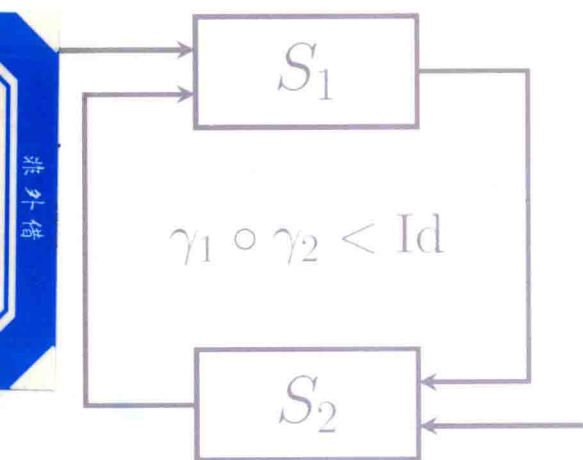


信息约束下的非线性控制

刘腾飞 姜钟平 著

Nonlinear Control
Under Information Constraints

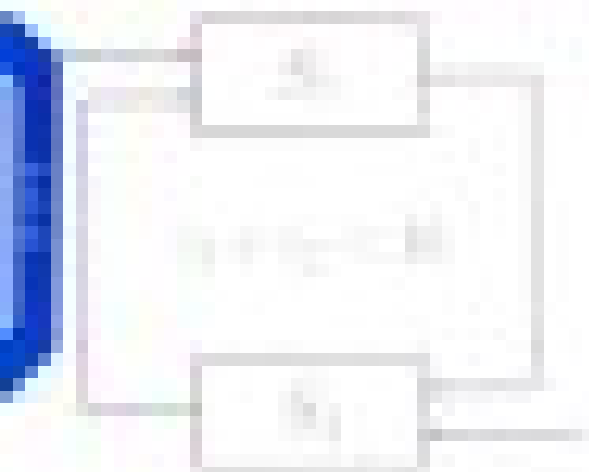


信息约束下的非线性控制

詹姆斯·巴特·肯尼

James B. Cleff

Under Information Constraints



信息约束下的非线性控制

刘腾飞 姜钟平 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍非线性小增益控制的分析与设计方法。从单回路关联系统到多回路动态网络,本书详细回顾非线性小增益理论的发展历程,着重介绍通信与网络约束下以小增益定理为工具进行非线性控制设计与分析的基本方法。本书所涉及的控制问题涵盖非线性系统的测量反馈控制、事件驱动控制、量化控制、分布式控制等。其中大部分的内容都是首次以中文形式出版。

本书在写作过程中尽量降低了对预备知识的要求,阅读本书仅需要了解非线性系统的一些基本概念。

本书可作为非线性控制理论的研究者的参考用书,也能够为控制及相关专业的科研人员和学生研究课题、开阔视野提供参考。

图书在版编目(CIP)数据

信息约束下的非线性控制/刘腾飞,姜钟平著. —北京:科学出版社, 2018.1

ISBN 978-7-03-055650-9

I. ①信… II. ①刘… ②姜… III. ①非线性控制系统 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 289800 号

责任编辑:张 震 姜 红 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:吴兆东 / 封面设计:无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 1 月第 一 版 开本:720 × 1000 1/16

2018 年 1 月第一次印刷 印张:14 1/4

字数:288 000

定价:89.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

非线性普遍存在。在本书中,非线性系统泛指不一定满足叠加原理的动态系统。换言之,本书所讨论的结果也适用于线性系统。对于非线性系统,线性系统与控制理论中的许多重要结果比如分离原理难以成立,全局性质和局部性质未必一致,控制系统的各个子系统必须协调设计。同时,与线性系统相比,非线性系统的行为更具多样性,控制算法的研究一般是针对特定类型非线性控制系统展开讨论和发展的。

非线性控制理论在过去三十年已经取得了巨大进展,然而仍有诸多理论难点问题悬而未决。特别是近年来,计算机、通信以及传感器等技术的飞速发展正在加速智能时代的到来,诸如智能车辆、智能电网、智能交通、智能制造等最新的应用场景为非线性控制解决实际工程问题创造了新的机遇。时滞非线性系统、非线性输出调节、切换系统、混杂系统、复杂大系统、多智能体系统等成为国际控制界广泛关注的热点方向,新的理论成果持续涌现。面向实际工程需求,基于多学科的融合和交叉,进一步深入研究先进非线性控制理论并提出新一代非线性控制技术,可谓大势所趋。

在上述新兴的非线性控制研究方向中,网络和通信约束下的非线性控制已经成为极具代表性的热点方向之一。其中,信息约束(量化、采样、网络关联等)与复杂动力学(高阶、不确定、非线性)等并存所导致的综合复杂性给现有的非线性控制理论带来了新的挑战。比如,一个很小的量化误差就可能严重影响一个“良好设计”的非线性控制系统的性能,甚至破坏闭环系统的稳定性。

本书的重点是将单回路的非线性小增益定理推广到多回路网络化系统的情形,并在此基础上提出一套新的非线性控制分析与设计工具。该工具已经成为解决信息约束下的非线性控制问题的有效手段。这些问题包括量化控制、事件触发控制、分布式控制等。

本书第1章给出稳定性的一些必备知识,包括李雅普诺夫稳定性和输入到状态稳定性等基本概念和相关性质。第2章介绍两个子系统组成的单回路关联系统的非线性小增益定理。第3章将单回路非线性小增益定理的结果推广到多回路的情形。第4章到第6章分别针对信息约束下非线性控制的几个代表性问题提出小增益控制设计方法。具体而言,第4章研究受测量干扰影响的不确定非线性系统的测量反馈控制基本问题。第5章针对基于量化的反馈信号进行非线性控制的问题。第6章讨论信息交换拓扑约束下实现非线性系统群体协同的分布式控制问题。

需要说明的是,本书仅考虑了一些有代表性的典型非线性系统(比如严格反馈系统和输出反馈系统),而本书所提出的非线性控制工具的适用范围绝不仅限于此。大部分结果都能够推广到更一般的系统,一些简单的推广在书中也会提及。

为了更好地同非线性控制基础知识相衔接,本书主要采用李雅普诺夫函数来刻画稳定性并进行控制系统分析与设计。相信本书的出版对于读者了解非线性控制理论的最新进展以及更好地解决相关工程控制问题是有益的。

本书主要内容都是两名作者在过去八年密切合作的成果,时间跨越了第一作者攻读博士学位、从事博士后研究工作以及回国任教等人生重要阶段。

本书作者指导的研究生张朋朋、阿迪亚、王站修、秦正雁、蔡敏、陈雷等协助完成了书稿的编辑工作,在此表示感谢。

东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室对本书的写作给予了大力支持。本书的出版得到了国家自然科学基金(项目批准号:61522305、61633007、61374042)的资助,在此一并致谢。

作 者

2017 年 10 月

符号与缩写

$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}_+$	非负实数集
$\mathbb{R}^n$	n 维欧几里得空间
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集
$\mathbb{N}$	自然数集
x^T	向量 x 的转置
$ x $	向量 x 的欧几里得范数
$ A $	矩阵 A 的诱导欧几里得范数
$\text{sgn}(x)$	实数 x 的符号函数: 如果 $x > 0$, 则 $\text{sgn}(x) = 1$; 如果 $x = 0$, $\text{sgn}(x) = 0$; 如果 $x < 0$, 则 $\text{sgn}(x) = -1$
$a \bmod b$	被除数 $a \in \mathbb{R}$ 和除数 $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的带余除法 (欧几里得除法) 的余数
$\ u\ _\Delta$	对于 $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\ u\ _\Delta = \text{ess sup}_{t \in \Delta} u(t) $, 其中 $\Delta \subseteq \mathbb{R}_+$
$\ u\ _\infty$	当 Δ 取 $[0, \infty)$ 时的 $\ u\ _\Delta$
$:=$ 或 $\stackrel{\text{def}}{=}$	定义为
$\equiv$	恒等于
$f \circ g$	函数 f 和 g 的复合函数, 即 $f \circ g(x) = f(g(x))$
$\lambda_{\max}(\lambda_{\min})$	最大 (最小) 特征值
$\nabla V(x)$	当自变量为 x 时, 函数 V 的梯度向量
Id	恒等函数
$\mathcal{B}^n$	$\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心的单位球
$\text{cl}(\mathcal{S})$	集合 $\mathcal{S}$ 的闭包
$\text{int}(\mathcal{S})$	集合 $\mathcal{S}$ 的内点集
$\text{co}(\mathcal{S})$	集合 $\mathcal{S}$ 的凸包集
$\overline{\text{co}}(\mathcal{S})$	集合 $\mathcal{S}$ 的闭凸包集
AS	渐近稳定
GAS	全局渐近稳定
GS	全局稳定

IOS	输入到输出稳定
ISpS	输入到状态实际稳定
ISS	输入到状态稳定
OAG	输出渐近增益
UBIBS	一致有界输入有界状态
UO	无界能观
WRS	弱鲁棒稳定

目 录

前言

符号与缩写

第 1 章 动态网络的控制问题	1
1.1 动态网络与控制	1
1.2 李雅普诺夫稳定性	4
1.3 输入到状态稳定性	7
1.3.1 输入到状态稳定性的定义	8
1.3.2 输入到状态稳定李雅普诺夫函数	13
1.4 输入到输出稳定性	15
第 2 章 非线性小增益定理	17
2.1 基于轨迹的非线性小增益定理	20
2.2 基于李雅普诺夫函数描述的非线性小增益定理	25
2.3 小增益控制设计	29
2.3.1 增益配置	29
2.3.2 小增益控制设计的一个范例	31
2.4 注记	35
第 3 章 多回路非线性小增益定理	37
3.1 连续时间动态网络	40
3.1.1 构造输入到状态稳定李雅普诺夫函数的基本思路	41
3.1.2 一类多回路动态网络的输入到状态稳定李雅普诺夫函数	42
3.1.3 连续时间动态网络多回路小增益定理的证明	44
3.1.4 动力学非连续的动态网络	49
3.1.5 由输入到输出稳定的子系统构成的动态网络	50
3.2 离散时间动态网络	52
3.2.1 耗散形式描述的离散时间动态网络的多回路小增益定理的证明	55
3.2.2 增益裕度形式描述的离散时间动态网络的多回路小增益定理的证明	58
3.3 注记	61
第 4 章 测量反馈控制	63
4.1 静态状态测量反馈控制	64
4.1.1 一种改进的增益配置方法	64

4.1.2	高阶非线性系统的情形	68
4.1.3	迭代设计	70
4.1.4	基于多回路非线性小增益定理的系统集成	73
4.2	事件触发和自触发控制	76
4.2.1	事件触发控制的小增益条件	78
4.2.2	存在外部干扰的事件触发控制和自触发控制	82
4.2.3	非线性不确定系统的事件触发控制	87
4.3	注记	90
第 5 章	非线性系统的量化控制	92
5.1	静态量化: 扇形域方法	93
5.1.1	迭代设计	97
5.1.2	量化控制器设计	100
5.1.3	基于多回路小增益定理的闭环量化控制系统集成	100
5.1.4	数值例子	105
5.2	动态量化控制	107
5.2.1	问题描述	109
5.2.2	量化器	111
5.2.3	量化控制器的结构和控制目标	111
5.2.4	基于集值映射的静态量化控制迭代设计	113
5.2.5	量化控制器	117
5.2.6	基于小增益的系统分析和闭环量化系统的嵌套不变集	117
5.2.7	量化控制律的设计步骤	120
5.2.8	动态量化	121
5.3	注记	127
第 6 章	分布式非线性控制	129
6.1	有向图中的一个多回路小增益结果	132
6.2	分布式输出反馈控制	133
6.2.1	分布式输出反馈控制器	136
6.2.2	基于多回路小增益的系统集成	137
6.2.3	对信息交换时滞的鲁棒性	138
6.2.4	受控自主体的无界能观和输入到输出稳定性的证明	139
6.3	非完整移动机器人的编队控制	143
6.3.1	动态反馈线性化	145
6.3.2	一类实现输入到输出稳定的控制律	146
6.3.3	分布式编队控制器设计	152

6.3.4	小增益分析和定理 6.2 的证明	155
6.3.5	对相对位置测量误差的鲁棒性	157
6.3.6	数值例子	158
6.4	具有切换拓扑的分布式控制	160
6.4.1	强输出一致性问题	161
6.4.2	一类非线性系统的性质	161
6.4.3	命题 6.2 的证明	163
6.4.4	具有切换拓扑的强输出一致性问题的主要结论	171
6.4.5	定理 6.3 的证明	173
6.4.6	移动机器人的分布式编队控制	179
6.4.7	仿真结果	184
6.5	注记	187
附录		188
附录 A	与比较函数相关的几个引理	188
附录 B	第 4 章和第 5 章中部分结论的证明	191
B.1	引理 4.2 的证明	191
B.2	引理 5.1 的证明	192
B.3	引理 5.3 的证明	194
B.4	引理 5.4 的证明	196
B.5	引理 5.5 的证明	198
B.6	引理 5.8 的证明	202
参考文献		204

第 1 章 动态网络的控制问题

1.1 动态网络与控制

计算机、通信和传感技术的快速发展为先进控制在复杂系统中的应用开拓了越来越广阔的空间。这其中出现的一个突出问题就是，怎样系统化地处理诸如非线性、高维性、不确定性及信息约束等动态系统的本质属性问题，以及诸如量化、采样及脉冲事件等网络化系统特有的复杂行为。本书中将复杂系统看作是由具有特定性质的子系统相互连接而成的动态网络，并利用其中各个子系统以及它们连接上的特性来解决控制问题。

图 1.1 所示是一个典型的单闭环状态反馈控制系统。其中， x 是被控对象的状态， u 是控制输入， x^m 是 x 的测量值， u^d 是控制器计算的期望控制信号。传感器将测量到的状态信号发送到控制器，而控制器计算出的控制信号通过执行器作用于被控对象以实现特定控制目标。稳定性是控制系统的关键问题。通过设计稳定的控制系统可以使实际状态信号和期望状态信号的误差最终收敛到零，从而实现控制目标。当然，往往也可以通过状态变换将这个控制目标转化为使状态收敛到原点。本书讨论怎样利用动态网络的思想来解决相关的控制问题。

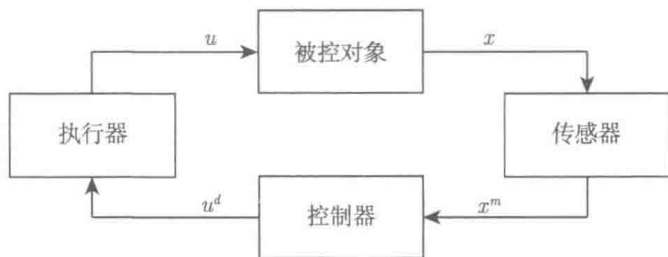


图 1.1 状态反馈控制系统

实际控制系统不可避免地受到传感器、执行机构等环节以及被控对象中未建模动力学等复杂不确定因素的影响。鲁棒控制的基本思想就是把一个控制系统转化成由无扰动的标称系统和扰动系统相互耦合而成的动态网络，并设计标称系统使之对扰动鲁棒。

为简单起见，首先考虑一种静态线性状态反馈的情况：

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1)$$

$$u^d = -Kx^m \quad (1.2)$$

式中, $x, x^m \in \mathbb{R}^n$; $u, u^d \in \mathbb{R}^m$; A, B, K 是具有相应维数的实矩阵。

分别定义测量误差和执行机构误差: $\tilde{x} = x^m - x$; $\tilde{u} = u^d - u$ 。那么, 闭环系统就可以转化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(-K(x + \tilde{x}) - \tilde{u}) \\ &= (A - BK)x - BK\tilde{x} - B\tilde{u} \end{aligned} \quad (1.3)$$

若存在一个 K 使得 $(A - BK)$ 是一个赫尔维茨矩阵 (即 $(A - BK)$ 的特征值均位于复平面的左半开部), 并且 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{u}$ 均有界, 那么系统状态就可以被控制到原点的一个特定有界邻域内。对于这样的线性系统, 利用叠加原理, 可以分别分析 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{u}$ 对控制误差的影响。进一步地, 如果 $(A - BK)$ 的特征值可通过选择 K 任意配置 (复特征值成共轭对出现), 那么 $\tilde{u}$ 的影响可以被抑制到无限小。但这种分析对扰动项 $BK\tilde{x}$ 不适用 (因为 $BK\tilde{x}$ 与 K 有关)。上述讨论可以用典型的鲁棒控制框图表示, 见图 1.2。

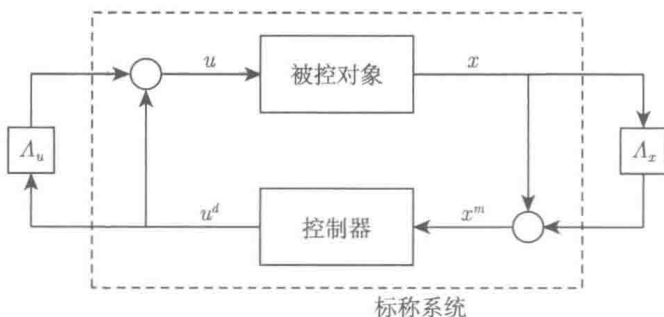


图 1.2 鲁棒控制设计

利用鲁棒控制的思想, 也可以解决某些更复杂的、扰动项依赖于系统状态但不能保证有界的情况。假设 $\tilde{x}$ 、 $\tilde{u}$ 满足如下扇区特性:

$$|\tilde{x}| \leq \bar{\delta}_x |x| + \bar{c}_x \quad (1.4)$$

$$|\tilde{u}| \leq \bar{\delta}_u |u^d| + \bar{c}_u \quad (1.5)$$

式中, $\bar{\delta}_x, \bar{c}_x, \bar{\delta}_u, \bar{c}_u$ 是非负常数。那么, 可以找到 $\delta_x, \delta_u, c_x, c_u$, 使得

$$\tilde{x} = \delta_x(t)x + c_x(t) \quad (1.6)$$

$$\tilde{u} = \delta_u(t)K(1 + \delta_x(t))x + \delta_u(t)Kc_x(t) + c_u(t) \quad (1.7)$$

并且, $|\delta_x(t)| \leq \bar{\delta}_x$, $|\delta_u(t)| \leq \bar{\delta}_u$, $|c_x(t)| \leq \bar{c}_x$, $|c_u(t)| \leq \bar{c}_u$ 对所有 $t \geq 0$ 都成立。

那么, 系统 (1.3) 可写成 $\dot{x} = (A - BK)x + w$ 的形式, 其中

$$\begin{aligned} w(t) &= -BK(\delta_x(t) + \delta_u(t)(1 + \delta_x(t)))x(t) \\ &\quad - B(Kc_x(t) + K\delta_u(t)c_x(t) + c_u(t)) \\ &:= \phi(x(t), c_x(t), c_u(t), t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

显然, 存在非负常数 a_1, a_2, a_3 使得 $|\phi(x, c_x, c_u, t)| \leq a_1|x| + a_2|c_x| + a_3|c_u|$ 对所有 $t \geq 0$ 都成立。这样, 闭环系统就转化成了如图 1.3 所示的标称系统和扰动项相互耦合的形式。对于这类系统, 可以使用现成的鲁棒控制方法来解决其镇定问题 [1]。一个典型的办法就是使用 Sandberg 和 Zames 提出的经典小增益定理, 有兴趣的读者可以参考文献 [2]、文献 [3] 以及文献 [4] 的第 5 章和文献 [5] 的第 4 章。

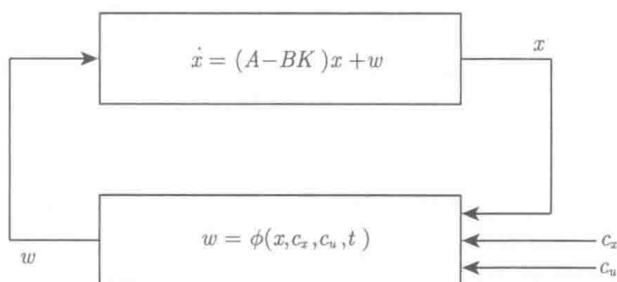


图 1.3 标称系统和扰动项的耦合

对于一般的非线性控制系统, 上面所讨论的问题会更加复杂。比如, 考虑常见的严格反馈非线性系统 (俗称“下三角系统”) 作为被控对象:

$$\dot{x}_i = \Delta_i(\bar{x}_i, w) + x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (1.9)$$

$$\dot{x}_n = \Delta_n(\bar{x}_n, w) + u \quad (1.10)$$

式中, $[x_1, \dots, x_n]^T := x \in \mathbb{R}^n$ 是其状态; $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$, $u \in \mathbb{R}$ 是其控制输入; $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ 表示外部干扰; $\Delta_i: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$ 是局部利普希茨的函数。考虑 x_1 为系统的输出。已有结果 (如文献 [6]~文献 [8]) 表明, 基于反步法 (backstepping) 的迭代设计对解决这种系统的控制问题非常有效。根据把被控对象看作是由 x_i 子系统相互耦合而成的动态网络, 迭代设计的基本思想就是依次把 x_{i+1} 看作 $\bar{x}_i$ 子系统的 (虚拟) 控制输入, 并设计控制器直至真正的控制输入 u 出现。图 1.4 所示的就是上述系统内部各个子系统之间的相互耦合关系。

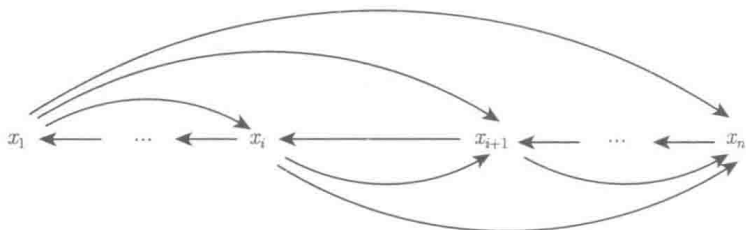


图 1.4 严格反馈系统的动态网络表示

对于这样的系统，干扰 w 的影响可能被各个子系统之间的相互耦合反复放大。如果系统还受到传感器噪声的影响，那么情况更加恶劣。对于一个一阶系统，即使是在无传感器噪声的情况下其状态能够渐近收敛到原点，小的传感器噪声也可能使系统状态发散。而量化控制问题则看成是一种测量误差满足扇区特性的鲁棒控制问题。需要注意的是，扇区特性不能保证有界性。本书后续还会重点讨论非线性系统的量化控制问题。

动态网络也同样存在于分布式控制系统中。考虑如下一个多自主体系统：

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (1.11)$$

$$y_i = h_i(x_i) \quad (1.12)$$

式中， $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ 是子系统 i 的输出； $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ 是子系统 i 的状态； $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ 是子系统 i 的控制输入。在分布式控制结构中，每个子系统由一个控制器控制。控制器之间通过信息交换实现对各个子系统输出的协调控制。一个典型的例子就是输出一致，即对任意 $i, j = 1, \dots, N$ ，实现

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_i(t) - y_j(t)) = 0 \quad (1.13)$$

对于这类问题，动态网络中的相互耦合关系是由控制器之间的信息交换导致的。

本书将介绍一套面向动态网络的非线性控制设计新工具，并将其应用于测量反馈控制、事件驱动控制、量化控制以及分布式控制等。这一工具能够将相关的控制问题转化为可解的动态网络的稳定性（镇定）问题。特别地，本书将主要使用输入到状态稳定性（input-to-state stability, ISS）或更一般的输入到输出稳定性（input-to-output stability, IOS）的概念来刻画这些动态网络各个子系统的稳定性。作为后续章节的基础，后续三节将简要介绍李雅普诺夫稳定性、输入到状态稳定性以及输入到输出稳定性的基本概念及相关特性。

1.2 李雅普诺夫稳定性

稳定性是控制系统的最基本要求。控制的一个重要问题就是如何通过设计控

制器使闭环系统稳定。本节简要回顾李雅普诺夫稳定性的一些基本概念。

定义 1.1 如果函数 $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足 $\alpha(0) = 0$ 且 $\alpha(s) > 0$ 对所有 $s > 0$ 都成立, 那么称之为正定函数。

定义 1.2 如果一个连续函数 $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 严格递增且满足 $\alpha(0) = 0$, 称为 $\mathcal{K}$ 类函数并表示为 $\alpha \in \mathcal{K}$; 进一步地, 当 $s \rightarrow \infty$ 时, $\alpha(s) \rightarrow \infty$, 那么称之为 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数并表示为 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 。

定义 1.3 考虑一个连续函数 $\beta: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 。如果对于每个特定的 $t \in \mathbb{R}_+$, $\beta(\cdot, t)$ 均是一个 $\mathcal{K}$ 类函数, 并且对于每个特定的 $s > 0$, $\beta(s, \cdot)$ 递减并满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$, 那么称之为 $\mathcal{KL}$ 类函数并表示为 $\beta \in \mathcal{KL}$ 。

为便于后续讨论, 利普希茨连续性的相关定义也在这里给出。

定义 1.4 对于 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$, 考虑函数 $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 。如果存在一个非负常数 K_h 使得

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq K_h |x_1 - x_2| \quad (1.14)$$

对任意 $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ 都成立, 那么称 h 在 $\mathcal{X}$ 上是利普希茨连续的或利普希茨的。

定义 1.5 考虑函数 $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, 其中 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开的连通集, $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ 。如果对于每个 $x \in \mathcal{X}$ 都存在一个邻域 $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$, 使得 h 在 $\mathcal{X}_0$ 上是利普希茨的, 那么称 h 在 $\mathcal{X}$ 上是局部利普希茨的。

定义 1.6 考虑函数 $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, 其中 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ 。如果 h 在任意有界且封闭的集合 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$ 上都是利普希茨的, 那么称 h 在任意紧集上是利普希茨的。

考虑系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.15)$$

式中, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个局部利普希茨函数。假设原点是该系统的一个平衡点, 即 $f(0) = 0$ 。

当然, 如果平衡点 x^e 非原点, 那么可以通过坐标转换 $x' = x - x^e$ 将平衡点移到原点处。因此, 假设平衡点在原点处并不失一般性。系统 (1.15) 在初始条件 $x(0) = x_0$ 下的解表示为 $x(t, x_0)$, 或者简单写作 $x(t)$ 。同时, 用 $[0, T_{\max})$ 表示 $x(t, x_0)$ 向右有定义的最大区间, 其中 $0 < T_{\max} \leq \infty$ 。

李雅普诺夫稳定性的标准定义是以“ ε - δ ”条件给出的, 参见文献 [9] 和文献 [10] 中第四章。为了方便将李雅普诺夫稳定性和输入到状态稳定性加以比较, 定义 1.7 将使用比较函数 $\alpha \in \mathcal{K}$, $\beta \in \mathcal{KL}$ 给出李雅普诺夫稳定性的定义。关于李雅普诺夫稳定性的标准定义和定义 1.7 之间的等价关系的证明可见文献 [10] 中附录 C.6。在文献 [9] 中定义 2.9 和定义 24.2 也有相关讨论。

定义 1.7 系统 (1.15) 在原点处是

(1) 稳定的, 如果存在 $\alpha \in \mathcal{K}$ 和一个常数 $c > 0$ 使得对任意 $|x_0| \leq c$ 和 $t \geq 0$ 都满足

$$|x(t, x_0)| \leq \alpha(|x_0|) \quad (1.16)$$

(2) 全局稳定 (globally stable, GS) 的, 如果性质 (1.16) 对任意初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 都成立;

(3) 渐近稳定 (asymptotically stable, AS) 的, 如果存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和一个常数 $c > 0$ 使得对任意 $|x_0| \leq c$ 和 $t \geq 0$ 都满足

$$|x(t, x_0)| \leq \beta(|x_0|, t) \quad (1.17)$$

(4) 全局渐近稳定 (globally asymptotically stable, GAS) 的, 如果条件 (1.17) 对任意初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 都成立。

依据标准定义, 在原点处全局渐近稳定可被解释为在原点处全局稳定且在原点处具有全局收敛的性质。所谓全局收敛性质是指对所有 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$ 。参见文献 [10] 中定义 4.1。可见, 全局渐近稳定不仅仅是全局收敛。

下面, 定理 1.1 给出了李雅普诺夫稳定性和渐近稳定的充分条件, 称为李雅普诺夫第二方法或直接法。

定理 1.1 设原点为系统 (1.15) 的一个平衡点, 并设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为原点的一个邻域。取一个连续可微的函数 $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ 。如果函数 V 满足

$$V(0) = 0 \quad (1.18)$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (1.19)$$

$$\nabla V(x)f(x) \leq 0, \quad x \in \Omega \quad (1.20)$$

那么系统 (1.15) 在原点处是稳定的。进一步地, 如果

$$\nabla V(x)f(x) < 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (1.21)$$

那么系统 (1.15) 在原点处是渐近稳定的。

满足式 (1.18)~式 (1.20) 的函数 V 称为李雅普诺夫函数。如果其进一步满足式 (1.21), 那么称其为严格李雅普诺夫函数 [11]。

有这样一个问题, 即能否将定理 1.1 中的 Ω 直接替换为 $\mathbb{R}^n$ 从而保证全局渐近稳定。文献 [9] 中第 109 页给出了如下的例子。

例 1.1 考虑系统

$$\dot{x}_1 = \frac{-6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \quad (1.22)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \quad (1.23)$$