离散数学及其应用

刘 芳 著

科 学 出 版 社

离散数学及其应用

刘 芳 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

离散数学是研究各种离散量的结构及关系的一门学科，是计算机科学中基础理论的核心课程. 本书针对培养计算机应用型人才的教学要求，着重选取能够突出基本知识、基本理论、基本方法及其基本应用方面的内容，并配合大量生动的实例. 本书主要包括数理逻辑、集合论、代数系统和图论四部分的内容. 各部分的内容相对独立又相互联系，书中的证明力求严格完整，例题、习题具有一定的典型性. 全书内容深入浅出，便于自学，各章配有习题和拓展练习便于读者总结和提高.

本书可以作为普通高等学校计算机及相关专业离散数学课程教材，也可以供科技人员阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及其应用/刘芳著. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055788-9

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①离散数学-教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 298686 号

责任编辑：张 展 米小刚 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：罗 科 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

成都锦瑞印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2018 年 1 月第一次印刷 印张：13 1/2
字数：320 000

定价：45.00 元

前　　言

离散数学被 IEEE&ACM (Institute of Electrical and Electronics Engineers & Association for Computing Machinery) 确定为计算机专业核心课程之一，也是《中国计算机科学与技术学科教程 2002》中界定的计算机科学与技术专业的核心基础课程之一.

1. 什么是离散数学

离散数学 (Discrete Mathematics) 是研究各种各样离散量的结构及离散量之间的关系的一门学科，是计算机科学中基础理论的核心课程，也是现代数学的一个重要分支，是计算机科学、信息科学和数字化科学等的数学基础.

随着信息时代的到来，工业革命时代以微积分为代表的连续数学占主流的地位已经发生了变化，离散数学的重要性逐渐被人们认识. 离散数学课程所传授的思想和方法，广泛地体现在计算机科学技术及相关专业的诸领域，从科学计算到信息处理，从理论计算机科学到计算机应用技术，从计算机软件到计算机硬件，从人工智能到认知系统，无不与离散数学密切相关.

由于数字电子计算机是一个离散结构，它只能处理离散的或离散化了的数量关系，因此，无论计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何对离散结构建立相应的数学模型；又如何将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理. 可以这么说离散数学作为一门学科，是计算机推动的结果，反过来又促进计算机科学的发展.

离散数学在各学科领域，特别在计算机科学与技术领域有着广泛的应用. 也是计算机相关专业课程，如数字电路、程序设计语言、数据结构、操作系统、编译技术、人工智能、数据库、算法设计与分析、理论计算机科学基础等必不可少的先行课程. 通过离散数学的学习，不但可以掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和严格的逻辑推理能力，为将来参与创新性的研究和开发工作打下坚实的基础.

离散数学课程主要介绍离散数学的各个分支的基本概念、基本理论和基本方法. 这些基本概念、基本理论以及基本方法大量地应用在数字电路、编译理论、数据结构、操作系统、数据库系统、算法的分析与设计、人工智能、计算机网络等专业课程中. 同时，该课程所提供的训练十分有益于学生概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，十分有益于学生严谨、完整、规范的科学态度的培养.

2. 编写目的

本书的编写目的是向读者展示离散数学的理论性和实用性，为计算机专业学生提供必要的数学基础，介绍离散数学在计算机学科发展中的作用与关系，明确离散数学是掌握与研究计算机学科的基础理论与工具. 本书是编者根据多年讲授离散数学的经验和兴趣，同时征求开设离散数学的部分院校教师的意见和建议，并参考国内外相关教材，结合自身

教学科研实践编写而成的. 本书力求做到体系完整、通俗易懂、简明扼要. 本书围绕着离散数学的特点、理论及应用进行展开, 目的是培养学生对离散数学的掌握, 培养数学的逻辑抽象和思维能力, 以进一步培养学生分析问题和解决问题的能力.

离散数学作为计算机科学与技术及相关专业的理论基础和核心主干课, 为后续课程(如数据结构、操作系统、编译理论、数字逻辑理论、密码学基础、逻辑程序设计、人工智能等)的学习提供了必需的理论支持. 更重要的是通过离散数学知识的学习, 掌握证明问题的方法, 培养抽象思维的能力、缜密概括的能力和严密逻辑推理的能力, 加强数学推理,离散结构、算法构思与设计, 构建模型等方面专门与反复的研究、训练及应用, 培养提高学生的数学思维能力和对实际问题的求解能力.

3. 本书的结构

本书分为数理逻辑、集合论、代数系统和图论四个部分, 共 10 章.

第一部分：数理逻辑, 包括两章(第 1 章命题逻辑、第 2 章谓词逻辑).

第二部分：集合论, 包括三章(第 3 章集合论基础、第 4 章关系、第 5 章函数与集合的势).

第三部分：代数系统, 包括两章(第 6 章代数系统的基本概念、第 7 章几个典型的代数系统).

第四部分：图论, 包括三章(第 8 章图论基础、第 9 章树和第 10 章几种特殊的图).

每部分的开始都有一段“开场白”, 对本部分历史渊源、研究内容、与计算机科学的联系等加以阐述, 有助于培养学生的计算机科学素养和计算机思维, 同时也有助于学生把握本部分内容的应用领域.

每章都把相关的知识背景、发展历史的简介作为导入, 在介绍离散数学基本知识的基础上, 注重理论联系实际, 融入启发式教学理念, 突出知识的逻辑结构, 注重学生数学思维的培养. 在每章章末配有习题和一定数量的拓展练习(包括上机实验、拓展阅读和思考等), 使学生在加强理论知识学习的同时, 提高解决实际问题的能力.

4. 本书的价值

本书主要面向计算机及其相关专业, 教师可以根据自己的教学计划对相关内容进行取舍, 完成全部内容的教学需要一个学期, 48～80 学时. 本书可以作为普通高等学校计算机及相关专业离散数学课程教材, 也可以作为研究生入学考试及计算机研究与开发的工程技术人员的参考书.

在写作本书的过程中, 李均利教授给予了宝贵意见；周香君、李画、潘俊池和陈悦同学为书中习题集的准备做了部分整理工作；另外, 本书的出版得到了科学出版社的大力支持,在此一并表示衷心的感谢.

由于作者的水平有限, 书中如有不妥之处在所难免, 敬请读者不吝指正.

刘　芳

2017 年 10 月于四川师范大学

目　　录

第一部分　数理逻辑

第二部分 集 合 论

第三部分　代 数 系 统

第四部分 图 论

第一部分 数理逻辑

逻辑学是研究人的思维(推理)形式的学科，其中核心内容是推理的有效性. 根据所研究的对象和方法的不同，可将逻辑学分为形式逻辑和数理逻辑.

形式逻辑是用自然语言研究人的思维(推理)形式，又称语言逻辑，由古希腊思想家、哲学家亚里士多德在2300多年前创立，至今仍在不断发展和完善中.

数理逻辑是以推理为研究对象，用数学方法研究推理中前提和结论之间的形式关系的科学. 它是由17世纪德国哲学家和数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646～1716)创立的. 由于数学具有符号化、一义性两大特征，所以人们常常把数理逻辑称为符号逻辑. 计算机是数理逻辑和电子学相结合的产物，数理逻辑是计算机科学的基础. 可以说计算机的理论基础就是建立在数理逻辑上的，所有的计算机问题，或者计算机代码，都有一个等价的逻辑表达式. 数理逻辑就是计算机理论的基石.

数理逻辑是基于一般逻辑事实建立起来的学科，从数学的角度来看，数理逻辑就是方法论，也可以看成把现实生活中事件逻辑标准化、形式化的方法. 可以说计算机的理论基础就是建立在数理逻辑上的. 在计算机科学的许多领域，如逻辑设计、人工智能、语言理论、程序正确性证明等方面都有重要的应用.

本部分介绍计算机科学所必需的数理逻辑基础知识——命题逻辑和谓词逻辑，包括：

(1)第 1 章命题逻辑. 包括命题的基本概念、命题的符号化、命题公式、命题公式等值演算、公式的范式命题逻辑推理理论等.

(2)第 2 章谓词逻辑. 包括谓词逻辑的基本概念，命题的符号化(个体词、谓词、量词)，谓词公式的定义、解释及类型，谓词逻辑的等值演算、前束范式，谓词逻辑的推理理论等.

学习数理逻辑的知识和分析方法，不仅有助于建立计算机思维，而且对训练和培养分析和解决问题的能力也是非常重要的.

第 1 章　命 题 逻 辑

先看著名物理学家爱因斯坦出过的一道题：

一个土耳其商人想找一个聪明的助手协助他经商，有两人前来应聘，这个商人为了试试哪个更聪明些，就把两个人带进一间漆黑的屋子里，他打开灯后说："这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色的，三顶是黑色的，现在，我把灯关掉，而且把帽子摆的位置弄乱，然后我们三个人每人摸一顶帽子戴在自己头上，在我开灯后，请你们尽快说出自己头上戴的帽子是什么颜色的．" 说完后，商人将电灯关掉，然后三人都摸了一顶帽子戴在头上，同时商人将余下的两顶帽子藏了起来，接着把灯打开．这时，那两个应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子，其中一个人便喊道："我戴的是黑帽子．"

请问这个人说的对吗？他是怎么推导出来的呢？

要回答这样的问题，实际上就是看由一些诸如"商人戴的是红帽子"这样的前提能否推出"猜出答案的应试者戴的是黑帽子"这样的结论．这又需要经历如下过程：

(1) 什么是前提，有哪些前提？

(2) 结论是什么？

(3) 根据什么进行推理？

(4) 怎么进行推理？

命题逻辑也称为命题演算或语句演算．它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系．那么究竟什么是命题？如何表示命题？如何由一组前提推导出结论？

本章将详细讨论这些问题．

1.1　命题及联结词

1.1.1　命题的概念

命题是逻辑的基本成分．所谓命题就是指具有真假意义的陈述句，即一个陈述事实的陈述句，但不能既真又假．作为命题的陈述句所表达的判定结果称为命题的真值．命题的真值只有"真"和"假"两种，常用 1 表示真，0 表示假．真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题．任何命题的真值都是唯一的．

判断给定句子是否为命题，应该分两步：首先判断它是否为陈述句，其次判断它是否有唯一的真值．

例 1.1　判断下列句子是否为命题．

(1) 4 是素数．

(2) π 是无理数．

(3) $x>y$．

(4) 火星上有水.

(5) 大于 2 的偶数均可分解为两个素数的和.

(6) 成都是一个旅游城市.

(7) 中国是世界上人口最多的国家.

(8) 您去学校吗?

(9) 请不要吸烟!

(10) 这朵花真美丽啊!

解 本题的 10 个句子中, (8) 是疑问句, (9) 是祈使句, (10) 是感叹句, 因而这 3 个句子都不是命题. 剩下的 7 个句子都是陈述句, 但 (3) 无确定的真值, 根据 x 和 y 的不同取值情况它可真可假, 即无唯一的真值, 因而不是命题. 本例中, 只有 (1), (2), (4), (5), (6), (7) 是命题. (1) 为假命题, (2), (6), (7) 为真命题. 虽然今天我们还不知道 (4), (5) 的真值, 但它们的真值客观存在, 而且是唯一的.

本例中的命题都不能被分解成更简单的命题, 我们称这样的命题是简单命题 (或原子命题、本原命题).

例 1.2 判断下列句子是否为命题.

我正在说假话.

解 该句子为陈述句, 若真值为真, 即 “我正在说假话” 为真, 也就是 “我正在说真话”, 则又推出该句子真值应为假; 反之, 若真值为假, 即 “我正在说假话” 为假, 也就是 “我正在说假话”, 则又推出句子的真值应为真. 于是 “我正在说假话” 既不为真又不为假, 因此它不是命题. 像这样由真推出假, 又由假推出真的陈述句称为悖论. 凡是悖论都不是命题.

注意 (1) 一切没有判断内容的句子都不能作为命题, 如命令句、感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句等.

(2) 约定在数理逻辑中像 “x” “y” “z” 等字母总是表示变量.

(3) 命题一定是陈述句, 但并非一切陈述句都是命题. 命题的真值有时可明确给出, 有时还需要依靠环境、条件、实际情况等才能确定其真值.

【趣味阅读】

1. 聪明的囚徒

古希腊有个国王, 对处死囚徒的方法作了两种规定: 一种是砍头, 另一种是绞刑. 他自恃聪明地做出一种规定: 囚徒可以说一句话. 如果囚徒说的是真话, 那么处以绞刑; 如果囚徒说的是假话, 那么处以砍头.

许多囚徒或者是因为说了假话而被砍头, 或者因为说了真话而被处以绞刑.

有一位极其聪明的囚徒, 当轮到他来选择处死方法时, 他说出一句巧妙的话, 结果使这个国王无论按照哪种方法处死他, 都违背自己的决定, 只得将他放了.

试问: 这囚徒说了句什么话?

2. 理发师问题

在一个小镇上, 有一个理发师公开宣布: 他只给小镇上所有不给自己理发的人理发.

请问: 这位理发师的头发由谁来理?

例 1.3 判断下列句子是否为命题.

(1) 2 不是无理数.

(2) 3 既是素数, 又是奇数.

(3) 2 或 4 是素数.

(4) 如果周末天气晴朗, 则我们去郊游.

(5) $\triangle ABC$ 是等腰三角形当且仅当$\triangle ABC$ 中有两个角相等.

以上的句子都是命题. 它们通过诸如“……不是……”“……且……”“……或……”“如果……则……”“……当且仅当……”等连词联结而成, 这样的命题, 称为复合命题.

一般来说, 命题可分两种类型:

(1) 原子命题(简单命题、本原命题): 不能被分解为更为简单命题的命题.

(2) 复合命题: 可以分解为更为简单的命题, 而且这些简单命题之间是通过如“……不……”“……并且……”“……或者……”“如果……则……”“……当且仅当……”等这样的关联词和标点符号复合而构成的命题, 称为复合命题.

本书中, 用小写英文字母或小写英文字母带下标来表示一个简单命题, 称为命题标识符. 命题真值用 0 或 1 进行表示, 其中: 0 表示假, 1 表示真.

例如, 可将例 1.1 中的简单命题进行符号化. 如 p: 4 是素数; q: π 是无理数; r: 火星上有水; s: 大于 2 的偶数均可分解为两个素数的和等.

而对于如例 1.3 所示的复合命题的符号化, 还需要将联结复合命题中各简单命题的联结词进行符号化. 数理逻辑中, 通常通过下列“命题联结词”来构成复合命题. 这里的联结词是句子间的联结, 而非单纯的名词、形容词、数词等的联结.

1.1.2 命题联结词

定义 1.1 设 p 为命题, 复合命题“非 p”(或“p 的否定”)称为 p 的否定式, 记作$\neg p$, 符号 $\neg$ 称作否定联结词.

由定义知: $\neg p$ 的逻辑关系为 p 不成立, 因而当 p 为真时, $\neg p$ 为假; 反之当 p 为假时, $\neg p$ 为真. 它的真值由表 1.1 决定.

表 1.1 $\neg p$ 的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

例如, 令 p: 2 是无理数(真值为 0), 则“2 不是无理数”符号化为$\neg p$, 真值为 1.

定义 1.2 设 p, q 为两个命题, 复合命题“p 并且 q”(或“p 与 q”)称为 p 与 q 的合取式, 记作 $p\wedge q$, 读作“p 与 q”或“p 合取 q”. 符号$\wedge$称作合取联结词.

规定 $p\wedge q$ 为 1 当且仅当 p 与 q 同时为 1. 它的真值由表 1.2 决定.

例如, 令 p: 3 是素数(真值为 1), q: 3 是奇数(真值为 1), 则复合命题“3 既是素数, 又是奇数”符号化为 $p\wedge q$, 真值为 1.

使用$\wedge$联结词需要注意自然语言中“既……，又……”“不但……，而且……”“虽然……，但是……”“一面……，一面……”等联结而成的复合命题都可以用$\wedge$联结词进行联结.

表 1.2 $p \wedge q$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.4 将下列命题符号化.

(1) 小莉既聪明，又刻苦.

(2) 小莉不仅聪明，而且刻苦.

(3) 小莉虽然聪明，但不刻苦.

(4) 张东与王红都是三好生.

(5) 张东与王红是同学.

解 (1)，(2)，(3) 都是复合命题，将其中的简单命题分别符号化，设 p：小莉聪明，q：小莉刻苦，则(1)，(2)，(3) 分别符号化为 $p \wedge q, p \wedge q, p \wedge \neg q$.

(4) 和 (5) 表面看起来有点相似，都用了“与”，但 (4) 是复合命题，表示张东是三好生，并且王红是三好生. 设 r：张东是三好生，s：王红是三好生，则 (4) 符号化为 $r \wedge s$. 但 (5) 中张东与王红是句子的主语，这句话是一个简单命题，(5) 可以符号化为 u.

定义 1.3 设 p, q 为两个命题，复合命题 “p 或 q” 称为 p 与 q 的析取式，记作 $p \vee q$，读作“p 或 q”或“p 析取 q”. 符号$\vee$称作析取联结词.

规定 $p \vee q$ 为 0 当且仅当 p 与 q 同时为 0. 它的真值由表 1.3 决定.

表 1.3 $p \vee q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例如，令 p: 2 是素数(真值为 1)，q: 4 是素数(真值为 0)，则复合命题“2 或 4 是素数”. 符号化为 $p \vee q$，真值为 1.

自然语言中的“或”具有二义性，它有时具有相容性(即它联结的两个命题可以同时为真)，有时具有排斥性(即只有当一个为真，另一个为假时才为真)，对应的或分别称为

相容或和排斥或. 自然语言中的或还可以表示近似数的意思, 比如“去教室需要 7 或 8 分钟”, 这里的“或”不是联结词.

在数理逻辑中, 析取联结词$\vee$表示的是“相容或”.

使用$\vee$联结词需要注意自然语言中“或”的具体意义, 要正确表达原命题的意义, 不能有二义性.

例 1.5　将下列命题符号化.

(1) 小莉爱唱歌或爱跳舞.

(2) 小莉只能从筐里拿一个苹果或一个梨子.

(3) 小莉在教室或者在图书馆.

解　先给出简单命题, 将其符号化, 然后再将复合命题符号化.

(1) 设 p: 小莉爱唱歌,　q: 小莉爱跳舞.

显然这个“或”为“相容或”, 即当 p 与 q 中有一个为真, 包括两个都为真时, 这个命题为真, 所以 (1) 符号化为 $p\vee q$.

(2) 设 p: 小莉从筐里拿一个苹果, q: 小莉从筐里拿一个梨子.

由题意可知, 这个“或”为排斥或. p, q 的取值组合有 4 种, 该复合命题为真当且仅当 p 和 q 其中一个为真, 另一个为假. 可以使用$\neg$, $\wedge$, $\vee$这 3 个联结词将命题符号化为 $(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$, 不难验证, 它准确地表达了 (2) 的原意. 它的真值由表 1.4 决定.

表 1.4　$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$ 的真值表

p	q	$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(3) 设 p: 小莉在教室,　q: 小莉在图书馆.

由题意可知, 这个“或”为排斥或. 可以符号化为 $(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$. 但由于小莉不可能同时在教室, 又在图书馆, 即 p 与 q 不能同时为真, p 与 q 的取值组合只有 3 种, 所以可以将命题符号化为 $p\vee q$.

定义 1.4　设 p, q 为两个命题, 复合命题“如果 p, 则 q”称为 p 与 q 的蕴涵式, 记作 $p\to q$, 读作“p 蕴涵 q”, 符号$\to$称作蕴涵联结词, 并称 p 为蕴涵式的前件, q 为蕴涵式的后件.

规定 $p\to q$ 为假当且仅当 p 为真, q 为假. 它的真值由表 1.5 决定.

表 1.5　$p\to q$ 的真值表

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1