初等组合最优化论

（上册）

秦裕瑗　邓旭东　著

科学出版社

初等组合最优化论

（上 册）

秦裕瑗　邓旭东　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以生物进化为自然原型，模仿导数概念与牛顿切线法，通过建立基本变换公式与一般邻点法，形成了研究组合最优化论的核心思想和方法. 本书分上、下两册共三篇（12 章）展开学术探讨，上册（上篇）建立了本学科的公理系统和科学研究纲领——发现算法的方法，指出组合型与连续型最优化理论的并行关系. 在此基础上，下册（中、下两篇）对多个经典问题的各自实例进行了探讨，整理出它们的常用求解算法，并探讨了它们之间的相互关系.

本书的读者对象主要是数学相关专业的研究人员与专家学者，也可作为数学、管理科学与工程等学科专业研究生的学习教材和科学研究工作者的参考书籍.

图书在版编目(CIP)数据

初等组合最优化论(上册)/秦裕瑗，邓旭东著. —北京：科学出版社，2017. 8

ISBN 978-7-03-052829-2

I. ①初… II. ①秦… ②邓… III. ①组合-最优化 IV. ①O122.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 107500 号

责任编辑：李静科／责任校对：张凤琴
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017 年 8 月第一次印刷 印张：12 1/4
字数：241 000

定价：78.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

撰写本书的中心意图是为数学分支——组合最优化建立基础理论系统. 本书首先给出了组合最优化问题的定义和一般最优化原理, 这是建设基础理论工作的第一层.

一个数学对象的优化问题由诸多实例组成, 每个实例涉及四个集合: 论域、可行解 (最优解)、可行域以及所赋实数值 (权) 所在集合. 在论述实例时, 总会涉及集合与其子集合之间, 或集合与元素之间的关系. 本书把一般原理应用于论域和可行域, 建立了论域型和可行域型的最优化原理. 对于最基本的实例, 例如, 规定可行解的值是诸元素的值之和, 所求最小值就是一种优化的提法, 记作 (min, +) 实例. 在以后的计算过程中, 这样的实数集必须构成一个半群. 遵从一些前辈学者的见解, 本书在两个可行解 a, b 之间建立了基本变换公式: $a\Delta\tau(U, W) \in \pi^{(2)}$, 其中 $U = a_b = a\backslash b, W = b_a = b\backslash a$, 符号 Δ 表示求集合间的对称差运算, 变换规则是 $\tau(U, W) = U \cup W$. 在演算基本变换公式的过程中, (min, +) 型实例所赋的实数之间是一个加法交换群. 在此基础上, 本书引入了邻域概念, 建立了拓扑结构. 像布尔巴基学派那样, 我们识别出组合最优化的三个基本结构, 即序结构、代数结构和拓扑结构方面应有的条件, 这是建设基础理论工作的第二层.

而采取什么技术, 添加什么辅助公理, 让所得结构成为人们较为熟悉或者有望开展研究工作的数学结构, 并有效地表现出来, 为以后所用, 不同学者所得的结果无须一致.

本书以基本变换公式为核心, 直接把所得的序结构与交换群合并, 在实数集上建立了互相同构的四个具体的 $(\max/\min, +/\times)$ 准域, 建立了强优选准域, 提出了极优代数方法, 加上从邻域概念所得的拓扑结构, 成为建设组合最优化论基础理论的最终表现形式.

本书还用基本变换公式建立了邻点型和碎片型的最优化原理, 把一般原理和所建立的这四个原理依次称为第 0, 1, 2, 3, 4 最优化原理, 这是建设基础理论工作的第三层.

最后, 基于上述数学结构系统, 建立了拉卡托斯型的研究组合最优化问题实例的纲领, 成为发现精确方法的方法. 还论述了它们不仅是组合最优化论的基础理论系统, 也能为组合数学、普通大学教育的运筹学课程所用.

上述所论组成本书上篇, 共六章. 由于没有涉及计算复杂性问题, 称之为初等组合最优化论的基础理论.

按数学对象的代数结构, 把问题分类为集合型、向量集型和方阵集型等. 中篇有三章, 第 7 章主要用极优代数方法讨论策略优化问题 (动态规划) 实例的求解方法, 并研究诸实例之间的元型–衍生关系和方法, 我们还重建了吴学谋的首 N 阶优化原理和吴沧浦的多目标优化原理; 第 8 章用基本变换公式直接得到线性规划的改进单纯形算法; 第 9 章用极优代数方法主要讨论同顺序流水作业排序问题.

下篇分三章. 第 10 章按科学研究纲领整理树的优化实例的诸种算法; 第 11 章以极优代数的摹矩阵为工具, 系统地讨论路的优化问题; 第 12 章建立了匹配优化原理, 像求解不定积分的方法那样, 在 Q 类图形上求解诸多匹配优化数字例.

论述过程中, 本书: ① 直接从问题的定义与一般原理得到了五种八个求解实例的初等方法 (合称为第 0 类方法), 再在上述四个新建的最优化原理上代数地导出各自 4 类求解实例的方法; ② 提出了一般优化扩充方法, 统一地求解了数列 (首 N 阶) 型、向量集 (多目标) 型与多项式型提法的广义策略优化实例; ③ 证明了策略优化问题与网络中两点间路的优化实例的同构性; ④ 用极优代数方法求解了策略优化问题的诸实例.

在高等数学中, 求解连续型最优化问题的基本方法是导数概念与牛顿切线法的组合, 记作〖(导数)+(牛顿切线法)〗. 在组合最优化论中, 我们用基本变换公式把可行解 a 的改变度簇 $\mathbf{C}(a)$ 理解为导函数, 则求解诸多实例的迭代法是〖(基本变换公式)+(一般邻点法)〗. 这不仅是对前者的一种摹写, 而且当人们把生物两性交配而得到的种子 (胎儿) 作为生物繁衍后代的基本手段时, 它们都是对达尔文的生物进化过程〖(种子 (胎儿))+(世代传承)〗的摹写. 这样, 我们在连续型与离散型最优化两套理论之间尝试实现数学形式上的统一性方面做出了进一步的工作.

第一作者从 20 世纪 70 年代中期开始接触动态规划至今, 40 年来学术方向一直没有改变, 1994 年 70 岁退休, 以此把学术工作分为前、后两期. 原本有从 1993 年开始花五年时间写成组合最优化基础理论的计划, 出乎意料地工作至今才告一段落. 期间有三年时间因病接受治疗, 感谢武汉同济医院章咏裳、周四维、庄乾元三位教授精心反复的治疗. 在审读清样阶段, 又因肺癌放疗术后体力下降, 终于用 20 天时间完成了审读, 使得本书的撰写和出版在艰难曲折的过程中完成. 庆幸本书最终出版面世.

在构思、撰写本书的过程中, 第二作者邓旭东同本人讨论了大量的相关学术问题, 并且对书中实例进行了演算, 共同完成了本书的撰写和编审工作.

在本书即将脱稿之际, 眼前不时地浮现出一位位学者慈祥友善的容貌, 亲切的叮嘱、讨论和询问的情景. 四十年来, 许多同行学者们关注我们在学术上的摸索与进展, 在此深深地感谢他们.

我要特别感谢林诒勋教授, 自我们从 1978 年在烟台学术会议上结识起, 他一直是我工作的见证人. 他先后五六次评审我的 (包括本书) 专著和教材, 我们经常

书信来往, 在参加的多个学术会议上, 我们当面交谈, 他给了我很多的支持、指点和鼓励, 几乎在本书各章中都有他的见解, 本书所采用的基本术语 “基本变换公式” 也是遵从他的建议.

学术交流非常重要, 几乎每次参加会议, 我总是先准备好将要请教的问题, 这样得益会更多. 我深切感谢湖北省数学学会和运筹学会的同仁们, 还要感谢唐国春教授, 自 1990 年成立中国运筹学会排序专业委员会至今, 他每次为我安排学术交流等事项.

40 年来武汉科技大学的领导, 几任党委书记和校长尤泽贵、丁永昌、任德麟、孔建益教授, 管理学院两任院长潘开灵与邓旭东教授给予了我很多的帮助和支持, 在此表示衷心的感谢.

为了一件跨时几年甚至几十年才能完成的学术研究工作, 没有和睦的家庭是不可想象的. 一个学者能够得到家庭成员如此的理解和支持是幸福的, 我真诚地感谢妻子傅赛珍老师在生活上的关心和学术上对我的全面支持. 感谢长女明建、次女明复和女婿杨磊.

再次感谢所有关心本书出版的学者们, 也欢迎大家对本书提出指正意见和建议.

秦裕瑗

2016 年 11 月于武汉科技大学

上册摘要

本书以组合最优化问题的定义、一般最优化原理以及所建立的基本变换公式为基础，建立初等组合最优化论，分上、中、下三篇依次讨论基础理论、代数型与网络型优化问题.

上册 (上篇) 建立了组合最优化学科的公理系统和科学研究纲领——发现算法的方法，指出组合型与连续型最优化理论的并行关系，在此基础上，下册 (中、下两篇) 对多个经典问题的各自实例进行了探讨，整理出它们的常用求解算法，并探讨了它们之间的相互关系.

上篇为基础理论部分，共分为六章. 第 1 章是基本概念与初等方法. 首先界定本学科中的最基本概念、术语和约定，把涉及某个数学对象 XYZ 的组合最优化问题记作 Problem XYZ，或问题 XYZ，如果它指定了论域 S 和某个提法 ij，就说有一个实例，记作 Instance XYZ-ij：S，或实例 XYZ-ij：S，实例总涉及四个集合：论域、可行解 (集)、可行域和权值集. 问题和实例可以从不同的角度进行分类，如可以按照数学对象的代数特征分为集合型、向量型以及矩阵型等，也可以按照其图论和网络特征或按照管理、生产实际任务等进行分类 (第 1.6 节). 在第 1.5 节枚举了若干常见的提法，同一个问题中，又按照诸种常见的论域和提法组成多个实例，还直接从实例的定义出发，列出五种八个求解实例的初等方法，如枚举法、隐枚举法、同解法等 (第 1.7–1.8 节)，合称为第 0 类方法.

第 2 章是论域型与可行域型最优化原理. 对一般最优化原理建立其公理形式、应用于实例的论域，建立第 1 (论域型) 最优化原理及其解带的图示，依次公理地演绎出七种求解方法中的五种方法，它们是去劣法、扩展法、递推法、生成法、分治法，贪婪法在第 7.2 节讨论，破圈法在第 10.2 节讨论，它们统称为第 1 类求解方法. 把一般最优化原理应用于实例的可行域，建立了第 2 (可行域型) 最优化原理，得到三个分支定界法，称为第 2 类求解方法.

第 3 章是基本变换公式. 布尔巴基学派创意地指出"在学术上，更为重要的事是在两个可行解之间建立基本关系并发展其理论". 在问题 XYZ 的某个实例中，设 a, b 是可行解，且 $U \equiv a_b = a\backslash b$, 则有基本变换公式：$b = a\Delta\tau(U,W)$, 其中 $W = b_a = b\backslash a$, 符号 Δ 表示求集合间的对称差运算，变换规则是 $\tau(U,W) = U \cup W$. 集对 (U,W) 称为互易对，集对 $(\varnothing,\varnothing)$ 称为平凡的互易对，常用 I 表示.

设实例 XYZ：S 有可行解 a，考虑集对 (U,W), $U \subseteq a$, $W \subseteq S\backslash a$, 使得 $a\Delta\tau(U,W)$ 是可行解，U 叫做关于 a 的可行碎片，而 W 是关于 a 的自由碎片. 说 (U',W') 是

互易对 (U,W) 的一个 (真) 子互易对, 如果它的两项不同时为空集或者不同时等于 U 与 W, 而且能使 $a\Delta\tau(U',W')$ 是可行解.

如果非平凡互易对 (U,W) 没有真子互易对, 则说公式是关于 a 的一个简单互易对, 或者是 a 的一个改变度 ,b 是 a 的一个 (1 步) 邻点 (紧邻).

关于提法一般包含四件事: 论域的元素赋值范围, 确定碎片与可行解值的规则, 优化的规则 (一般有以大者为优, 或者以小者为优等), 以及答案组成的规则, 主要指求最优值, 以及求一个或者求所有的最优解与相关的信息等.

前三件事就是要指明所赋实数从属的数学系统, 而可行集、碎片都有 (主) 值与参数值, 例如, 碎片 $U \in \mathfrak{R}$ 有参数值 $f(U)$ 和主值 $g(U)$, 通常在讨论一般目标函数时, 还用 $h(a)$ 来讨论.

用点表示实例的可行解, 它按提法, 对应一个值 (权). 实例的可行域画在平面上, 是一个点集. 两个紧邻可行解 a 与 b 之间, 用边 ab $(\overline{ab})$ 相连, 用式子 (a_b, b_a) 作为边的 "值".

这样, 可行域在平面上和 3 维空间中建立了几何直观模型. 在每个可行集 a 可以建立邻域概念, 即让可行域引入一种拓扑结构, 类似于微分学中一元、二元函数在直角坐标系中的图形表示.

第 4 章是邻域型与碎片型最优化原理. 先建立第 3 (邻域型) 最优化原理, 得到求解实例的一般邻点法和多个迭代方法, 记作〖(基本变换公式)+(一般邻点法)〗. 简单讨论了巡回商问题, 再让公式中有一个可行解是最优解, 建立了人们远未开发的第 4 (碎片型) 最优化原理, 熟知的 Bellman 最优化原理只是其最为简单的一种特殊情形.

第 5 章是极优代数方法. 无论从基本变换公式、第 4 最优化原理或者从 Bellman 最优化原理, 都能直接得到一个强优选准域系统, 证明了四个具体的 $(\max/\min, +/\times)$ 强优选准域互为同构, 进而提出了求解属于一个问题的诸多实例间的同构方法, 显示了强优选准域是组合数学中自身产生出来的推理与计算工具, 而不是 "输入性" 的代数系统.

以强优选准域为基础, 建立了极优代数方法, 它是熟知的实代数以外的另一种值得注意的代数工具. 通过数字例建立木桶原理和恋人游模型的思路和方法, 讨论了包括全日制普通高等学校运筹学教学大纲中涉及的问题, 例如, 背包问题、资源分配问题、动态库存问题、火车时刻表问题等, 显示极优代数在组合最优化的可能应用.

第 6 章是组合最优化问题的研究纲领. 论述了基本变换公式在组合最优化论中起到核心作用, 犹如拉格朗日有限增量在微分学中所起的作用. 基本变换公式是对导数概念与拉格朗日中值定理的一种摹写, 函数 $h(x)$ 的导函数 $h'(x)$ 与可行解 a 的改变度簇 $\mathbf{C}(a)$ 相对应. 微分学中求解连续型函数最优解的基本方法记作〖(导

数)+(牛顿切线法)〗, 它与求解离散型最优化实例的方法〖(基本变换公式)+(一般邻点法)〗并行不悖. 不仅这后者是对前者的模拟, 甚至说, 它们都是对大自然中生物进化过程〖(两性交配的种子)+(世代繁衍)〗的摹写.

本章建立了布尔巴基型的数学结构系统, 论述了它们不仅是组合最优化论的基础理论系统, 也是为组合数学所用的基础理论系统, 还建立了拉卡托斯型的研究组合最优化问题实例的纲领, 发现精确方法的方法, 并表示成框图.

建立基本变换公式的思路和表达形式是如此的简单明白, 使得在组合最优化中干净利落地建立了拓扑结构和代数结构, 这是出人意料的.

以上六章组成初等组合最优化论的基础理论.

目　　录

(上　册)

(下 册)

中篇 代数对象型的优化问题

下篇 网络对象型的优化问题

上篇 基本理论

本书以组合最优化问题的定义、一般最优化原理和基本变换公式为基础, 分上、中、下三篇展开讨论. 上篇构成上册, 下册包括中、下两篇.

上篇共 6 章, 组成组合最优化论的基本理论部分.

第 1 章　基本概念与初等方法.

第 2 章　论域型与可行域型最优化原理.

第 3 章　基本变换公式.

第 4 章　邻域型与碎片型最优化原理.

第 5 章　极优代数方法.

第 6 章　组合最优化问题的研究纲领.