



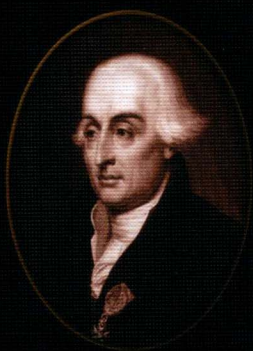
**国家出版基金资助项目**

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL

# Lagrange 插值多项式

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



清华大学出版社

TSINGHUA UNIVERSITY PRESS  
100084 Beijing, China  
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

《拉格朗日乘数法》是《拉格朗日乘数法》系列丛书中的一本。

# Lagrange 乘数法公式

拉格朗日乘数法



拉格朗日乘数法



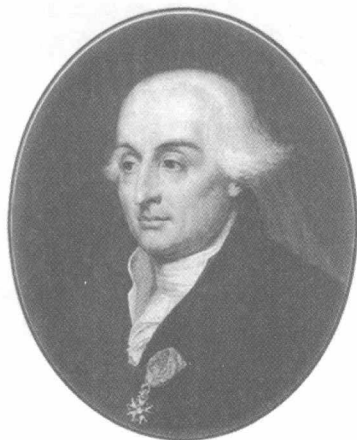
国家出版基金项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

LAGRANGE INTERPOLATING POLYNOMIAL

# Lagrange 插值多项式

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书共分6编,详细介绍了拉格朗日插值多项式的概念及相关的應用方法.本书內容主要包括:拉格朗日插值在数值计算与逼近论中的应用,特殊集的拉格朗日插值,伯格曼空间和维纳空间的拉格朗日插值,多元拉格朗日插值及复平面的拉格朗日插值.

本书适合高校数学教师、数学相关专业的学生研读.

### 图书在版编目(CIP)数据

Lagrange 插值多项式/刘培杰数学工作室编译.  
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.2

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6492-6

I. ①L… II. ①刘… III. ①拉格朗日多项式—插值多项式 IV. ①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 042294 号

策划编辑 刘培杰 张永芹  
责任编辑 刘春雷  
封面设计 孙茵艾  
出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006  
传 真 0451-86414749  
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>  
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司  
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 23.5 字数 242千字  
版 次 2018年2月第1版 2018年2月第1次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5603-6492-6  
定 价 98.00元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎  
代  
序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书痴也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学官殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

### 潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走边田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

### 抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

### 始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

### 丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多



的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

### 读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

**王梓坤**

## 第一编 从初等数学的视角看 拉格朗日插值多项式

第 1 章 引言 //3

第 2 章 拉格朗日插值多项式在竞赛中较  
复杂的应用 //11

## 第二编 拉格朗日插值在数值计算 与逼近论中的应用

第 3 章 拉格朗日插值多项式在多项式  
外推法中的应用 //19

§ 1 多项式插值法基础 //20

§ 2 多项式外推法及其推广 //25

§ 3 广义多项式外推法 //33

§ 4 广义多项式插值法与理查森外推法的  
关系 //40

§ 5	误差估计	//42
§ 6	收敛性与稳定性	//49
<b>第 4 章</b>	<b>关于修正的拉格朗日插值多项式</b>	<b>//56</b>
§ 1	引言	//56
§ 2	一些引理	//61
§ 3	定理的证明	//63
§ 4	注记	//70
<b>第 5 章</b>	<b>关于拉格朗日内插过程的“1/2”平均</b>	<b>//72</b>
<b>第 6 章</b>	<b>拉格朗日插值多项式于加权 <math>L_p</math> 下的收敛逼近阶</b>	<b>//84</b>
§ 1	引言	//85
§ 2	几个引理	//86
§ 3	定理 6.1 的证明及推论	//90
§ 4	定理 6.2 的证明及推论	//94
<b>第 7 章</b>	<b>埃尔米特—费耶尔和拉格朗日插值逼近的 Steckin-Marchaud 不等式</b>	<b>//99</b>
§ 1	引言	//99
§ 2	几个引理	//102
§ 3	定理 7.1 的证明	//106
<b>第三编 特殊集的拉格朗日插值</b>		
<b>第 8 章</b>	<b>基于切比雪夫多项式零点的拉格朗日插值多项式逼近的注记</b>	<b>//111</b>
§ 1	引言	//111
§ 2	一个例子	//113
§ 3	一个新的不等式	//115

## 第 9 章 单位圆上有理函数插值序列的收敛性

问题 //119

§ 1 引言 //119

§ 2 插值有理函数的平均收敛性 //120

§ 3 插值有理函数的一致收敛性 //126

## 第 10 章 渐近单位根上的拉格朗日插值多项式的

逼近阶 //131

§ 1 引言 //131

§ 2 辅助引理 //134

§ 3 定理的证明 //140

## 第 11 章 代数曲线上的拉格朗日插值 //149

## 第 12 章 渐近费耶尔点上的拉格朗日插值多项式的

逼近阶 //159

§ 1 引言 //159

§ 2 辅助引理 //162

§ 3 定理的证明 //170

# 第四编 伯格曼空间和维纳空间的 拉格朗日插值

## 第 13 章 伯格曼空间的插值多项式逼近 //177

§ 1 引言 //177

§ 2 插值多项式的构造 //178

§ 3 几个引理 //184

§ 4 定理 13.1 的证明 //189

## 第 14 章 拉格朗日插值在一重积分维纳空间下的

## 同时逼近平均误差 //194

- § 1 引言 //195
- § 2 几个引理 //200
- § 3 定理 14.1 的证明 //202
- § 4 定理 14.2 的证明 //213
- § 5 定理 14.3 的证明 //220

## 第五编 多元拉格朗日插值

### 第 15 章 多元插值的拉格朗日表达式 //235

- § 1 引言 //235
- § 2 多元古典插值的适定性问题 //238
- § 3 多元扩张插值的拉格朗日表达式 //242
- § 4 结果的进一步扩充 //247

### 第 16 章 多元分次拉格朗日插值 //252

- § 1 引言 //253
- § 2 沿无重复分量分次代数曲线的分次拉格朗日插值 //257
- § 3 平面代数曲线上的分次拉格朗日插值 //261

## 第六编 复平面的拉格朗日插值

### 第 17 章 拉格朗日插值多项式在复平面上的平均逼近阶 //267

### 第 18 章 复插值逼近 //276

- § 1 问题的提出 //277
- § 2 紧集上解析函数的拉格朗日插值 //283
- § 3  $A(|z| \leq 1)$  的拉格朗日插值多项式的收敛与发散问题 //287

- § 4 一般区域上插值的收敛性问题 //292
- § 5 调和多项式插值 //304
- § 6 埃尔米特与埃尔米特-费耶尔插值的收敛与发散问题 //309
- § 7 有理函数插值的收敛性问题 //312

## 第 19 章 关于复数域上插值多项式的沃尔什过收敛理论 //316

- § 1 拉格朗日插值情况 //316
- § 2 埃尔米特与埃尔米特-伯克霍夫插值情况 //329
- § 3  $L_2$ -逼近 //333
- § 4 其他情况 //340

## 附录 //349

## 编辑手记 //353

---

# 第一编

从初等数学的视角看  
拉格朗日插值多项式

---



