计算技术

（内部刊物）

计算数学专刊

1~2

一九七七

《计算技术》编辑部

毛 主 席 语 录

我们一[illegible]国内国外的一切积极的[illegible]积极因素，全部调动起来，把我国建[illegible]成为一个强大的社会主义国家。

抓革命，促生产，促工作，促战备。

前　　言

随着科技事业的迅猛发展，对电子计算机提出了迫切的要求。目前，电子计算机的应用比十年前大为普及，因而各行各业对计算方法和程序设计的需要亦愈来愈迫切。为了适应形势发展的需要，更好地推广和普及电子计算机的应用，在目前计算方法中文资料缺乏的情况下，我们应一些读者的要求，重新修改了《电子计算机上常用数值方法汇编》，在本刊发表。

《电子计算机上常用数值方法汇编》，是一九七三年编写印行的。由于我们的解题经验较少，理论水平较低，使该书存在不少缺点和错误。在这次修改中，就内容来看，除个别的有所增减外，没有大的变动。主要着眼于，叙述尽量通俗易懂，格式尽量一致。凡已发现的错误均作了改正。对每个方法一般都附有一个程序，这是用以说明如何应用所述的方法的。考虑到目前标准程序较多，故没有在程序上花更多功夫。在实际选用程序时，希望不要受这些程序的限制，可以参考一些标准程序手册。

本书所讨论的方法仅仅是电子计算机上常用方法的一小部分。例如，它没有关于偏微分方程的解法、积分方程和积微分方程的解法等，特别是缺少最近几年出现的新方法，如有限元法、快速傅氏变换等。因此，我们深感本书的内容和它的名称不符。我们的想法是，将来再编写本书的第二册，搜集一些未包括在本书中的常用方法，特别是一些新方法。鉴于此点，我们便没有改换书名。

由于我们的水平和能力所限，本书虽经修改，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

作　　者

电子计算机上常用数值方法汇编

目　　录

第四章　常微分方程的数值解法

第五章　其　他

第一章　插值法、数值积分

1. 拉哥朗日插值

§1　功　　能

设有已知函数$y=f(x)$在$x_0,x_1,\cdots,x_n$上的值$y_0,y_1,\cdots y_n$，此时，我们可以很快地写出n次拉哥朗日插值多项式，其形式比其他插值多项式更为直观。

§2　数　学　讨　论

2·1　凡德尔蒙得（vandermonde）行列式

行列式

$$(1)\qquad w(x_0,x_1,\cdots\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots\cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots\cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

称做由数组$x_i(i=0(1)n)$所组成的$n+1$阶凡德尔蒙得行列式。该行列式具有性质：1）x_i和x_k（$i\neq k$）互换相当于两列互换，因而行列式之值变号；2）若$x_i(i=0(1)n)$中有相等的，则行列式等于零。

在（1）中以x替代x_n，可得到

$$(2)\qquad w(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$
$$A=w(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}).$$

递推关系式如下：

$$(3)\qquad \begin{cases} w(x_0,x_1)=x_1-x_0, \\ w(x_0,x_1,x_2)=w(x_0,x_1)(x_2-x_0)(x_2-x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ w(x_0,x_1,\cdots,x_n)=w(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) \\ \qquad =\prod\limits_{p<q}^{0-n}(x_q-x_p). \end{cases}$$

由上式不难推断，若诸数$x_i(i=0(1)n)$彼此互异，则凡德尔蒙得行列式不等于零。

2·2　插值多项式的推导

设有$n+1$个点$(x_i,y_i)(i=0(1)n)$。求一n次多项式$p_n(x)$，使它满足

$$(4)\qquad p_n(x_i)=y_i,\quad i=0(1)n.$$

设该多项式为

$$(5)\qquad p_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,$$

则由（4）有

$$(6)\quad \begin{cases} c_0 + c_1x_0 + \cdots + c_nx_0{}^n = y_0, \\ c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_1{}^n = y_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1x_n + \cdots + c_nx_n{}^n = y_n. \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵的行列式就是 $w(x_0, x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ （只要 x_i 互异），因此存在唯一解 c_i，$i = 0(1)n$.

从（5）和（6）中消去$c_i(i = 0(1)n)$ 相当于增广行列式

$$\begin{vmatrix} p_n(x) & 1 & x & x^2 \cdots x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0{}^2 \cdots x_0{}^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1{}^2 \cdots x_1{}^n \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ y_n & 1 & x_n & x_n{}^2 \cdots x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

由此得到

$$p_n(x)\,w(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i y_i w(x, x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i w(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

或

$$(7)\qquad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{W(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{W(x_0, x_1, \cdots, x_n)}$$

引进符号 $A(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$，则

$$(8)\qquad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{A(x)}{A'(x_i)(x - x_i)}$$

这便是所寻求之拉哥朗日插值多项式。不利用凡德尔蒙得行列式也可以直接推出它。

2·3 余项估计

令截断误差

$$(9)\qquad R(x) = f(x) - P_n(x).$$

设x是异于$x_i(i = 0(1)n)$的插值点，引进新的变数X并令

$$(10)\qquad K = \frac{R(x)}{A(x)}.$$

下面我们来研究函数

$$(11)\qquad F(X) \equiv R(X) - KA(X) \equiv f(X) - P_n(X) - KA(X).$$

该函数共有 $n + 2$ 个零点：$x_0, x_1, \cdots, x_n, x$。于是，根据洛尔定理有

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0, \alpha < \xi < \beta,$$

其中 $\alpha = \min\{x_0, x_1, \cdots, x_n, x,\}$，$\beta = \max\{x_0, x_1, \cdots, x_n, x\}$，或 $f^{(n+1)}(\xi) = K(n + 1)!$

由（10）有

$$(12)\qquad R(x) = \frac{A(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

或

$$(13)\qquad |R(x)| = M_{n+1}(\alpha,\beta)\frac{|A(x)|}{(n+1)!},$$

其中

$$M_{n+1}(\alpha,\beta) = \max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} |f^{(n+1)}(x)|.$$

(12) 式称作哥西 (Cauchy) 型余项。

2·4 二元拉哥朗日插值多项式

设有二元函数$F(x,y)$，$F(x_i,y_j)=F_{ij}$，$i=0(1)n$，$j=0(1)m$．求一$n+m$次多项式$P_{n,m}(x,y)$，使它满足 $P_{n,m}(x_i,y_i)=F_{i,j}$，$i=0(1)n$，$j=0(1)m$．容易推出所求多项式

$$(14)\qquad P_{n,m}(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)}\times\frac{\sigma'(y)}{(y-y_j)\sigma'(y_j)}F_{ij},$$

其中 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，$\sigma(y)=(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_m)$．

余项

$$(15)\qquad R(x,y)=\frac{F_x^{(n+1)}(\xi_1,y)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)+\frac{F_y^{(m+1)}(x,\eta_1)}{(m+1)!}\prod_{j=0}^{m}(y-y_j)$$

$$-\frac{F_{x,y}^{(n+1),(m+1)}(\xi_2,\eta_2)}{(n+1)!(m+1)!}\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{m}(x-x_i)(y-y_j),$$

其中 ξ_1,ξ_2在 数 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x$ 之间，η_1,η_2 在数 $y_0,y_1,\cdots,y_m$ 之间。

§3 计 算 过 程

当插值结点很多时，直接用高次多项式进行插值，往往不符合实际情况。因此，通常采用分段插值的方法。这里，我们给出一元线性插值、一元三点插值、二元拟线性插值和二元三点插值等程序。其计算过程是：首先选取最靠近插值点的插值结点，然后分别用相应的插值公式计算所求函数值。

§4 框 图（略）

§5 过 程

5·1 形式参数说明

1）一元插值

n 给定结点个数。

t 插值点。

x 数组x〔1:n〕，存放给定的插值结点。

y 数组y〔1:n〕，存放结点上的函数值。

ANS 存放插值结果。

2）二元插值

n x 方向结点个数。

m y 方向结点个数。

tx x 方向插值点。

ty y 方向插值点。

x　数组 x[1:n]，存放x方向的插值结点。

y　数组y[1:m]，存放y方向的插值结点。

z　数组 z[1:n, 1:m]，存放结点上的函数值。

ANS　存放插值结果。

5·2　过　程

1）一元线性插值

```
Procedure LIP(n,t,x,y,ANS);
    value n, t;
    integer n; real t, ANS; array x, y;
begin integer i;
    for i:=1 Step 1 until n-2 do
    if t≤x[i+1] then goto L;
    i:=n-1;
L:ANS:=y[i]+(t-x[i])/(x[i+1]-x[i])×(y[i+1]-y[i])
end;
```

2）一元三点插值

```
Procedure QIP(n,t,x,y,ANS);
    value n, t;
    integer n; real t, ANS; array x, y;
begin integer i, j, k; real u;
    for k:=1 Step 1 until n-3 do
    if t≤x[k+1] then goto L;
    k:=n-2;
L:if k≠1∧t-x[k]<x[k+1]-t then k:=k-1;
    ANS:=0.0;
    for i:=k, k+1, k+2 do
    begin u:=y[i];
        for j:=k, k+1, k+2 do
        if j≠i then u:=u*(t-x[j])/(x[i]-x[j]);
        ANS:=ANS+u
    end
end;
```

3）二元拟线性插值

```
Procedure TQIP(n,m,tx,ty,x,y,z,ANS);
    value n,m,tx,ty;
    integer n,m;real tx,ty,ANS;array x,y,z;
begin integer i,j; real alpha, beta;
    for i:=1 step 1 until n-2 do
    if tx≤x[i+1]then goto L1;
    i:=n-1;
```

```
L1: for j: =1 step 1 until m-2 do
    if ty≦y[j+1] then goto L2;
    j: =m-1;
L2:alpha: =(tx-x[i])/(x[i+1]-x[i]);
    beta: =(ty-y[j])/(y[j+1]-y[j]);
    ANS: =(1-alpha)×(1-beta)×z[i,j]+beta×(1-alpha)× [i,j+1]
          +alpha×(1-becta)×z[i+1,j]+alpha×beta×z[i+1,j+1]
end;
```

4）二元三点插值

```
Procedure TQIP(n,m,tx,ty,x,y,z,ANS);
    value n,m,tx,ty;
    integer n,m; real tx, ty ANS; array x,y,z;
begin integer i, j,k,r,s,ir;
    real u; array v[1:3];
    for i: =1 step 1 until n-3 do
    if tx≦x[i+1] then go toL1;
    i: =n-2;
L1:for j: =1 step 1 until m-3 do
    if ty≦y[j+1] then goto L2;
    j: =m-2;
L2:if i≠1∧tx-x[i]<x[i+1]-tx then i: =i-1;
    if j≠1∧ty-y[j]<y[j+1]-ty then j: =j-1;
    for r: =i,i+1, i+2 do
    begin ir: =r-i+1;
    v[ir]: =0;
    for s: =j,j+1,j+2 do
    begin u: =z[r,s];
        for k: =j, j+1, j+2 do
        if k≠s then u: =(ty-y[k])/(y[s]-y[k])×u;
        v[ir]: =v[ir]+u
    end
end;
    ANS: =0;
    for r: =i,i+1, i+2 do
    begin u: =U[r-i+1];
    for s: =i,i+1,i+2 do
        if s≠r then u: =(tx-x[s])/(x[r]-x[s])×u;
        ANS: =ANS+u
    end
end;
```

5·3 过程使用说明和调用举例

在上述四个过程中，给定的插值结点均需从小到大的次序排列。在二元拟线性插值中，采用的公式如下：

$$z(x,y)=(1-\alpha)(1-\beta)z_{ij}+\beta(1-\alpha)z_{ij+1}+\alpha(1-\beta)z_{i+1j}+\alpha\beta z_{i+1j+1},$$

其中

$$\alpha=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}, \qquad \beta=\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}.$$

例：已知x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4处的函数值分别为0.0998, 0.1987, 0.2955, 0.3894，求x = 0.25处的函数值（采用一元三点插值程序）。

计算结果

$y(0.25)=0.2474.$

程序

```
begin real ANS;
    array x,y;
    procedure QIP(n,t,x,y,ANS);
        value n,t;
        integer n; real t, ANS; array x,y;
    begin ⎫
      ⋮   ⎬ 过程体
    end;  ⎭
    read (x,y);
    QIP(4,0.25,x,y,ANS);
    print(ANS)
end
```

2. 均 差 插 值

§1 功　　能

这里给出的插值多项式克服了拉哥朗日插值多项式不易增加节点的缺点，而且等距、不等距的情形都适用。

§2 数 学 讨 论

2·1 用均差（或差商）表示的插值公式

定义

$\omega(f;x_0)=f(x_0),$

$$\omega(f;x_0,x_1)=\frac{\omega(f;x_1)-\omega(f;x_0)}{x_1-x_0},$$

$$(1)\quad \omega(f;x_0,x_1,x_2)=\frac{\omega(f;x_1,x_2)-\omega(f;x_0,x_1)}{x_2-x_0},$$

………

$$\omega(f;\ x_0, x_1, \cdots, xn) = \frac{\omega(f;\ x_2, x_2, \cdots, x_n) - \omega(f;\ x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

分别称作m阶（$m=0,1,\cdots,n$）均差。

由定义不难推出

$$\omega(c_1f_1+\cdots+Ckff_k;\ x_0, x_1, \cdots, x_m) = c_1\omega(f_1, x_0;\ x_1, \cdots, xm) + \cdots ck\omega(fk;\ x_0, x_1, \cdots, x_m)$$

用数学归纳法容易推出

$$（3）\quad \omega(f_j x_0, x_1, \cdots, x_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots x_m \\ x_2^2 & x_1^2 & \cdots x_m^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_0^{m-1} & x_0^{m-1} & \cdots x_m^{m-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots f(x_m) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_m^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_0^{m-1} & x_1^{m-1} & \cdots & x_m^{m-1} \\ x_0^m & x_1^m & \cdots & x_m^m \end{vmatrix}$$

由此可知

$$（4）\quad \omega(x^k;\ x_0, \cdots, x_m) = \begin{cases} o, & k<m, \\ 1, & k=m, \end{cases}$$

即，若 $f(x)$ 是低于m次的多项式，则 $\omega(f_j, x_0, x_1, \cdots, x_m) = o$.

令 $A_0(x) = 1, \cdots, A_m(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})$,

则

$$（5）\quad \omega(A_k;\ x_0, x_1, \cdots, x_m) = \begin{cases} o, & k\neq m, \\ 1, & k=m. \end{cases}$$

今设插值多项式

$$（6）\quad P(x) = \sum_{m=0}^{n} C_m A_m(x)$$

由（2）、（5）、（6）可以得

$$（7）\quad \omega(P;\ x_0, x_1, \cdots, x_m) = \sum_{k=0}^{n} C_k\omega(A_k;\ x_0, x_1, \cdots, x_m) = C_m,\ m=01, \cdots, n.$$

将它代入（6）中，则

$$（8）\quad P(x) = \sum_{m=0}^{n}\omega(P;\ x_0, x_1, \cdots, x_m)A_m(x).$$

注意到条件 $P(x_m) = f(x_m),\ m=o(1)n$ 与条件

$$（9）\quad \omega(P;\ x_0, x_1, \cdots, x_m) = \omega(f;\ x_0, x_1, \cdots, x_m),\ m=o(1)n$$

等价，得到

$$（10）\quad P(x) = \sum_{m=0}^{n}\omega(f;\ x_0, x_1, \cdots, x_m)A_m(x),$$

或展开它，则

$$（11）\quad P(x) = \omega(f;\ x_0) + \omega(f;\ x_0, x_1)(x-x_0) + \cdots\cdots + \omega(f;\ x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

该式就是所要求的插值多项式，有时也称作不等距 Newton插值公式。对等距节点 $x_m = a + mh,\ m=0,1,\cdots$, 有

$$\omega(f; a, a+h, \cdots, a+mh) = \frac{\Delta_m f(a)}{m!\, h^m},$$

因此，式（11）就变成了牛顿插值公式。

本插值公式的精确余项

(13) $$R(x) = \omega(f; x, x_0, x_1, \cdots, x_m) A(x),$$
$$A(x) = A_{n+1}(x).$$

2·2 牛顿插值公式

设有已知函数f(x).称表达式

(14) $$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \ (h>0)$$

为函数f(x)在x点的一阶差分。仿此类推，

(15) $$\Delta_{n+1} f(x) = \Delta_n f(x)$$

称作 n+1 阶差分。

由差分的定义不难推出

(16) $$\Delta_n f(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} C_n^m f(x+mh),$$

(17) $$f(x+nh) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta_m f(x).$$

设已知函数f(x)在等距节点x_0+mh上的值为 $y_0, y_1, \cdots, y_n$. 根据差分的定义，可以推出均差与差分的关系如下：

$$\omega(f; x_0, x_1) = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$\omega(f; x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta_2 y_0}{2h^2},$$

一般地

(19) $$\omega(f; x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{\Delta_n y_0}{n!\, h^n}.$$

将该式代入（11），则得到所求插值公式

(19) $$P(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x-x_0}{1!\, h} + \Delta_2 y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\, h^2} + \cdots + \Delta_n y_0 \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{n!\, h^n}$$

令 $t = \dfrac{x-x_0}{h}$，则

上式化为

(20) $$P(x_0+th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta_2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-\overline{n-1})}{n!}\Delta_n y_0$$

此式称作表初牛顿插值公式。它适合于 x 位于x_0附近时进行插值。

如果节点取成 $x_m = x_0 - mh(h>0, m=0(1)n)$ 并令 $t=\frac{x-x_0}{h}$，则得到表末牛顿插值公式

$$(21)\qquad P(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0-h)+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta_2 f(x-2h)+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta_n f(x-nh).$$

该式适合于计算插值区间终点附近的函数值。

3. 埃特金插值

§1 功　　能

本过程从给定的 n 个插值结点中，适当选取 $m(m\leqslant n)$ 个插值结点，用埃特金反复线性插值公式对一元函数进行插值。

§2 数学讨论

设有表示函数 $y=f(x)$ 图形之点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的n个数据点 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，约束方程为

$$p(x_i)=y_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

在点 (x_j,y_j) 和 (x_{j+k},y_{j+k}) 之间的线性插值公式为

$$(1)\qquad \frac{y(x)-y_j}{x-x_j}=\frac{y_{j+k}-y_j}{x_{j+k}-x_j}$$

或

$$(2)\qquad y(x)=\frac{y_j(x-x_{j+k})-y_{j+k}(x-x_j)}{x_j-x_{j+k}}.$$

称它为基本线性插值公式。

对点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)：

$$y_1^1(x)=\frac{y_1(x-x_2)-y_2(x-x_1)}{x_1-x_2}.$$

同样地，对点 (x_2,y_2) 和 (x_3,y_3)：

$$y_1^2(x)=\frac{y_2(x-x_3)-y_3(x-x_2)}{x_2-x_3}.$$

对 $y_1^1(x)$ 和 $y_1^2(x)$ 再进行线性插值，则

$$y_2^1(x)=\frac{y_1^1(x)(x-x_3)-y_1^2(x)(x-x_1)}{x_1-x_3}.$$

对四个点的情形，类似地有

$$
(3)\quad \begin{cases} y_1^1(x) = \dfrac{y_1(x-x_2) - y_2(x-x_1)}{x_1 - x_2}, \\[2ex] y_1^2(x) = \dfrac{y_2(x-x_3) - y_3(x-x_2)}{x_2 - x_3}, \\[2ex] y_1^3(x) = \dfrac{y_3(x-x_4) - y_4(x-x_3)}{x_3 - x_4}; \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)(x_4, y_4) \end{cases}
$$

$$
(4)\quad \begin{cases} y_2^1(x) = \dfrac{y_1^1(x)(x-x_3) - y_1^2(x)(x-x_1)}{x_1 - x_3}, \\[2ex] y_2^2(x) = \dfrac{y_1^2(x)(x-x_4) - y_1^3(x)(x-x_2)}{x_2 - x_4}; \end{cases}
$$

$$
(x_1, y_1^1(x))(x_2, y_1^2(x))(x_3, y_1^2(x))(x_4, y_1^3(x))
$$

$$
(5)\quad y_3^1(x) = \frac{y_2^1(x)(x-x_4) - y_2^2(x)(x-x_1)}{x_1 - x_4}, \quad (x_1, y_2^1(x))(x_4, y_2^2(x)).
$$

上述公式中的每一个均满足相应的线性约束条件。上述公式可简写为

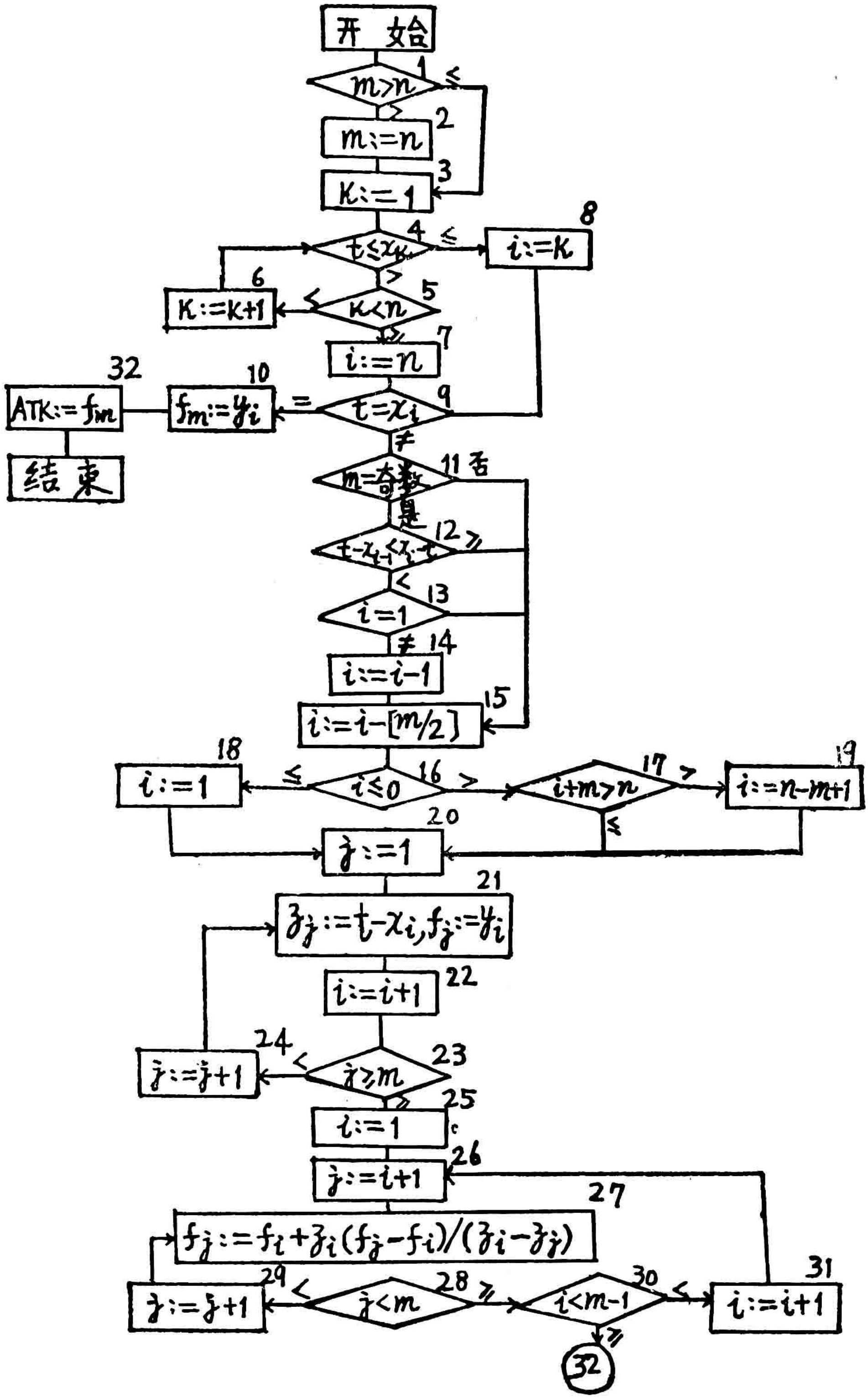
$$
(6)\quad \begin{cases} y^k{}_1(x) = \dfrac{y_k(x-x_{k+1}) - y_{k+1}(x-x_k)}{x_k - x_{k+1}}, \quad k = 1, 2, , 3, \\[2ex] y^k{}_l(x) = \dfrac{y_{l-1}^k(x)(x-x_{k+l}) - y_{l-1}^{k+1}(x)(x-x_k)}{x_k - x_{k+l}}, \\ \qquad\qquad l = 2, 3, ; \quad k = 1, \cdots, 4-l. \end{cases}
$$

依次类推，对几点的情形，有

$$
(7)\quad \begin{cases} y^k{}_1(x) = \dfrac{y_k(x-x_{k+1}) - y_{k+1}(x-x_k)}{x_k - x_{k+1}}, \quad k = 1, 2 \ldots, n-1, \\[2ex] y^k{}_l(x) = \dfrac{y^k{}_{l-1}(x)(x-x_{k+l}) - y_{l-1}^{k+1}(x)(x-x_k)}{x_k - x_{k+l}}, \\ \qquad\qquad l = 2, 3, \ldots, n-1; \quad k = 1, 2, \cdots, n-l. \end{cases}
$$

由（7）产生的函数构成如下三角形阵列：

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 & y_1 & & & \\
 & & y_1^1(x) & & \\
x_2 & y_2 & & y_2^1(x) & \\
 & & y_1^2(x) & & \\
x_3 & y_3 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \qquad y_{n-1}^1(x) \\
x_{n-2} & y_{n-2} & & & \\
 & & y_1^{n-2}(x) & & \\
 & & & y_2^{n-2}(x) & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & & \\
 & & y_1^{n-1}(x) & & \\
x_n & y_n & & &
\end{array}
$$


开 始
m>n
m:=n
K:=1
t≤x_K
K<n
K:=K+1
i:=K
i:=n
t=x_i
f_m:=y_i
ATK:=f_m
结 束
m=奇数
否
是
t−x_{i−1}<x_i−t
i=1
i:=i−1
i:=i−[m/2]
i≤0
i:=1
i+m>n
i:=n−m+1
j:=1
z_j:=t−x_i, f_j:=y_i
i:=i+1
i≥m
j:=j+1
i:=1
j:=i+1
f_j:=f_i+z_i(f_j−f_i)/(z_i−z_j)
j<m
j:=j+1
i<m−1
i:=i+1
32

$y^1_{n-1}(x)$ 就是所求的 $y(x)$.

§3 计 算 过 程

在下面给出的程序中，我们不直接求 $y^1_{n-1}(x)$，而是从 n 个插值结点中，只选取 m(m ≤n) 个插值结点，对这m个点采用埃特金反复线性插值公式，求出$y^1_{m-1}(x)$。为此，首先选取最靠近要插值的点x且尽量使x位于其中心的m个插值结点，然后根据上述埃特金插值公式依次求出$y^1_1(x)$，$y^2_1(x)$，…$y_1^{m-1}(x)$，$y^1_2(x)$，…$y^1_{m-1}(x)$.

§4 框 图

4·1 框 图

4·2 框图说明

1—2 如果要用于插值的结点数m超过给定的插值结点个数n，则m取n。

3—8 确定要插值的点 t 所在的位置，如果$t \leq x_1$，则$i:=1$；如果$t>x_n$，则 $i:=n$；如果 $x_{k-1}<t\leq x_k$，则 $i:=k$。

9—10如果要插值的点正好落在某一结点上，则把相应的函数值做为结果。

11—14为了使插值结点在 t 值左右对等地分配，且尽量取最靠近 t 的插值结点，如果m为奇数且 t 靠近左边点时，$i:=i-1$。

15确定用于插值的结点第 1 个点的下标。

16—19当 $t<x_1$ 或由于t接近x_1而不能使t位于中心时，用 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 进行插值；当 $t>x_n$或t接近x_n而不能使t位于中心时，用x_{n-m+1}，x_{n-m+2}，…,x_n 进行插值。

20—24计算t和 m 个插值结点之间的差，并把y送到 f 中。

25—31反复用线性插值公式形成三角形阵列。

32计算结果

§5 过 程

5·1 形式参数说明

n 给定插值结点个数。

m 用来进行插值的结点个数。

t 插值点。

x 数组 x〔1:n〕，存放给定的插值结点。

y 数组 y〔1:n〕，存放结点上的函数值。

5·2 过 程

```
real procedure ATK(n,m,t,x,y);
    value n,m,t;
    integer n,m; real t; array x,y;
begin integer i,j,m1;
    real fi,zi; array z,f[1:m];
    if m>n then m:=n;
    for i:=1 step 1 until n do
    if t≤x[i] then goto found;
```