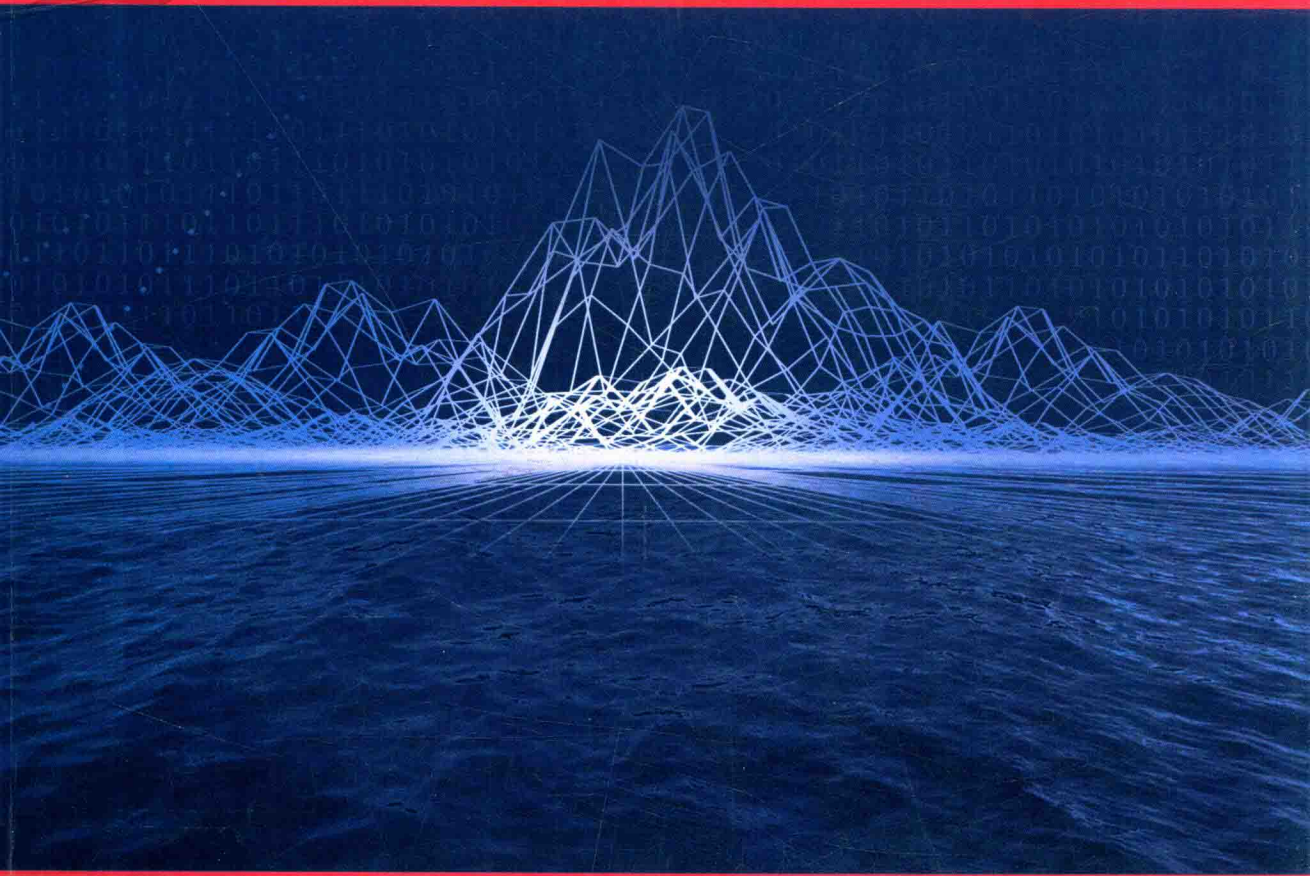


The Application and Research
of Mathematical Model
in Ecology

38

数学模型在生态学 的应用及研究

杨东方 苗振清 编著



 海洋出版社

数学模型在生态学的应用及研究(38)

The Application and Research of Mathematical Model in Ecology(38)

杨东方 苗振清 编著

海洋出版社

2017年·北京

内 容 提 要

通过阐述数学模型在生态学的应用和研究, 量化地展示生态系统中环境因子和生物因子的变化过程, 揭示生态系统的规律和机制以及其稳定性、连续性的变化, 使生态数学模型在生态系统中发挥巨大作用。在科学技术迅猛发展的今天, 通过该书的学习, 可以帮助读者了解生态数学模型的应用、发展和研究的过程; 分析不同领域、不同学科的各种各样生态数学模型; 探索采取何种数学模型应用于何种生态领域的研究; 掌握建立数学模型的方法和技巧。此外, 该书还有助于加深对生态系统的量理解, 培养量化研究生态系统的思维。

本书主要内容为: 介绍各种各样的数学模型在生态学不同领域的应用, 如在地理、地貌、水文和水动力以及环境变化、生物变化和生态变化等领域的应用。详细阐述了数学模型建立的背景、数学模型的组成和结构以及其数学模型应用的意义。

本书适合气象学、地质学、海洋学、环境学、生物学、生物地球化学、生态学、陆地生态学、海洋生态学和海湾生态学等有关领域的科学工作者和相关学科的专家参阅, 也适合高等院校师生作为教学和科研的参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型在生态学的应用及研究. 38 / 杨东方, 苗振清编著. —北京: 海洋出版社, 2017. 5

ISBN 978-7-5027-9788-1

I. ①数… II. ①杨… ②苗… III. ①数学模型-应用-生态学-研究 IV. ①Q14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 121503 号

责任编辑: 鹿 源

责任印制: 赵麟芬

海洋出版社 出版发行

<http://www.oceanpress.com.cn>

北京市海淀区大慧寺路 8 号 邮编: 100081

北京朝阳印刷厂有限责任公司印刷 新华书店北京发行所经销

2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷

开本: 787 mm×1092 mm 1/16 印张: 20

字数: 460 千字 定价: 60.00 元

发行部: 62132549 邮购部: 68038093 总编室: 62114335

海洋版图书印、装错误可随时退换

《数学模型在生态学的应用及研究(38)》编委会

主 编 杨东方 苗振清

副主编 王 艳 王凤友 陈 豫 黄 宏 李海霞

编 委 (按姓氏笔画为序)

马卫民 王 涛 王 强 王志康 邓 婕

冯志纲 朱四喜 苏春花 李将敏 杨丹枫

杨秀琴 吴云杰 张龙磊 林梦晓 常彦祥

数学是结果量化的工具
数学是思维方法的应用
数学是研究创新的钥匙
数学是科学发展的基础

杨东方

要想了解动态的生态系统的基本过程和动力学机制,尽可从建立数学模型为出发点,以数学为工具,以生物为基础,以物理、化学、地质为辅助,对生态现象、生态环境、生态过程进行探讨。

生态数学模型体现了在定性描述与定量处理之间的关系,使研究展现了许多妙不可言的启示,使研究进入更深的层次,开创了新的领域。

杨东方

摘自《生态数学模型及其在海洋生态学应用》

海洋科学(2000),24(6):21—24.

前 言

细大尽力,莫敢怠荒,远迹辟隐,专务肃庄,端直敦忠,事业有常。

——《史记·秦始皇本纪》

数学模型研究可以分为两大方面:定性和定量的,要定性地研究,提出的问题是“发生了什么或者发生了没有”;要定量地研究,提出的问题是“发生了多少或者它如何发生的”。前者是对问题的动态周期、特征和趋势进行了定性的描述,而后者是对问题的机制、原理、起因进行了定量化的解释。然而,生物学中有许多实验问题与建立模型并不是直接有关的。于是,通过分析、比较、计算和应用各种数学方法,建立反映实际的且具有意义的仿真模型。

生态数学模型的特点为:(1)综合考虑各种生态因子的影响。(2) 量化描述生态过程,阐明生态机制和规律。(3) 能够动态地模拟和预测自然发展状况。

生态数学模型的功能为:(1) 建造模型的尝试常有助于精确判定所缺乏的知识和数据,对于生物和环境有进一步定量了解。(2) 模型的建立过程能产生新的想法和实验方法,并缩减实验的数量,对选择假设有所取舍,完善实验设计。(3) 与传统的方法相比,模型常能更好地使用越来越精确的数据,从生态的不同方面所取得材料集中在一起,得出统一的概念。

模型研究要特别注意:(1) 模型的适用范围:时间尺度、空间距离、海域大小、参数范围。例如,不能用每月的个别发生的生态现象来检测 1 年跨度的调查数据所做的模型。又如用不常发生的赤潮的赤潮模型来解释经常发生的一般生态现象。因此,模型的适用范围一定要清楚。(2) 模型的形式是非常重要的,它揭示内在的性质、本质的规律,来解释生态现象的机制、生态环境的内在联系。因此,重要的是要研究模型的形式,而不是参数,参数是说明尺度、大小、范围而已。(3) 模型的可靠性,由于模型的参数一般是从实测数据得到的,它的可靠性非常重要,这是通过统计学来检测。只有可靠性得到保证,才能用模型说明实际的生态问题。(4) 解决生态问题时,所提出的观点,不仅从数学模型支持这一观点,还要从生态现象、生态环境等各方面的事实来支持这一观点。

本书以生态数学模型的应用和发展为研究主题,介绍数学模型在生态学不同领域的应用,如在地理、地貌、气象、水文和水动力以及环境变化、生物变化和生态变化等领域的应用。详细阐述了数学模型建立的背景、数学模型的组成和结构以及其数学模型应用的意义。认真掌握生态数学模型的特点和功能以及注意事项。生态数学模型展示了生态系统的演化过程和预测了自然资源可持续利用。通过本书的学习和研究,促进自然资源、环境的开发与保护,推进生态经济的健康发展,加强生态保护和环境恢复。

本书获得“温室大棚土壤有机碳淋溶迁移研究”(国家自然科学基金项目31500394)、浙江海洋大学的出版基金、西京学院的出版基金、中原工学院的出版基金、贵州民族大学博点建设文库、“贵州喀斯特湿地资源及特征研究”(TZJF-2011年-44号)项目、“喀斯特湿地生态监测研究重点实验室”(黔教合KY字[2012]003号)项目、贵州民族大学引进人才科研项目([2014]02)、土地利用和气候变化对乌江径流的影响研究(黔教合KY字[2014]266号)、威宁草海浮游植物功能群与环境因子关系(黔科合LH字[2014]7376号)以及国家海洋局北海环境监测中心主任科研基金——长江口、胶州湾、浮山湾及其附近海域的生态变化过程(05EMC16)的共同资助下完成。

此书得以完成应该感谢北海环境监测中心的主任姜锡仁研究员、上海海洋大学的副校长李家乐教授、浙江海洋大学校长吴常文教授、贵州民族大学校长陶文亮教授、西京学院校长任芳教授和中原工学院院长俞海洛教授;还要感谢刘瑞玉院士、冯士筴院士、胡敦欣院士、唐启升院士、汪品先院士、丁德文院士和张经院士。诸位专家和领导给予的大力支持,提供的良好的研究环境,成为我们科研事业发展的动力引擎。在此书付梓之际,我们诚挚感谢给予许多热心指点和有益传授的其他老师和同仁。

本书内容新颖丰富,层次分明,由浅入深,结构清晰,布局合理,语言简练,实用性和指导性强。由于作者水平有限,书中难免有疏漏之处,望广大读者批评指正。

沧海桑田,日月穿梭。抬眼望,千里尽收,祖国在心间。

杨东方 苗振清

2015年8月7日

目 次

青藏高原山地的系统模型	(1)
三维河流的动力学模型	(9)
显式动力学的计算	(16)
生态旅游资源的评价模型	(18)
退耕后的粮食安全指数计算	(20)
晋祠泉流量的模拟	(23)
水资源总量的计算	(26)
稀性泥石流对排导槽的破坏分析	(28)
饱和砂土地震液化模型建立	(32)
黄土高原分形沟网分维计算式	(38)
积雪的变化趋势计算	(41)
ESR 测年的基本原理	(44)
坡面径流侵蚀的能量分析	(46)
滑坡防治工程的最大抗间距估算模型	(49)
工程中可拓决策技术模型	(53)
祁连山林区的气候特征	(56)
土壤侵蚀 ¹³⁷ Cs 示踪法的计算模型	(58)
粮食安全的预警模型	(60)
山区高空间的气温分布模型	(64)
渠道砼衬砌的冻胀模型	(67)
扇贝柱的微波干燥公式	(72)
小麦排种器的排种轮模型	(74)
温室内外的太阳辐射计算	(77)
覆盖材料的传热系数公式	(82)
热水加温的室内温度预测模型	(84)
冬小麦生长的评估模型	(86)
冬小麦的灌溉模型	(89)

反刍动物的甲烷排放预测模型	(93)
灌区水资源的优化配置模型	(99)
喷雾的雾滴分布质量模型	(102)
土地当量比的农业资源评价模型	(105)
油菜籽脱皮的冷榨压榨比模型	(107)
黄粒米的质量评定模型	(110)
灌溉分区的节水模型	(112)
复垦区的可垦性评价模型	(116)
小麦叶色的光照识别模型	(119)
海滩剖面的预测模型	(122)
泥沙的回淤模型	(128)
海浪的特征波陡公式	(131)
船闸基坑的稳定公式	(136)
垃圾渗漏水的预测模型	(138)
近岸波浪的折射绕射方程	(141)
农林复合系统的环境评价模型	(144)
植物物料的浸提动力学模型	(146)
土壤保水剂的持水性能模型	(150)
热量资源的推算模型	(152)
枯草芽孢杆菌的超高压杀灭模型	(154)
控制排水的盐分平衡方程	(156)
覆膜滴灌棉田的蒸散量模型	(158)
黄瓜的水分生产函数	(161)
分区给水的优化模型	(163)
水土的流失变化模型	(166)
地表的太阳辐射模型	(169)
地下水的三维流运动模型	(172)
水稻灌溉的优化模型	(175)
黄瓜叶片的光合速率模型	(178)
温室的小气候模型	(181)
树上柑橘的识别模型	(185)

地理信息的 SCS 模型	(187)
土壤溶质的运移方程	(189)
水稻播种量的监测模型	(193)
水资源的供需平衡模型	(195)
作物生产力的评价模型	(198)
压榨取油的渗透模型	(201)
磁力泵的磁力平衡模型	(204)
农田的固碳潜力公式	(207)
水稻冠层的蒸散模型	(212)
冬小麦的二氧化碳日收支模型	(216)
黑龙江省的生态足迹模型	(218)
生态系统恢复力的评价模型	(222)
森林公园的景点评价模型	(225)
城市空间的扩展模型	(230)
旱地作物的水分平衡方程	(234)
沙土的内排水模型	(237)
丹顶鹤的繁殖生境模型	(239)
陕西植被的覆盖度模型	(242)
城市森林的景观连接度模型	(245)
流域洪水的特征模型	(248)
泥石流的冲击模型	(251)
蔬菜基地的环境评价公式	(253)
盆地洪涝的时间序列模型	(255)
流域发展的协调度模型	(258)
高寒草甸的层带模型	(260)
土壤元素间的相关性	(264)
细沟的临界断面方程	(266)
降水引起径流量的变化公式	(272)
斜坡失稳时间的协同模型	(275)
集水区的侵蚀结构模型	(279)
旅游资源的评价模型	(282)

泥石流的流域边界公式	(285)
自然保护区的生态等级评价指数	(288)
温室工程的价值公式	(290)
耕地变化的驱动力模型	(292)
土壤的盐渍化模型	(295)
农业种植的空间格局模型	(297)
农田信息的采集系统模型	(299)
温室覆盖材料的传热模型	(302)
作物产量的监测模型	(304)

青藏高原山地的系统模型

1 背景

关于青藏高原山地系统动力学特征,主要研究高原山地系统现今构造应力场演化特征和高原山地系统统一构造动力模型。关于青藏高原山地各圈层力学系统描述,主要把山地各圈层块体质点作为一个力学系统来描述,求解速度矢量、位移矢量、密度场、温度场、应力张量等物理量和状态空间,最后求解运动方程^[1-2]。毕思文^[1]对青藏高原山地系统动力学模型展开了研究,对青藏高原山地各圈层多体系统力学描述。青藏高原是由多圈层多块体不同物质结构组成的,皆可用若干塑性、流变体、流体和弹性组成的系统模型予以有效地描述。

2 公式

2.1 山地各圈层力学系统

一个圈层块体质点的集合称为一个力学系统。如果这个集合的状态可以用有限个随时间变化的参数来描述(例如有限个块体质点或有限个刚体组成的系统),则称为有限自由度系统,反之称为无限自由度系统或连续系统。

对于有限自由度系统,通常引进广义坐标 $X_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 和广义速度 $\dot{X}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 来描述。有时采用广义动量 $P_i(t)$ 来代替 $\dot{X}_i(t)$, $(X, P) \in R^{2m}$ 称为相空间,这里 $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ 。

对于无限自由度系统,设它在初始时刻 $t=0$ 时占据三维空间的区域 Q 。用 $X = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in R^3$ 表示 Q 中的质点,这里 X 可以用通常的曲线坐标来描述。它在 t 时刻在曲线坐标的位置为

$$X(X_o, t) \in R^3 \quad (1)$$

在 t 时刻所有 X 占据的区域为 $Q_t \subset R^3$, 称为位形空间。相应的速度为

$$\dot{X} = \dot{X}(X_o, t) \quad (2)$$

位移为

$$u = u(X_o, t) = X(X_o, t) - X_o \quad (3)$$

一个连续的力学系统的位置函数、连同描述它的力学状态的其他物理量如速度矢量、

位移矢量、密度场、温度场、应力张量等构成了它的状态空间。状态空间一般记为

$$Z = \{X, \dot{X}, \mu, \dots, t \in T, X \in Q\} \quad (4)$$

无论是对有限自由度力学系统还是对连续力学系统,所引入的描述变量在构成相空间或状态空间时都将服从一定的物理规律,即它们之间满足一定的关系,这些关系体现为一组方程,称为运动方程。

2.2 山地系统的非稳定性

将问题简化为准静态的,用增量方法研究山地系统的稳定性问题需要将实际的载荷路径或历史分成许多小的载荷增量步,逐步地对每一个增量步求解。现在考虑一个典型的增量步。在这个步长的开始,山地体内的应力 σ ,应变 ε ,间断面的位移间断量 $\langle u \rangle$ 以及山地材料的结构和间断面已有变形历史的各种内状态变量都是已知的。这时相对应的渗透压力和渗水参数分别记为 q 和 η 。在这个增量步内,在边界 ST 上给定外载增量 dp ,在边界 S_n 上给定位移增量 du_0 ,在山地体内给定体力载荷增量 df ,已知渗透压力和渗水参数的增量为 dq 和 $d\eta$ 。我们要确定的是山地体内的应力增量 $d\sigma$,应变增量 $d\varepsilon$,位移增量 du ,间断面内的应力增量和位移断增量 $d\langle u \rangle$ 以及相应的各内状态变量的增量。待求的各外变量增量应满足以下三方面条件。

(1)平衡条件

在山地体 V 内: $Ld\sigma + df = 0 \quad (5)$

在间断面 Γ 上: $L_1 d\sigma^+ = Ld\sigma = d\sigma \quad (6)$

在边界 S_T 上: $L_2 d\sigma = dP \quad (7)$

其中,

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} l_i & 0 & 0 & 0 & n_i & m_i \\ 0 & m_i & 0 & n_i & 0 & l_i \\ 0 & 0 & n_i & m_i & l_i & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

式中, l_1, m_1, n_1 和 l_2, m_2, n_2 分别是间断面 Γ 和边界 ST 的外法线方向余弦。

(2)几何条件

在山地体内: $L' du = d\varepsilon \quad (10)$

在间断面 Γ 上: $d\langle u \rangle = du^+ - du \quad (11)$

在边界 S_μ 上: $du = du_0 \quad (12)$

(3) 本构条件

对山地体:
$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon + D_{\eta} d\eta + edq \quad (13)$$

对间断面:
$$d\bar{\sigma} = \hat{D}_{ep} d\varepsilon + \hat{D}_{\eta} d\eta + dq \quad (14)$$

如果作用的外载荷是充分小的, 山地介质和间断面处于弹性阶段和硬化塑性阶段, 按上述提法得到的增量解是唯一确定的, 相应的应力和变形状态是稳定的平衡状态。随着载荷增加, 介质或间断面进入软化塑性阶段。所得到的应力和变形状态可能是不稳定的平稳状态。

考察山地系统的一个平衡状态, 它的变形和应力记为 $u, \langle u \rangle, \varepsilon, \sigma, \bar{\sigma}$ 等, 我们在这个状态上施加一组很小的不违背几何条件的虚位移 δu 和 $\delta \langle u \rangle$, 则

在 V 内:
$$Li\delta u = \delta\varepsilon \quad (15)$$

在 Γ 上:
$$\delta \langle u \rangle = \delta u^+ - \delta u^- \quad (16)$$

在 S_{μ} 上:
$$\delta\mu = 0 \quad (17)$$

从而得到一个新的状态。如果外力所作的虚功不超过内能(包括贮存的弹性应变能和塑性耗散能)的增加, 那么山地系统是稳定的。如果这个条件对某组虚位移不成立, 那么超出的能量将转化为动能。这表明所考虑的平衡状态是不稳定的。由此可推导出能量形式的失稳准则为

$$\int \delta\varepsilon_i \delta\sigma dv^+ - \int_{\Gamma} \langle u \rangle' \delta\bar{\sigma} d\Gamma < 0 \quad (18)$$

式中, $\delta\varepsilon$ 和 $\delta\sigma, \delta\langle u \rangle$ 和 $\delta\bar{\sigma}$ 之间的关系分别由本构方程式(13)和式(14)给出, 因而山地系统的稳定性与增量的本构性质直接相关。例如, 在无渗水情况, 并且山地介质和间断面处于理想塑性或硬化塑性阶段, 矩阵 D_{ep} 和 \hat{D}_{ep} 是正定的, 式(18)左端总为正值, 所考虑的状态一定是稳定的平衡状态。因而介质和间断面具有应变软化和渗水软化特性是山地系统失稳的必要条件。

处理青藏高原山地系统的物理非稳定性问题的方法是将给定的载荷历史分成许多小的增量步, 对每一个增量步求解一个非线性边值问题。对于出现应变软化和渗水软化之后的每一个增量步, 使用失稳量准则式(18)判断山地系统的稳定性。一旦式(18)成立, 表明已达到稳定性的临界载荷。通过对变形场的分析还可得到失稳时的破坏形式以及失稳的变形前兆。

2.3 山地系统碰撞

碰撞体撞击速度范围的根据是碰撞体在撞击中所出现的各种现象。在撞击体的撞击速度很低时, 碰撞体只产生弹性变形, 这是实验时经常遇到的低速范围。当撞击体的撞击速度达到某一极限值时, 不是靶体就是碰撞体的接触应力达到压缩屈服应力。这时靶体或碰撞体或两者同时产生永久变形, 这种变形经常是一种较为复杂的力学过程。首先研究弹性撞击的弹性应力和撞击速度的关系。

设一碰撞体以速度 v_n 垂直撞击靶体的某一平面。碰撞体的密度为 P_p , 碰撞体上的弹性波速为

$$C_{op} = \sqrt{E_p/P_p} \quad (19)$$

式中, E_p 为碰撞体的杨氏模量; 靶体中膨胀压缩弹性波的传播速度为

$$C_{dt} = \sqrt{[\lambda_t + 2G_t]/P_t} \quad (20)$$

式中, λ_t 和 $G_t = E_t/[2(1+r_t)]$ 为靶体的拉梅常数, E_t 和 r_t 分别为靶体的杨氏模量和泊松比; P_t 为靶体的密度。在弹性撞击后, 碰撞体和靶体之间的接触应力为 σ_c , 相对速度为零。设碰撞体的头部由于接触应力 σ_c 的作用而引起的向左方后退速度为 v_1 , 靶体由于接触应力 σ_c 的作用而引起的向右方后退速度为 v_2 。接触面的真空速度为

$$v_E - v_1 = v_2 \text{ 或 } v_E = v_1 + v_2 \quad (21)$$

根据碰撞时的动量冲量守恒定律, 设在微小的碰撞时间 δ_t 内, 撞击应力波在碰撞体内向左传播 δ_x , 则有

$$\delta_c \delta_t = P_p \delta_x v_1 \quad (22)$$

碰撞体变形和靶体变形之间, 在撞击过程中是密切相关的, 显然不能单独考虑。但是, 在一定条件下, 人们还是可以略去靶体的变形, 从碰撞体的变形估计碰撞体材料的动力屈服强度。泰勒理论的基本假定是单轴向的、不可压缩的并略去了侧向运动的惯性。碰撞体中, 凡是塑性波前尚未到达的部分, 是以速度 v_o 作为一个刚性向前运动的。

当碰撞体一端垂直撞击平整的刚性靶体时, 碰撞体接触端的压应力迅速增长, 应该达到弹性极限, 同时有一个弹性压缩波以声速 $C_p = \sqrt{E_p/P_p}$ 向碰撞体尾部自由端传播。这个弹性压缩波的应力强度等于弹性压缩极限强度 σ_D 。

碰撞体各点的运动速度应该是 v_1 , 它等于

$$v_1 = v_o - \frac{\sigma_{rc}^D}{P_p C_p} \quad (23)$$

而在声波波面的前方, 是无应力区。它还没有感觉到在接触面上有了撞击, 所以这个区域的材料仍以原速度 v_o 向靶体运动。

因此要确立在各个地质时期内, 弹塑性交界面的向前扩展速度 u 是时间的什么函数? 最后的弹性部分有多长? 塑性变形有多大?

$$\Delta t = \frac{2X}{C_p}, \quad \Delta h = u \Delta t, \quad \Delta x = -(v + u) \Delta t \quad (24)$$

连续方程为

$$A_0(u + v) = Au \quad (25)$$

动量冲量守恒方程为

$$P_p A_0(u + v) v = \sigma_{rc}^D (A - A_0) \quad (26)$$

碰撞体撞击后的形状尺寸表达式为

$$h = h_2 - L e^{-\frac{1}{2}R} \left\{ \Gamma \left[\frac{A}{A_0} \right] + e^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{A}{A_0} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \frac{A}{A_0}} \right\} \quad (27)$$

山地被动碰撞体(靶体)特性主要研究内容有:决定被动碰撞模式的各种假设、局部影响假定、块体运动假定、略去热效应的假定、厚度判据和碰撞体材料等。

如厚度判据为

$$n = \frac{C_t}{C_p} \frac{L}{h} \quad (28)$$

式中, C_t 为靶体中应力波传播速度, C_p 为碰撞体中应力波传播速度, L 为碰撞体长度, h 为靶板厚度。

如果用 h/D 表示, 其中 D 为碰撞体直径, 则有

$$n = \frac{C_t}{C_p} \frac{L/D}{h/D} \quad (29)$$

2.4 山地碰撞构造的侵入和俯冲

(1) 弹塑性被动碰撞体变形理论

撞击变形有三种隆起和俯冲凹陷。对于半径为 R 的地壳层, 在平面应力和轴对称条件下的总塑性应变能为 ε_p , 其增量为

$$d\varepsilon_p = \int_{\Gamma} (\sigma_r d\varepsilon_r + \sigma_{\theta} d\varepsilon_{\theta}) d\Gamma \quad (30)$$

式中, $d\varepsilon_r$ 、 $d\varepsilon_{\theta}$ 为应变增量; r 、 θ 为径向环向坐标。积分域 Γ 为以 R 为半径的靶板域。得碰撞体变形的应变能为

$$\varepsilon_p = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-v+v^2}} \int_0^R \left\{ \frac{1}{8} E_p \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^4 + \frac{1}{2} \sigma_m \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^4 \right\} r dr \quad (31)$$

这些应变能都来自地壳层被动碰撞体撞击时的动能 $\frac{1}{2}mv_0^2$, 所以有 $\varepsilon_p = \frac{1}{2}mv_0^2$ 。

(2) 山地动量守恒模式

这个模式认为碰撞体的动量为 mv 。在撞击后, 变成碰撞体 m 和挤凿下来的靶元 $\rho_t \pi R_p^2 h_t$ 的总动量 $(m + \rho_t \pi R_p^2 h_t) v_f$ 。其中 v_f 为靶元挤凿下来后的速度, 它也是碰撞体在击穿靶体后的速度。用动量守恒定律, 有

$$mv_0 = (m + \rho_t \pi R_p^2 h_t) v_f \quad (32)$$

$$v_f = \frac{L_0}{L_0 + h_t} v_0 \quad (33)$$

这就是碰撞体剩余速度 v_f 和靶体厚度 h_f 的关系式。

(3) 山地流阻运动模式

在碰撞俯冲过程中, 可以把凿离的碎块和剩留的碰撞体间的相对运动看作为流体的流