + \beta F_1(x, Y_2)$$

都成立. 于是，n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)y = g(x).$$

对“解”的概念我们也不陌生，代数方程有解的概念，函数方程有解的概念，微分方程也有解的概念，这些概念的共性是“满足”方程，或者说将它们代入方程之后就得到一个恒等式，但由于方程的类型不一样，相应的解的属性也不一样. **n 阶常微分方程的解一定是一个在其定义区间上处处 n 次可微的函数**. 这里，我们只讨论解是实函数的情况，以后会涉及复值解的概念. 与解相关的概念有**显式解**、**隐式解**、**平凡解**、**特解**、**通解**、**初值问题**、**初值条件**、**积分曲线**等.

通解是含有任意常数的解，任意常数的个数与常微分方程的阶数是一致的.

关于解的定义区间，是值得思考和理解清楚的. 如果 $y=\phi(x)$, $x\in I$ 是微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

的解，那么这个解的定义区间 I 应该满足这样的性质：当 $x\in I$ 时点 $(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))$ 属于函数 F 的定义域.

按照这个原则，区间 I 未必是解 ϕ 的“最大”定义区间.

为说明这个问题，我们来看一个简单的例子. 易知方程

$$xy'-4y=0$$

有通解 $y=Cx^4$, 这个通解的定义区间就是整个实轴. 将上述一阶微分方程变形如下 (注意，变形的条件是 $x\neq 0$)：

$$y'-\frac{4y}{x}=0,$$

此时，$y=Cx^4$ 仍然是通解，但其定义区间 I 变成 $x>0$ 或 $x<0$, 即 $I=(0,+\infty)$ 或 $I=(-\infty,0)$(因为根据常微分方程解的定义，解的定义域是一个区间，而不是两个或多个区间的并). 因此，微分方程

$$xy'-4y=0$$

与

$$y'-\frac{4y}{x}=0$$

应当看成是不同的微分方程，因为它们的定义域不同. 目前，我们的重点是放在求解上，而对解的定义区间往往不明确指出.

我们不妨回顾一下函数的概念. 完整的函数概念包含三个因素：对应法则、定义域、值域，起决定作用的是前两者，因为一旦对应法则和定义域确定了，值域就随之而定了. 两个函数相等就意味着对应法则和定义域同时相等. 因此，如果同一个对应法则作用于两个不同的集合 (定义域) 上，就相应的得到两个函数. 例如，

$$y=x+1,\quad x\in(0,1)\quad 与\quad y=x+1,\quad x\in(0,1]$$

就是两个不同的函数.

一个 n 阶常微分方程与它的解 (显式解、隐式解、通解等) 有这样的关系：通过对这个方程运用积分的手段等可以获得这个解；反之，对这个解运用微分的手段等可以获得这个方程.

n 阶常微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的通解一定含有 n 个任意常数，设这个通解由 $G(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$ 给出，为体现这 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 一定是互相独立的，它们须满足条件

$$\det\frac{\partial(G,G_x,\cdots,G_x^{(n-1)})}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0.$$

今后在求通解时，所得到的通解都会满足这一条件，因此就不再去验证它了.

关于解，我们再指出两点，首先是通解未必包含方程的所有解，也就是说，有的方程会出现一些特别的解，这些解不能由通解来获取. 例如，一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^nf(x),\quad 0<n<1$$

的通解就不能包含所有解. 其次，初值条件或初始条件是初值问题的定解条件. 就单个方程来说，初值问题中函数及其导数的初值的个数 (也就是等式的个数) 与初值问题中常微分方程的阶数是一致的. 例如，n 阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

的初值条件是

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}=y_{n-1},$$

这个条件含有 n 个等式. 要保证所述微分方程有满足这个条件的解，一个基本要求是：点 $(x_0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 需要属于函数 f 的定义域. 至于初值问题是不是有解, 何时有唯一解，将在以后讨论.

另外，每一个解对应着一条积分曲线. 例如，直接验证可知一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-x$$

有通解 $y=\mathrm{e}^xC+x+1$, 对每个实数 C, 它在平面上确定一条积分曲线

$$L_C=\{(x,y)|y=\mathrm{e}^xC+x+1,\ x\in\mathbf{R}\}.$$

这实际上是一个单参数曲线族，其中 C 为参数 (可取任一实数)，而且这族曲线充满了整个平面. 易见，这族曲线中只有一条是直线，即 $y=x+1$.

1.1.3 习题 1.1 及其答案或提示

(Ⅰ) **习题 1.1**

1. 指出下面微分方程阶数以及它们是不是线性方程.

(1) $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$;

(2) $x\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-2\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4+y=0$;

(3) $yy'+2y=1+x^2$;

(4) $x^3y^{(4)}-x^2y''+4xy'-3y=0$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2}$;

(6) $x^2\mathrm{d}y+(y-xy-x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=0$;

(7) $(\sin x)y'''-(\cos x)y'=2$.

2. 验证给定函数是相应微分方程在特定区间上的解 (其中 C 或 C_i 表示常数):

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=0, y=C\mathrm{e}^{x^2}, -\infty<x<\infty$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{|y|}, y=x|x|, -\infty<x<\infty$;

(3) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1, y=\ln(Cx), x>0, (C>0)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+x^3}, y=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t, -1<x<\infty$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\sqrt{1+x^6}, y=\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t, -\infty<x<\infty$;

(6) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4y=0, y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x, -\infty<x<\infty$.

3. 确定 m 的值使得下面方程存在给定形式的解:

(1) $y''-5y'+6y=0, y=\mathrm{e}^{mx}$;

(2) $y''+10y'+25y=0, y=\mathrm{e}^{mx}$;

(3) $x^2y''-y=0, y=x^m$;

(4) $x^2y''+6xy'+4y=0, y=x^m$;

(5) $y'=(y\ln y)/x, y=m\mathrm{e}^x$;

(6) $y'=3y, y=m\mathrm{e}^{mx}$.

4. 确定以下列单参数函数族为通解的微分方程:

(1) $y=C\mathrm{e}^{3x}$;

(2) $y^2=Cx$;

(3) $x^2+y^2=C^2$;

(4) $x\ln y=C$.

5. 确定以 $y=y(x)$ 为解的微分方程:

(1) $y(x)$ 的图像在 (x,y) 处的斜率等于 (x,y) 到 $(0,0)$ 的距离;

(2) $y(x)$ 的图像在 (x,y) 处的切线通过点 $(x+y,x+y)$.

(Ⅱ) **答案或提示**

1. (1) 2 阶线性；(2)3 阶非线性；(3)1 阶非线性；(4)4 阶线性；(5)2 阶非线性；(6)1 阶线性；(7)3 阶线性.

2. 利用解的定义.

3. (1)$m=2,3$; (2)$m=-5$; (3)$m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; (4)$m=-1,-4$; (5)$m=1$; (6)$m=0,3$.

4. 提示：对所给函数族关于自变量求导，然后消除任意常数.

(1) $y'=3y$;

(2) $2xy'=y$;

(3) $x+yy'=0$;

(4) $y\ln y+xy'=0$.

5. (1)$y'=\sqrt{x^2+y^2}$; (2)$yy'=x$.

1.2　积分法与可分离变量方程

1.2.1　基本问题

1. 如何求可分离变量方程的通解与所有解？

2. 试分别给出通解是所有解, 通解不是所有解的例子.

3. 试作出微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2}$ 的积分曲线示意图，并由此来理解其通解的定义区间.

4. 什么是齐次方程，如何求齐次方程的通解？

5. 如何 (分多种情况) 求形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{ax+by+m}{cx+ey+n}\right)$ 的一阶微分方程的通解？请给出分类总结.

1.2.2　主要内容与注释

本节介绍了几类一阶常微分方程的求解方法，主要内容可分为两部分: 一部分是可分离变量方程的求解方法，求解问题转化为求积分问题；另一部分是能够通过适当的变换转化为可分离变量方程之若干方程的求解，关键的一步是根据方程特点寻找合适的变量变换.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)h(y)$$

的方程称为可分离变量方程. 其求解过程可分为三步.

(1) 求特解，即求出使 $h(y)=0$ 的常数解；

(2) 变形 (分离变量)，即对 $h(y)\neq 0$, 方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 积分，即对上述方程两边求积分可得通解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

或写成

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x+C,$$

其中 $x,x_0\in I$, $y,y_0\in J$, I 与 J 分别是函数 f 与 h 的定义区间. 这里注意，数 x_0 与 y_0 可以任意取定，而且容易验证，它们无论具体取何值，上式都是通解. 上面两式给出的解在形式上有所不同，但本质上是一个 (因为任意常数 C 可以任意取值).

理论上，通过直接积分法就可以求出通解，而其所有解就是通解加上由方程 $h(y)=0$ 所得的常数解. 常数解可能存在 (一个或多个)，也可能不存在. 很显然，求解这类方程的关键就是数学分析中学过的积分方法. 然而，重要的并不是求出显式的积分，而是求解微分方程的方法和思路.

容易求出可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+x}$$

的通解，即 $y=C(1+x)$. 这里应当注意，这个通解的定义域是 $1+x>0$ 或 $1+x<0$. 又易知，方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-y^2}$$

的通解是 $y=\sin(x+C)$, 而从其求解过程可知应该有 $-\dfrac{\pi}{2}<x+C<\dfrac{\pi}{2}$. 然而，再观察原方程，可知上述通解的定义域可以放宽到 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x+C\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 请思考：这个定义域还能再放宽吗？事实上，单就这个通解而言，其定义域不能再放宽了. 换句话说，如果定义域再放宽，则所得的通解就是另外一种形式. 事实上，我们可以给出这一方程分段形式的通解 (对原通解扩充而成)，即

$$y=\begin{cases}-1, & x+C\leqslant -\dfrac{\pi}{2},\\ \sin(x+C), & -\dfrac{\pi}{2}<x+C<\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x+C\geqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

其定义域是整个实轴.