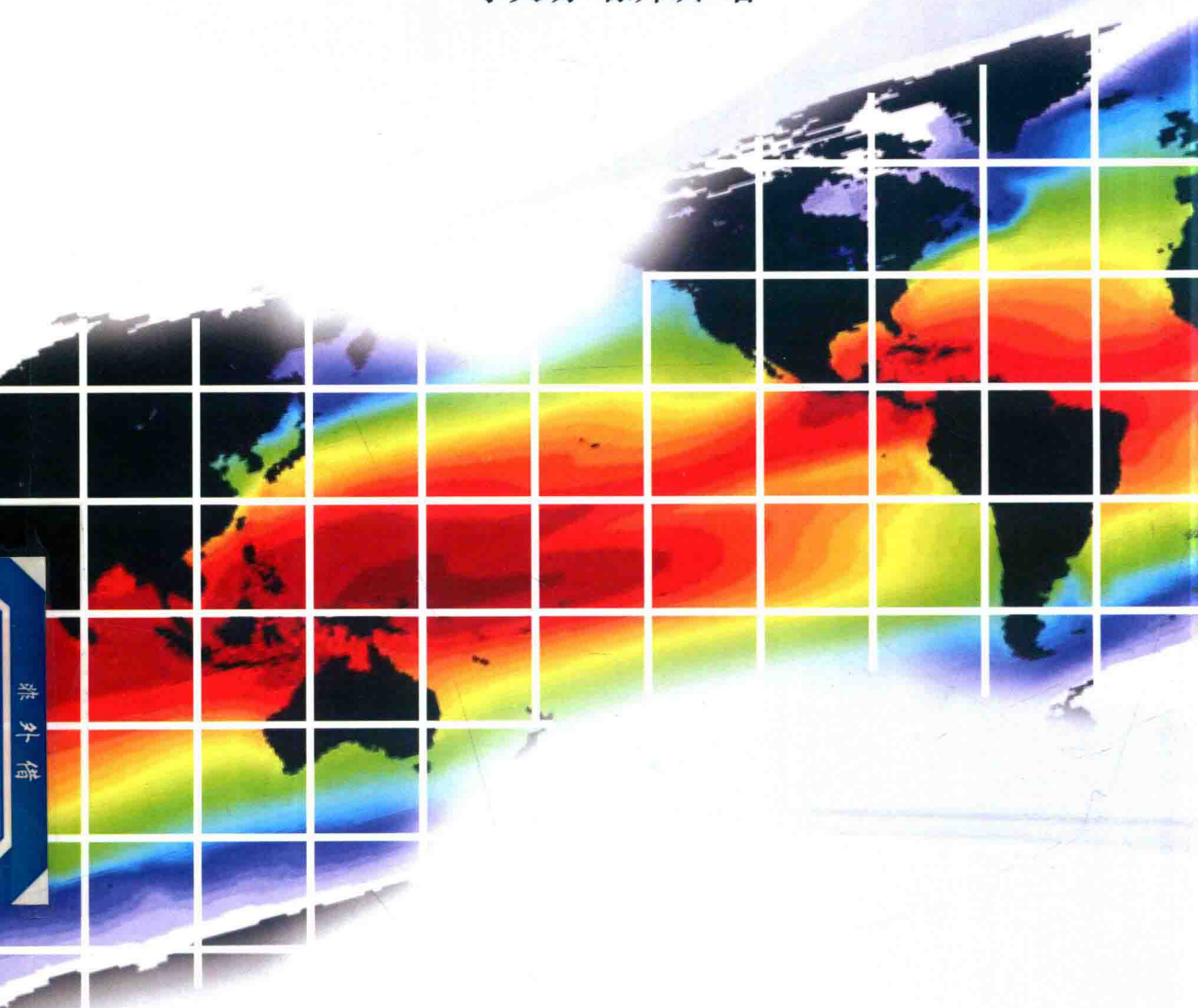


热带气候动力学引论

李天明 徐邦琪 著



张外借

 科学出版社

热带气候动力学引论

李天明 徐邦琪 著

科学出版社

内 容 简 介

本书主要关注热带气候动力学的基本理论和机制。首先,介绍热带大气和海洋的简单动力模型;然后,讨论海气相互作用对热带气候态形成的影响,介绍季节内振荡的观测结构、演化特征和传播生成机制等;最后,向读者展示热带气旋的生成机理,介绍 ENSO 和季风的动力学原理及海气相互作用。本书图文并茂,附有习题,不仅能加深大气科学相关专业的学生对关于气候动力学基本知识的认知,更能使学生掌握大气科学、海洋科学领域中的科学研究方法(访问科学书店 www.ecsponline.com,检索图书名称,在图书详情页“资源下载”栏目中可获取本书附带学习资料)。

本书可作为大气科学、海洋科学等相关专业高年级本科生及研究生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

热带气候动力学引论/李天明,徐邦琪著. —北京:科学出版社,2017.11

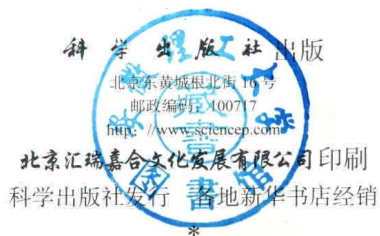
ISBN 978-7-03-055018-7

I. ①热… II. ①李…②徐… III. ①热带气候—研究 IV. ①P462

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 264069 号

责任编辑:王腾飞 曾佳佳 高慧元/责任校对:樊雅琼

责任印制:张克忠/封面设计:许 瑞



2017年11月第一版 开本:720×1000 1/16

2017年11月第一次印刷 印张:13

字数:262 000

定价:99.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

本书部分内容曾作为夏威夷大学、台湾大学、南京信息工程大学研究生的上课讲义。

本书主要包括：①热带大气和海洋的基本动力学；②简单和中等复杂的大气及海洋模型；③观测中热带大气和海洋的主要模态；④这些模态的理论和机制。

本书特别关注以下几个热带模态的海气相互作用和物理过程。①热带的气候平均态。例如，热带辐合带（Intertropical convergence zone, ITCZ）关于赤道的不对称性，以及赤道海温和风场的年循环。②西北太平洋热带气旋的生成和天气尺度变率。③大气季节内振荡，包括赤道热带季节内振荡（Madden-Julian Oscillation, MJO）和北半球夏季季节内振荡（Boreal Summer Intra-seasonal Oscillation, BSISO）的移动和触发。④ENSO（El Niño Southern Oscillation）和印度洋偶极子的机理。⑤季风变率。

本书着重介绍并讨论了许多理论和观点来增进学生对观测现象的理解。作者李天明教授在夏威夷大学休年假时，到台湾大学大气科学系讲授此课，由于有众多来自其他大学的学生听课，课堂不得不移到演讲厅。有位从事中尺度气象研究的博士生对李天明教授说：“假如早些知道热带气候动力学如此有趣，我会选择气候动力作为我博士论文的主题。”李天明教授在南京信息工程大学授课时，约有150位研究生和年轻教师听课，为了能坐在前排座位，许多学生提前半小时便来到教室等待。

作者希望本书不仅能加深大气科学相关专业学生对气候动力学基本知识的认知，更重要的是能帮助学生掌握大气科学、海洋科学领域中的科学研究方法。

由于作者水平有限，书中难免会有疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

致 谢

本书作者深切感谢 Bin Wang 教授分享他的赤道波动动力学讲义，也要感谢 George Philander、Bin Wang、C. P. Chang 教授长期以来的合作与支持。本书得到了以下项目和课题的资助：国家重点基础研究发展计划（973 计划）“热带和中高纬季节内振荡的动力机理及延伸期预报方法研究（2015CB453200）”、国家自然科学基金重点项目“影响 ENSO 强度和不对称演变的机理研究（41630423）”、国家自然科学基金面上项目“DYNAMO 国际观测计划期间 MJO 对流触发的动力机理分析及多模式比较（41475084）”、美国国家自然科学基金（AGS-1565653）、江苏省基础研究计划重点项目“江淮流域灾害性天气的延伸期预报方法研究（BK20150062）”、江苏高校品牌专业建设工程资助项目（TAPP）、江苏省双创团队 R2014SCT001 和江苏省高等教育优势学科（PDPA）。

本书的 SOEST 贡献号为 10050，IPRC 贡献号为 1261，ESMC 贡献号为 164。本书英文版 *Fundamental of Tropical Climate Dynamics* 将在 Springer 出版。

目 录

前言

致谢

第 1 章 热带大气和海洋的简单动力模型	1
1.1 赤道 β 平面近似下自由波动的解	1
1.1.1 赤道开尔文波	2
1.1.2 广义的频散关系	3
1.1.3 水平结构	4
1.1.4 频散关系图	5
1.1.5 低频赤道罗斯贝波	6
1.1.6 高频惯性-重力波	8
1.1.7 混合罗斯贝-重力波	9
1.2 层结大气中的垂直模态分解	11
1.3 Gill 模型	13
1.4 Lindzen-Nigam 模式	17
1.5 Cane-Zebiak 简单海气耦合模式	21
1.6 2.5 层热带大气模式	24
1.7 2.5 层热带海洋模式	29
1.7.1 混合层方程	31
1.7.2 温跃层深度和切变流的确定	32
问题	33
参考文献	34
第 2 章 海气相互作用对热带气候态形成的影响	35
2.1 热带辐合带的非对称性	35
2.2 相关理论	37
2.3 陆地分布和非对称及海岸线形状不对称的影响	41
2.4 赤道上的年循环	44
问题	49
参考文献	49

第3章 季节内振荡	50
3.1 引言	50
3.2 观测结构和演化特征	51
3.3 东传机制	53
3.4 生成机制	60
3.4.1 20年合成分析揭示的MJO生成过程	60
3.4.2 DYNAMO个例研究揭示的MJO生成过程	68
3.4.3 从海气相互作用的角度了解MJO生成	72
3.5 北半球夏季季节内振荡	74
3.6 与高频扰动的相互作用	80
问题	87
参考文献	87
第4章 热带气旋生成	92
4.1 引言	92
4.2 前兆天气尺度信号	93
4.2.1 前一台风能量频散导致的新气旋的生成	93
4.2.2 天气尺度波列引起的热带气旋生成	95
4.2.3 东风波引起的热带气旋生成	95
4.2.4 对流层中上层的先兆信号	96
4.3 西北太平洋上天气尺度波列的起源以及东风波的产生机理	99
4.4 热带气旋生成的数值模拟	102
4.4.1 TCED诱发热带气旋生成	102
4.4.2 中层和低层涡旋对气旋生成的触发效率的比较	105
4.5 MJO和ENSO对热带气旋的影响	110
4.6 全球变暖下台风未来的变化预测	116
4.7 结论	119
问题	120
参考文献	120
第5章 ENSO动力学	125
5.1 观测中的ENSO结构和演变规律	125
5.2 不稳定性机制	129
5.3 振荡理论	131
5.4 年循环周期调制下的位相锁定特征	133
5.5 El Niño与La Niña事件振幅不对称性	135

5.6	El Niño 与 La Niña 事件生命史不对称性	138
5.7	年代际背景场对 El Niño 特性的调控作用	146
5.8	印度洋偶极子	153
	问题	156
	参考文献	157
第 6 章	季风动力学及海气相互作用	159
6.1	引言	159
6.2	TBO 理论	163
6.3	季风准两年及低频变率	171
6.4	太平洋-东亚遥相关型	176
6.5	印度洋和西北太平洋海平面温度异常对西北太平洋环流的影响	180
6.5.1	印度洋海平面温度异常强迫的季节依赖性	180
6.5.2	印度洋和太平洋海平面温度强迫的相对作用	183
6.6	平均气流对 El Niño 响应的调控	186
6.7	不同子季风系统间的联系	187
	问题	192
	参考文献	193

第1章 热带大气和海洋的简单动力模型

1.1 赤道 β 平面近似下自由波动的解

本节将讨论在赤道 β 平面假设下, 线性化浅水模型中自由波动的解 (Matsuno, 1966)。线性化浅水模型的控制方程组可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.1c)$$

其中, C_0 表示重力波速。该线性化的浅水模型方程组适用于描述在基本流为静止的情况下, 具有不同垂直结构模态的解, C_0 的数值不同对应不同的垂直结构 (详见 1.2 节), $C_0 = 50\text{m/s}$ 对应大气中的第一个斜压模态, $C_0 = 2.5\text{m/s}$ 对应海洋中的第一个斜压模态。

式 (1.1) 中共有两个参数—— β 和 C_0 , 用来构建两种内部尺度参数: 一个长度尺度参数 $L = \sqrt{C_0 / \beta}$ (赤道罗斯贝波变形半径), 以及一个时间尺度参数 $\tau = 1 / \sqrt{\beta C_0}$ 。设 C_0 为速度尺度参数, 则 C_0^2 为 ϕ 的尺度参数。利用以上特征尺度参数, 式 (1.1) 可以改写为以下无量纲化的方程组:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - y' v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + y' u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y'} \quad (1.2b)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (1.2c)$$

式 (1.2) 中的一撇表示无量纲化的变量。当侧边界条件为 y 趋近于无穷大时, 解有界 (即 u' 、 v' 、 ϕ' 为有限数值)。

1.1.1 赤道开尔文波

首先, 讨论式 (1.2) 对应的一个特殊解, 即当经向速度永远为 0 时 (即 $v' \equiv 0$) 方程的解。此时, 式 (1.2) 可化为

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \quad (1.3a)$$

$$y'u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y'} \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \quad (1.3c)$$

式 (1.3b) 表示纬向风和经向气压梯度在赤道及赤道附近始终满足地转平衡。式 (1.3a) 和式 (1.3c) 共同得到一个波动方程:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = 0$$

以上波动方程对应的一个通解形式为

$$u' = F(x' \mp t')Y(y')$$

其中, F 是一个任意函数。将该波解代入式 (1.3a) 可得

$$\phi' = \pm u'$$

将以上解代入式 (1.3b) 可得

$$y'Y(y') \pm \frac{dY}{dy'} = 0$$

以上方程对应的解为

$$Y(y') = Y(0)e^{\mp y'^2/2}$$

注意以上解中只有“-”对应的情况满足有限侧边界条件, 因此式 (1.3) 对应的唯一有物理意义的解的无量纲化表达式为

$$u' = \phi' = F(x' - t')e^{-y'^2/2}$$

而有量纲的表达式为

$$u = \phi / C_0 = F(x - C_0 t)e^{-\beta y^2/(2C_0)}, \quad v \equiv 0 \quad (1.4)$$

式 (1.4) 代表的波解称为赤道开尔文波, 控制方程式 (1.3) 与沿岸开尔文波的控制方程形式完全一样, 只是这里的科里奥利力用 βy 表示。赤道开尔文波有以下特征。

(1) 赤道开尔文波向东移动, 其位相速度为重力波速 C_0 。

(2) 开尔文波振幅最大集中在赤道上, 并以 e -折尺度 $\sqrt{2C_0/\beta}$ 向两极递减。

对于大气中的第一个斜压模态, $C_0 \approx 50 \text{ m/s}$, $\sqrt{2C_0/\beta} \approx 2000 \text{ km}$, 而对于海洋

中的第一个斜压模态, $C_0 \approx 2.5 \text{ m/s}$, $\sqrt{2C_0 / \beta} \approx 460 \text{ km}$ 。越高阶的斜压模态对应的开尔文波振幅向赤道集中的程度越显著。

(3) $v=0$, 而 u 与 ϕ 精确地满足地转平衡。在北(南)半球, 面朝移动的方向, 高压在右(左)。

(4) 开尔文波是非频散波, 因为 F 代表任意的波包, 在传播时波形保持不变。这意味着群速度与相速度相等, 即能量传播速度也是 C_0 。

(5) 物理上, 科里奥利参数在赤道两侧变号, 使开尔文波气压场(或位势高度场)在赤道两侧堆集。赤道可看成一无形的边界。这揭示了赤道具有类似波导的作用。

图 1.1 给出赤道开尔文波对应的纬向速度和气压的水平结构特征。

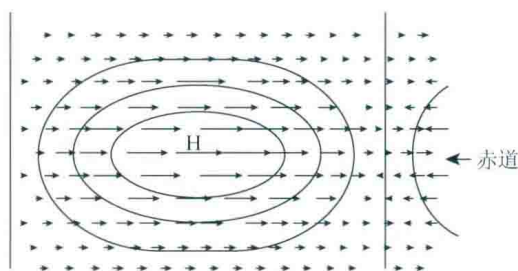


图 1.1 特征解对应的气压和速度分布 (Matsuno, 1966)

1.1.2 广义的频散关系

以下讨论当经向速度不为 0 时方程对应的解的形式。由于式 (1.2a) ~ 式 (1.2c) 的系数依赖于 y , 可以将波解中对应 x 方向和 y 方向的部分进行分离。因此, 波解可设为如下形式:

$$(u', v', \phi') = \text{Re}(U(y), V(y), \Phi(y))e^{i(kx - \omega t)}$$

侧边界条件为当 $y \rightarrow \pm\infty$ 时, $U(y)$ 、 $V(y)$ 、 $\Phi(y)$ 有界。

将以上波解形式代入式 (1.2) 可得

$$-i\omega U - yV = -ik\Phi \quad (1.5a)$$

$$-i\omega V + yU = -d\Phi / dy \quad (1.5b)$$

$$-i\omega\Phi + ikU + dV / dy = 0 \quad (1.5c)$$

将 U 和 Φ 消掉, 得到一个关于 V 的方程。根据式 (1.5a) 和式 (1.5c) 求解 U 和 Φ 可得到

$$U = \frac{1}{k^2 - \omega^2} \left(ik \frac{dV}{dy} - i\omega y V \right) \quad (1.6a)$$

$$\Phi = \frac{1}{k^2 - \omega^2} \left(i\omega \frac{dV}{dy} - ikyV \right) \quad (1.6b)$$

将式 (1.6a) 和式 (1.6b) 代入式 (1.5b) 可得

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \left[(\omega^2 - k^2) - \frac{k}{\omega} - y^2 \right] V = 0 \quad (1.7)$$

注意在推导式 (1.6a) 和式 (1.6b) 的过程中, 假设 $k^2 \neq \omega^2$ 。

式 (1.7) 与简谐振动的薛定谔 (Schrodinger) 方程相同, 只有当 $\omega^2 - k^2 - k/\omega$ 等于一个正的奇数时, 才满足侧边界条件。即

$$\omega^2 - k^2 - k/\omega = 2m+1, \quad m=0,1,2,\dots \quad (1.8)$$

式 (1.7) 的解为

$$V(y) = V_m(y) = e^{-y^2/2} H_m(y), \quad m=0,1,2,\dots \quad (1.9)$$

其中, $H_m(y) \equiv \sum_{l=0}^{m/2} \frac{(-1)^l m!}{l!(m-2l)!} (2y)^{m-2l}$ 是 m 阶的 Hermite 多项式:

$$\frac{d^2H}{dy^2} - 2y \frac{dH}{dy} + 2mH = 0$$

$H_m(y)$ 多项式的前 6 阶分别为

$$H_0(y) = 1, \quad H_1(y) = 2y$$

$$H_2(y) = 4y^2 - 2, \quad H_3(y) = 8y^3 - 12y$$

$$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12, \quad H_5(y) = 32y^5 - 160y^3 + 20y$$

$H_m(y)$ 有如下特性:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(y) H_n(y) e^{-y^2} dy = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^m m! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases} \quad (1.10)$$

设 $V_m(y) \equiv e^{-y^2/2} H_m(y) / \sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}$, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_m(y) V_n(y) dy = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (1.11)$$

需要指出的是, 当 m 为偶数 (奇数) 时, $V_m(y)$ 关于赤道对称 (反对称)。在区域 $(-\infty, \infty)$ 内有 m 个波节。其中, $y = \sqrt{2m+1}$ 是经圈上的拐点。 $V_m(y)$ 在 $|y| < \sqrt{2m+1}$ 的范围内振荡, 而当 $|y| > \sqrt{2m+1}$ 时单调递减。因此, 阶数越低的模态振幅越集中在赤道上。

1.1.3 水平结构

经向速度 $V(y)$ 的第 m 阶特征解 $V_m(y)$ 在式 (1.9) 中有描述。 $U(y)$ 和 $\Phi(y)$ 可

以利用以下 Hermite 多项式的迭代关系, 通过式 (1.6a) 和式 (1.6b) 得到

$$\frac{dH_m(y)}{dy} = 2mH_{m-1}(y)$$

$$H_{m+1}(y) = 2yH_m(y) - 2mH_{m-1}(y)$$

当 $m \geq 1$ 时, u' 、 ϕ' 和 v' 场可以写为

$$v'_m = \text{Re} V_m(y) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$u'_m = \text{Re} \frac{i}{2} \left(\frac{V_{m+1}}{\omega - k} + \frac{2m}{\omega + k} V_{m-1} \right) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\phi'_m = \text{Re} \frac{i}{2} \left(\frac{V_{m+1}}{\omega - k} - \frac{2m}{\omega + k} V_{m-1} \right) e^{i(kx - \omega t)}$$

1.1.4 频散关系图

式 (1.8) 是无量纲化的频散方程, 描述了无量纲化的波数和频率的关系。为了不失普遍性, 指定 ω 总是为正, 而 k 可以为正 (对应东移) 也可以为负 (对应西移)。图 1.2 给出频率 ω 和 k 的关系图。

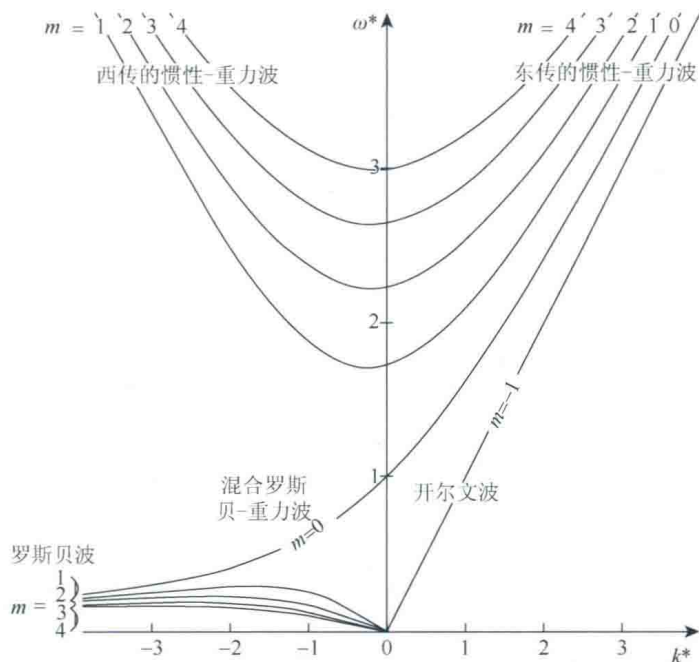


图 1.2 赤道波动 (最高为 $m = 4$ 阶) 对应的频散曲线图 (Kiladis et al., 2009)

y 轴对应无量纲化的频率 ω ; x 轴对应无量纲化的纬向波数 k

频散方程式 (1.8) 指出赤道附近存在三种不同的自由波动。

首先讨论当 $m \geq 1$ 时的情形。频散方程可写为

$$k_m = -\frac{1}{2\omega} \pm \sqrt{\omega^2 + 1/4\omega^2 - (2m+1)}, \quad m=1,2,3,\dots$$

对于自由波动, 纬向波数必须是一个实数 (纬向波数为虚数意味着波动的振幅随 x 轴呈 e 指数衰减或增长)。为了使 k 为实数, 必须满足

$$\omega^2 + \frac{1}{4\omega^2} - (2m+1) \geq 0$$

因此有

$$\omega \geq \sqrt{\frac{m+1}{2}} + \sqrt{\frac{m}{2}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m=1,2,\dots \quad (1.12a)$$

或

$$\omega \leq \sqrt{\frac{m+1}{2}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m=1,2,\dots \quad (1.12b)$$

式 (1.12a) 和式 (1.12b) 对应两组不同的波动: 一组为高频波动 ($\omega \geq 1 + 1/\sqrt{2}$); 另一组为低频波动 ($\omega \leq 1 - 1/\sqrt{2}$)。

频散方程式 (1.8) 两边同时对 k 求微分, 可以得到纬向群速度的表达式为

$$C_{gx} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{2k\omega + 1}{2\omega^2 + k/\omega}$$

当 $2k\omega = -1$ 时, 有

$$C_{gx} = 0 \quad (1.13)$$

如果在图 1.2 中画出 $2k\omega = -1$ 的曲线, 它与频散曲线的交叉点位于频率的极值处, 其中

$$\omega_{\text{extrema}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m+1}{2}} + \sqrt{\frac{m}{2}}, & \text{高频模态} \\ \sqrt{\frac{m+1}{2}} - \sqrt{\frac{m}{2}}, & \text{低频模态} \end{cases}$$

交叉点代表高频波和低频波的纬向群速度为 0。

1.1.5 低频赤道罗斯贝波

对于低频的波动, 无量纲化的频率小于 $1 - 1/\sqrt{2} \approx 0.29$, 对应有量纲的频率为 $\omega_* \leq 0.29\sqrt{\beta C_0}$ 。对于大气中的第一个斜压模态, $C_0 = 50 \text{ m/s}$, 对应频率 $\omega_* \leq 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 或周期 $T_* \geq 7.3 \text{ d}$; 对于海洋中的第一个斜压模态, $C_0 = 2.5 \text{ m/s}$, 对应频率 $\omega_* \leq 2.15 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 或周期 $T_* \geq 34 \text{ d}$ 。

对于低频的波动, ω 非常小, 因此 $\omega^2 \ll 1/\omega^2$ 。频散方程可以近似表示为

$$k_{m\pm} = -\frac{1}{2\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{4\omega^2} - (2m+1)} < 0 \quad (1.14)$$

或

$$\omega = -\frac{k_m}{k_m^2 + (2m+1)} \quad (1.15)$$

频散方程式 (1.15) 说明经向模态指数 m 越高, 则波动频率 ω 越低。

有量纲形式的相速度可写为

$$\frac{\omega_*}{k_*} = -\frac{\beta}{k_*^2 + \frac{\beta}{C_0}(2m+1)} \quad (1.16)$$

式 (1.16) 与 β 平面管道中的罗斯贝波频散关系式基本一致, 除了 y 方向的波数表达式略有不同, 这是由于这里的侧边界趋近于无穷 ($y = \pm\infty$)。因此这些低频波动的解称为赤道罗斯贝波, 它是由 f 随纬度变化而产生的。

波数为 k_{m+} 的长罗斯贝波 (即式 (1.14) 中取 “+” 号) 对应的群速度向西 (图 1.2 中频散曲线的斜率为负), 而波数为 k_{m-} 的短罗斯贝波 (即式 (1.14) 中取 “-” 号) 对应的群速度向东 (图 1.2 中频散曲线的斜率为正)。

对于长罗斯贝波, 当 $k \rightarrow 0$ 时, 可得

$$\frac{\omega}{k} \approx -\frac{1}{2m+1}, \quad m=1, 2, \dots \quad (1.17)$$

式 (1.17) 说明长罗斯贝波近似无频散。对应的有量纲的向西的相速度是重力波速 C_0 的 $(2m+1)^{-1}$ 倍。因此, 长罗斯贝波的相速度最多是开尔文波速度的 1/3。假设赤道太平洋的第一个斜压模态对应 $C_0 = 2.5$ m/s, 则 $m=1$ 的罗斯贝波速度近似为 0.8 m/s, 这意味着罗斯贝波自东向西穿越太平洋需要 6 个月的时间。

图 1.3 描述了赤道罗斯贝波在 $m=1$ 和 $m=2$ 时分别对应的位势和速度分布。对于罗斯贝波, 压力和风场满足地转关系。对于 $m=1$ 的解, u 和 ϕ 关于赤道对称, 而 v 关于赤道反对称。对于 $m=2$ 的解, u 和 ϕ 关于赤道反对称, 而 v 关于赤道对称。

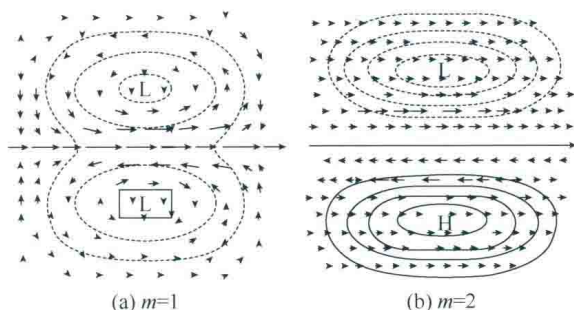


图 1.3 赤道罗斯贝波 (Matsuno, 1966)

1.1.6 高频惯性-重力波

对于高频波动，无量纲化的频率大于 $1+1/\sqrt{2} \approx 1.71$ ，或者有量纲的频率 $\omega_* > 1.71\sqrt{\beta C_0}$ 。假设大气的第一个斜压模态对应 $C_0 = 50\text{m/s}$ ，则 $\omega_* \geq 5.77 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$ ，或者周期 $T_* \leq 1.26\text{d}$ 。假设海洋的第一个斜压模态对应 $C_0 = 2.5\text{m/s}$ ，则 $\omega_* \geq 1.29 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$ ，或者周期 $T_* \leq 5.63\text{d}$ 。经向模态指数 m 越大，则波动对应的周期越短。

对于高频的波动，有 $1/2\omega \ll 1$ 和 $\omega^2 \gg 1/\omega^2$ ，则频散关系可以近似表示为

$$k_m = \pm \sqrt{\omega^2 - (2m+1)}$$

或

$$\omega^2 = k_m^2 + (2m+1) \quad (1.18)$$

将式 (1.18) 转化为有量纲的形式：

$$\frac{\omega_*}{k_*} = \sqrt{C_0^2 + \frac{\beta C_0 (2m+1)}{k_{*m}^2}}$$

这类似于 f 平面的惯性-重力波速的形式：

$$\frac{\omega_*}{k_*} = \sqrt{C_0^2 + \frac{f^2}{k_*^2 + l_*^2}}$$

其中， C_0 为重力波速。根据相关文献 (Matsuno, 1966)，高频的模态称为赤道惯性-重力波。

注意 ω 的极小值为 $\omega = \sqrt{\frac{m+1}{2}} + \sqrt{\frac{m}{2}}$ 。

若重力波的波数为

$$k_{m+} = -\frac{1}{2\omega} + \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4\omega^2} - (2m+1)}$$

则纬向群速度 C_{gx} 向东 (即图 1.2 的频散曲线斜率为正)，若重力波的波数为

$$k_{m-} = -\frac{1}{2\omega} - \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4\omega^2} - (2m+1)}$$

则纬向群速度 C_{gx} 向西 (即图 1.2 的频散曲线斜率为负)。

图 1.4 给出东传和西传的惯性-重力波对应 $m=1$ 和 $m=2$ 的解。它们是非地转的，并且表现出惯性重力波的特征。 $m=1$ 的解更加集中在赤道上， ϕ 和 u 关于赤道对称但是 v 关于赤道反对称。而 $m=2$ 的解， ϕ 和 u 关于赤道反对称但是 v 关于赤道对称。

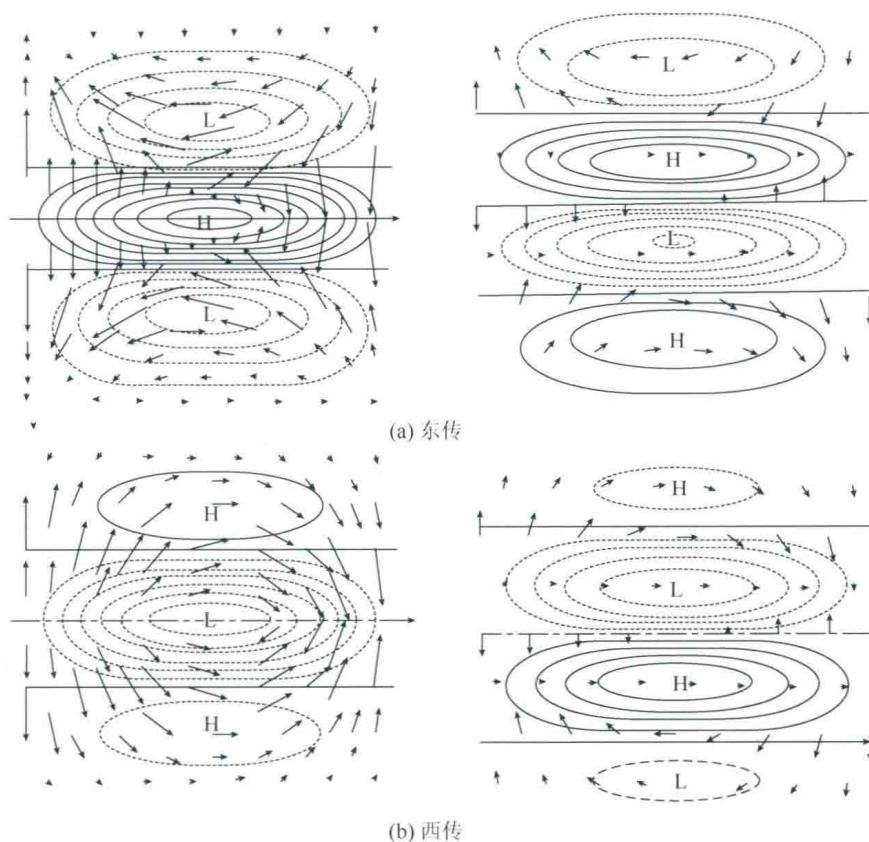


图 1.4 $m=1$ 和 $m=2$ 的惯性-重力波的气压和速度分布 (Matsuno, 1966)

1.1.7 混合罗斯贝-重力波

当 $m=0$ 时，方程的解是一个特殊解，与 $m \geq 1$ 时方程的解十分不同，此时频散关系式变为 $\omega^2 - k^2 - k/\omega = 1$ ，因此同一个 k 对应两个根：

$$k = \omega - \frac{1}{\omega} \quad (1.19)$$

和

$$k = -\omega$$