

学科阅读推广工程

数学 来了

1

颜峰
主编

以阅读体味数学课堂
用阅读提升学科素养

$$x = \sqrt{\frac{b}{c}} + c - \frac{b}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{x(x-a)(x-b)}$$

山东城市出版传媒集团·济南出版社

颜峰主编

学科阅读推广工程

数学 来了!

1

副主编：杨军 安志军 陈杰
分册主编：安志军
编 者：柴晓龙 杨璐 温少林
闫莉 裴玮 郝萍
刘蓬蓬 吴丽娟



山东城市出版传媒集团·济南出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学来了. 1 / 颜峰主编. —济南：济南出版社，

2018. 1

ISBN 978 - 7 - 5488 - 2952 - 2

I. ①数… II. ①颜… III. ①中学数学课—初中—
教学参考资料 IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 005143 号

出版人 崔 刚

项目策划 周家亮

责任编辑 张雪丽 李 晨

封面设计 胡大伟

出版发行 济南出版社

地 址 山东省济南市二环南路 1 号(250002)

发行热线 0531 - 86922073(省内) 0531 - 67817923(省外)

印 刷 肥城新华印刷有限公司

版 次 2018 年 1 月第 1 版

印 次 2018 年 3 月第 1 次印刷

成品尺寸 170 mm × 240 mm 16 开

印 张 5.75

字 数 82 千字

定 价 25.00 元

(济南版图书,如有印装错误,请与出版社联系调换。联系电话:0531 - 86131736)

打开数学世界的一扇窗

数学是科学的语言，是一切科学和技术的基础，它渗透于人类生活的各个领域，是人类思考和解决问题的工具，影响着人类对世界及自身的看法。

数学有自己的灵魂，绝不只是简单的数学概念、数学定义、数学公式和数学计算。它赋予它所发现的真理以生命，它唤起心神、澄清智慧。它让我们形成“数学方式”的理性思维，从数学的角度看问题，培养起理性思维的习惯和严密求证的精神，提高逻辑推理的能力和准确表达的意识，以及多角度思考与解决问题的素养。我们从数学中汲取的逻辑思维与理性精神，会深深铭刻在我们的头脑中，使我们在思考问题时全面而深刻，在做事时清晰而逻辑。

通过阅读构建起数学思维与数学素养，是我们编写《数学来了》这一套学科读物的目标。以阅读体味数学课堂，用阅读提升学科素养，这与当前盛行的学科阅读概念不谋而合。因此，我们立足课程，以教材为起点，结合教学进度适当扩充阅读文本，旨在拉近课堂与课外的距离，拉近阅读与学习的距离，使学生开阔知识视野、完善认知结构、提升思维能力，形成对课程的深度学习。书中的每一篇阅读文本，都是数学教学内容的精华和延伸，以打开一扇窗，提供一个全新视角，引领你去揣摩千姿百态的因式分解，赞叹数学对称之美，感触古今中外数学的算法神韵，领会数学知识与社会生活的联系……从而进入丰富多彩的数学殿堂。

我们相信，通过阅读，你们会发现，数学并不是枯燥定义的累积，也不是

002 数学来了①

烦琐公式的堆砌。我们更加相信，你们会对数学产生前所未有的兴趣和热情，从而改变学习数学的态度，提高学习数学的效率。正如诺瓦列斯所说：“纯数学是魔术家真正的魔杖。”希望你们人人都能用这根称手的数学魔杖，在知识的海洋里尽情挥洒！

目 录

一 数的进化史	001
二 几何学，让我走近你	009
三 方程是代数的花	019
四 绝对值，此生不负	027
五 高斯是怎么想到的	036
六 小数轴，大作用	045
七 玩转七巧板，创意无极限	053
八 切一切立体图形	060
九 小不点来到人间	068
十 神奇的兔子繁殖	073
十一 “读心术”的秘密	081

一 数的进化史

人类是动物进化的产物，最初也完全没有数量的概念。但在漫长的生活实践中，人类发达的大脑对客观世界的认识已经达到更加理性和抽象的地步。由于记事和分配生活用品等方面的需求，人类逐渐产生了数的概念。



图 1-1 刻木记事

石子记事和结绳记事是远古人类最早的记数方法。古希腊的荷马史诗《奥德赛》中有这样一则故事：当主人公奥德修斯刺瞎了独眼巨人波吕斐摩斯仅有的一只眼睛以后，那个不幸的盲老人每天都坐在自己的山洞里照料他的羊群。早晨羊儿外出吃草，每出来一只，波吕斐摩斯就从一堆石子里捡出一颗。晚上羊儿返回山洞，每

进去一只，他就扔掉一颗石子。当他把早晨捡起的石子全部扔光时，他就确信所有的羊都返回了山洞。

结绳记事是文字发明前，人们所使用的一种记事方法。《易经·系辞下》中有“结绳而治”的记载，传说波斯王国打仗时也常用绳子打结来计算天数，一直到近代，一些没有文字的民族仍然采用结绳记事来记载信息。

用利器在树皮或兽皮上刻痕，或用小棍摆在地上计数，也都是古人常用的办法。这些办法用得多了，就逐渐形成了数的概念和记数的符号。

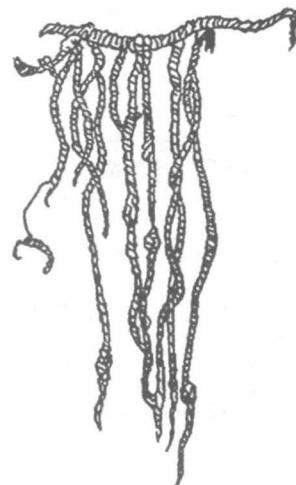


图 1-2 结绳记事

数学探秘**罗马数字符号**

数的概念最初不论在哪个地区都是从 1, 2, 3, 4, …这样的自然数开始的，但是记数的符号却大相径庭。古罗马的数字相当进步，现在许多老式挂钟上还常常使用。实际上，罗马数字的符号一共只有 7 个：I（代表 1），V（代表 5），X（代表 10），L（代表 50），C 代表 100），D（代表 500），M（代表 1 000）。不论这 7 个符号的位置怎样变化，它们代表的数字都是不变的。它们按照下列规律组合起来，就能表示任何一个数。



图 1-3 罗马数字钟表

1. 重复次数：一个罗马数字符号重复几次，就表示这个数的几倍。如“III”表示“3”，“XXX”表示“30”。
2. 右加左减：一个代表大数字的

符号右边附一个代表小数字的符号，就表示大数字加上小数字的数目，如“VI”表示“6”，“DC”表示“600”；一个代表大数字的符号左边附一个代表小数字的符号，就表示大数字减去小数字的数目，如“IV”表示“4”，“XL”表示“40”，“VD”表示“495”。

3. 上加横线：在罗马数字上加一横线，表示这个数字的 1 000 倍，如“ \overline{V} ”表示“5 000”，“ \overline{XL} ”表示“40 000”。

算筹记数与“0”的引入

我国古代也很重视记数符号，最古老的甲骨文和钟鼎文中都有记数的符号，不过难写难认，后人没有沿用。到春秋战国时期，生产力迅速发展，为了适应这一需要，我们的祖先创造了一种十分重要的计算方法——筹算。

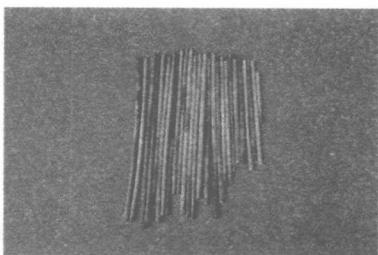


图 1-4 算筹

筹算以刻有数字的算筹记数、运算，算筹又称策、筹策、算子等，实

际就是一些长短和粗细相同的小棍。中国古代采用十进制计数法，因此将1至9共9个数字用9种规定的算筹组合形式来表示。同时，将所有数字分为横、纵两种摆放方式，以区别位值，如个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，而千位又用横式，依此类推，间隔交替。遇到数字“0”时，不摆放算筹，用一个空位表示。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式				丁	丁	丁	丁	丁
横式 —	=	≡	≡	上	上	上	上	上

$1\ 470\ 000-68\ 467=1\ 401\ 533$ 表示为

纵式 $\equiv 0 - \equiv \equiv \equiv \equiv \equiv \equiv \equiv \equiv$

图 1-5 算筹记数

到了 13 世纪，南宋数学家秦九韶首次用圆圈 “○” 表示空位，即零的意思。后来，人们约定俗成地以符



图 1-6 秦九韶

号 “○” 代表数字 “0”，这恰好与今天阿拉伯数字 “0”的形态相近。

不过多数人认为，“0”这一数学符号的发明应归功于公元 6 世纪的印度人。他们最早用黑点 (•) 表示零，后来逐渐变成了 “0”。这一过程至迟于公元 9 世纪已完成。有一块公元 876 年的石碑，因存于印度中央邦西北地区的瓜廖尔城而以瓜廖尔石碑著称，上面已记有数 “0”。

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

图 1-7 瓜廖尔数系

说起 “0”的出现，应该指出，我国古代文字中，“零”字出现得很早，不过那时它不表示“空无所有”，而只表示“零碎”“不多”的意思，如“零头”“零星”等。“一百零五”的意思是：在一百之外，还有一个零头五。随着阿拉伯数字的引进，“105”恰恰读作“一百零五”，“零”字与 “0” 恰好对应，“零”也就具有了 “0”的含义。

如果你细心观察的话，会发现罗马数字中没有 “0”。其实在公元 5 世纪时，“0” 已经传入罗马。但罗马教皇凶残而且守旧，他不允许任何人使用 “0”。有一位罗马学者在笔记中记载了关于使用 “0”的一些好处和说明，就被教皇召去，施以拶 (zǎn)

刑（古代刑罚，用刑具夹犯人的手指），再也不能握笔写字。但“0”的出现，谁也阻挡不住。现在，“0”已经成为含义最丰富的数字符号。“0”可以表示没有，也可以表示有，如气温 0°C ，并不是说没有气温；“0”是正负数之间唯一的中性数；任何数（0除外）的0次幂等于1。

十进制的形成

除了十进制以外，在数学萌芽的早期，还出现过五进制、二进制、三进制、七进制、八进制、十进制、十六进制、二十进制、六十进制等多种数字进制法。在长期实际生活的应用中，十进制最终占了上风。

人们称现在世界通用的数码1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0为阿拉伯数字，实际上它们是古代印度人最早使用的。后来，阿拉伯人将古希腊的数学融入自己的数学中，又把这一简便易写的十进制位值记数法传遍了欧洲，这一记数法逐渐演变成世界通用的阿拉伯数字。

有理数和无理数

数的概念、数码的写法和十进制的形成都是人类长期实践活动的结果。随着生产、生活的需要，人们发现，仅仅能表示自然数是远远不够

的。分配猎获物时，如果5个人分4件东西，每个人该得多少呢？于是分数就产生了。我国对分数很早就有深入的研究。约公元1世纪时，我国出现了第一部数学专著《九章算术》，其中给出了相当完整的分数运算法则，这是世界上对分数运算法则最早的系统表述。而类似的表述，印度直至公元7世纪才出现，欧洲更迟至15世纪以后。自然数、分数和0，统称为算术数。自然数也称为正整数。

随着社会的发展，人们发现很多具有相反意义的量，比如增加和减少，前进和后退，上升和下降，向东和向西。为了表示这样的量，又产生了负数。正整数、负整数和0，统称为整数。如果再加上正分数和负分数，就统称为有理数。有了这些数字表示法，人们计算起来就方便多了。

但是，在数字的发展过程中，一件不愉快的事发生了。公元前6世纪古希腊的毕达哥拉斯学派，是一个研究数学、科学和哲学的团体。他们认为“数”是万物的本源，支配着整个自然界和人类社会。因此，世间一切事物都可归结为“数”或“数”的比例，这是世界所以美好和谐的源泉。他们所说的“数”是指整数，分数的

出现，使“数”不那样完整了。由于分数都可以写成两个整数之比，所以他们的信仰没有动摇。但是学派中一个叫希帕索斯的学生发现，边长为1的正方形，它的对角线却不能用整数之比来表示。如图1-8，两个边长为1的正方形可以拼成一个大的正方形，这个大的正方形的面积为2，那么这个大的正方形的边长是多少？我们应该怎样表示它呢？

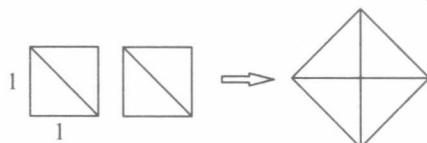


图 1-8

对于这样的问题，希帕索斯等人百思不得其解，最后认定这是一个从未见过的新数。这个新数的出现动摇了毕达哥拉斯学派哲学思想的核心，引起了学派的恐慌。为了保持支撑世界的数学大厦不要坍塌，毕达哥拉斯学派规定任何人都不得泄露新数存在的秘密。后来，希帕索斯违背诺言公布了这一发现，因而被毕达哥拉斯学派投向大海。然而，真理是藏不住的。后来，人们又发现了很多不能用两个整数之比写出来的数，如圆周率就是最重要的一个，人们称这些数字为无理数。

数学应用

手指计算器

生活中，我们的手也能成为一个进行简单计算的计算器。计算9的倍数时，可以利用下面这个小窍门来简便计算。

如图1-9所示，从左到右给你的手指编号。现在，选择你想计算的9的倍数。假设这个乘式是 7×9 ，只要像图1-10那样，弯曲标有数字7的手指。然后，弯曲的那根手指左边剩下的手指根数是6，右边剩下的手指根数是3，将它们放在一起，得出 7×9 的答案是63。



图 1-9



图 1-10

数学文化

进位制的由来

上古时候，人们为了数出物体的个数，便产生了自然数的观念。但是，如何读出和记出这些数呢？

由于自然数有无限多个，如果每

006 数学来了①

一个都用一个独立的名称和记号来表示，这显然是不可能的。有人做了一个统计，在莎士比亚的著作中，有17 000多个不同的词，即使一个英文程度很好的人，在阅读这位作家的著作时，也需要有一本专门词典来帮助。文字是如此的复杂，数字要是没有一种简化的方法去表示，也像文字这样复杂，那在表达数量关系时所出现的困难，是很难设想的。

实践的需要促进了进位制的产生。人类文明产生初期，多数民族由于实际生活的需要，都或多或少地创造出一定的进位制。但是，用专门数码来表示数的书写方法，却产生得很晚，甚至像古希腊、古罗马这样拥有高度文明的民族，用数码来表示数的书写方法也是极不完整的。直到纪元初年，人们才初步应用数码，并按一定的进位制来表示数。

国际上通用的是十进制读数与记数方法，即较低位上的十个单位组成较高位上的一个单位。在我国，很早就运用了这种进位制。如《易经》中表示数量时曾有“万有一千五百二十”的记载，这说明早在两千多年前，我国就有了十进位制。在甄鸾的《数术记遗》中也有关于十进制的记载，但

当时生产力不发达，人们在实际生活中还不迫切需要用很大的数去记载，因此对十进制缺乏统一的规定。

据调查，美国原始亚美利加各族的307种计数系统中，有146种是十进位的。可见，十进位制在历史上为人们所普遍采用。根据语言学家对世界各进化民族和多数原始民族语言的研究，由于人类的手有十个手指，可以自由伸屈，是一个很好的天然计数工具，因而人们不谋而合地都采用了十进位制。在英文中，“digit”这个单词既可以当“手指”讲，又可以当“数字”讲，这与人们长期用手指表示数字可能是有联系的。另外，十进位制比较简单，所以传播也就最广。

当然，除了十进位制外，还有其他进位制。实际上除0和1以外，任何自然数都可以用作进位制的基础数。例如，有二进位制、三进位制、五进位制、七进位制、八进位制、十一进位制、十二进位制、二十进位制和六十进位制等。像北美的印第安人，中美、南美的少数民族，西伯利亚的北部民族及非洲人等，常用五进位制和二十进位制。巴比伦人最初使用六十进位制，直到现在我们还在使用这种进位制，如一小时等于六十分钟，一分钟等于六十秒，圆周角等于

三百六十度，一度等于六十分等。其他如十二进位制也是比较方便的。因为十二进位制的基础数“十二”能被2, 3, 4, 6整除，用十二进位制做除法，能整除的机会较多。十二进位制今天还在应用，如一年有十二个月，一天是二十四小时（钟表面上仍只用十二）等。

任何一种基数 r 的进位制中，数的写法具有下列形式：

$$a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-3} + \dots + a_2 r + a_1.$$

这里， a_1 是个位数字， a_2 是十位数字， a_3 是百位数字，依此类推。如十进位数3 872，可写为： $3 872 = 3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10 + 2$ 。

科学技术发展到今天，很多问题的解决都需要进行大量的计算。在许多情况下，人们对计算速度的要求很高，必须使用自动控制。有些数学问题计算的工作量很大，需要进行极为繁杂的计算。这里遇到的联立方程可能不是两三个未知数，而是十个、几十个乃至几百个未知数，其计算的艰难复杂程度可想而知。这些都促使计算技术不断发展，以保证计算工作自动化，能用最短的时间解决各种复杂的数学题。为了适应这样的需要，人们发明了二进位制，用0和1两个符

号，就可以把一切自然数表示出来。

自然数：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十。

十进制：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10。

二进制：1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1 000, 1 001, 1 010。

为了区别不同的进位制，我们常常用括号加注的办法。例如，在十进位制里，数101表示为 $(101)_{10}$ ，在二进位制里，数101表示为 $(101)_2$ 。

由于二进位制只需要两个数字，人们就把电路的“开”“关”分别表示0和1这两个数码，进行复杂的运算，这就是电子计算机的简单原理。

数学好玩

找规律，填数字

【例1】找规律，填数字：8, 16, 32, _____, _____, ...。

分析：从第二个数起，每个数都是前面的数乘以2所得。据此解答，故答案是64, 128。

【例2】找规律，填数字：2, 9, 28, _____, 126, 217, ...。

分析：观测给出的数列可知， $2=1^3+1$, $9=2^3+1$, $28=3^3+1$,

008 数学来了①

$126=5^3+1$, $217=6^3+1$, 由此得出每一个数是它所在的项数的 3 次方加 1 所得。据此解答, 故答案是 $4^3+1=65$ 。

【例 3】 找规律, 填数字: 0, 7, 5, 9, 10, 11, 15, _____, _____, ...。

分析: 根据已知的 7 个数, 可以得到排列规律, 即奇数项的数从 0 开始, 后面的数依次加 5; 偶数项的数从 7 开始, 后面的数依次加 2。据此解答, 故答案是 13, 20。

【例 4】 计算: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+\cdots+99+100=$ _____。

解法 1:

$$\begin{aligned} & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+ \\ & 10+11+\cdots+99+100 \\ & = (1+100) + (2+99) + (3+ \\ & 98) + \cdots + (49+52) + (50+51) \\ & = 101 \times 50 \\ & = 5050. \end{aligned}$$

解法 2:

设 $1+2+3+\cdots+98+99+100=x$, 则 $100+99+98+\cdots+3+2+1=x$ 。

将方程两边相加, 得 $2x=(1+100)+(2+99)+\cdots+(99+2)+$

$(100+1)$ 。

化简得 $2x=101 \times 100$,
解得 $x=5050$ 。

解法 3:

先把 100 和 50 拿出, 计算其余的 98 个数的和。

$$\begin{aligned} & 99+1=100, 98+2=100, \cdots, \\ & 49+51=100, \\ & \text{所以 } 1+2+3+\cdots+98+99+ \\ & 100=100 \times 49+100+50=5050. \end{aligned}$$

【参考文献】

- 王永建《数学的起源与发展》, 江苏人民出版社 1981 年。
- 李文林《数学史概论》, 高等教育出版社 2002 年。
- 徐品方、张红《数学符号史》, 科学出版社 2006 年。
- 王章雄《数学的思维与智慧》, 中国人民大学出版社 2011 年。
- 郑正亚《数的起源和发展》, 《零陵学院学报》2003 年第 5 期。
- 骆日平《数概念的起源与发展》, 《湖南教育: 下》2010 年第 2 期。
- 汤双《零、分数的出现》, 《初中生世界》2014 年第 5 期。
- 王玲《数字与历史趣谈》, 《发展》2016 年第 12 期。

二 几何学， 让我走近你

几何学是一门历史悠久、源远流长的学科。因为它与人类的生活密切相关，所以在人类的早期文明里，它凭借丰富的直观形象和深奥的内在本质，成为当之无愧的“老大哥”。

几何学是从制造器皿、测量容器、丈量土地等实际问题中产生和发展起来的。早在几十万年以前，当原始人类为了采集食物而用石块制作简单的武器和工具时，就已开始出现形的观念。随着人类社会的不断发展，人们对物体的形状、大小和相互之间的位置关系的认识愈来愈丰富，逐渐地积累起比较丰富的几何学知识。

在人类历史的长河中，无论在思想领域的突破上，还是在科学方法论的创建上，几何学总扮演着“开路先锋”的角色。

数学探秘

几何学的起源

几何学是研究空间（或平面）图形的形状、大小和位置的相互关系的一门科学，简称为几何。

由于人类生产和生活的需要，产生了几何学。

一、古埃及与古巴比伦

古埃及人在尼罗河两岸开垦土地，种植庄稼。可是，每到雨季，尼罗河便泛滥成灾，尼罗河两岸的土地被汹涌的河水淹没。待洪水退去之后，土地的界线不分明。人们要重新划定地界、丈量土地，这样人们就需要用到最基础的几何知识——长度、面积的测量与计算。因此，人们积累了许多测量土地要用到的几何知识，几何在古埃及人测量土地的生产实践中萌发了。



图 2-1 古埃及司绳的测量活动

古巴比伦人在 3 000 多年前就掌握了大量的数学知识和一些独特巧妙

的解题策略。古巴比伦人能把不规则形状的田地分割为长方形、三角形和梯形来计算面积，也能计算简单的体积。他们熟悉等分圆周的方法，甚至还使用了勾股定理。

在古埃及与古巴比伦，人们都是从社会实践过程中逐步归纳、总结出一些计算法则，用来解决当时遇到的实际计算问题，边试算，边改进，而不涉及推理论证的内容。

二、古代中国

我国对几何学的研究也有悠久的历史。从现存的一些较早的数学书籍来看，几何知识的积累，也是来源于社会实践的推动。天文观测、兴修水利、丈量田亩等，都促进了几何学的发展。在我国的黑陶文化时期，陶器上常用各种几何图案加以装饰，如菱形、正方形和圆内接正方形等。

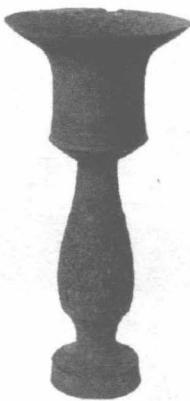


图 2-2 高柄镂空蛋壳陶杯

在大约成书于公元前 2 世纪的《周髀算经》中，在进行具体数字计算的同时，还明确地叙述出在直角三角形中求斜边长的一般方法，这就是著名的勾股定理。墨家学派创始人墨子在他的著作《墨经》中甚至试图对一些几何概念给出逻辑的定义。在《九章算术》里，记载了土地面积和物体体积的计算方法。祖冲之致力于圆周率的计算，首次将圆周率的数值精确地推算到小数点以后第 7 位数字。还有古代数学家刘徽、王孝通等，都对几何学的发展做出了重大的贡献。



图 2-3 墨 子

古代中国数学著作中的叙述，表明我国至少在公元前 5 世纪以后，就已经开始对几何学中的某些关于共性的问题产生兴趣，不再局限于对具体几何计算问题的逐个讨论。

三、古代希腊

对几何学进行全面而深刻的研究，使之发展成为一门独立的理论学科，这一历史性的转变，是在古代希腊完成的。古希腊跟古埃及等国家通商，并进行知识交流，使得各条知识细流在古希腊汇聚。古希腊人从古埃及学到了测量与绘画等几何初步知识，并在此基础上逐步充实提高，形成了一门完整的几何学。“几何学”的英文就是从希腊语演变而来，一直沿用至今，其原意是“测量土地技术”。

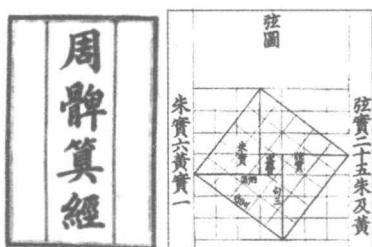


图 2-4 《周髀算经》与赵爽弦图

公元前 3 世纪，古希腊诞生了一位著名的数学家——欧几里得。欧几里得专心从事数学研究，一生成就卓然。欧几里得编著的《几何原本》，集当时希腊数学之大成，是用公理化方法建立起来的数学演绎体系的最早的典范之作，是几何学史上的一个里程碑。《几何原本》在西方被称为“数学的圣经”，对西方思想界有重要

影响。《几何原本》与《九章算术》一起，是现代数学思想的两大来源之一。



图 2-5 欧几里得

欧几里得的《几何原本》是几何学史上有深远影响的一本书，自《几何原本》问世以来，2 000 多年间，已发行 1 000 多种版本。1607 年，我国数学家徐光启和意大利传教士利玛窦合译的《几何原本》前六卷中文本出版，这是西学东渐的重要标志。《几何原本》在中国的传播，对中国学术界的影响甚大。现今我们学习的几何学课本多是以《几何原本》为依据编写的。

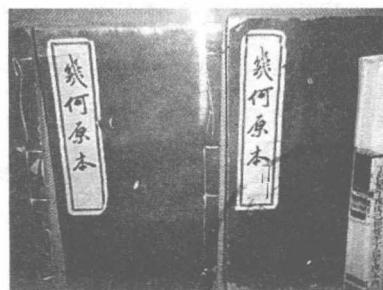


图 2-6 《几何原本》