信号与系统
学习指导与习题精解

主 编 胡 钋
副主编 秦 亮

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

信号与系统学习指导与习题精解

主 编 胡 钋
副主编 秦 亮

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统学习指导与习题精解/胡钋主编．—武汉：武汉大学出版社,2017.12

ISBN 978-7-307-19805-0

Ⅰ.信…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.信号系统—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 276084 号

责任编辑:胡　艳　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:汪冰滢

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：湖北恒泰印务有限公司
开本：787×1092　1/16　印张:27.75　字数:658 千字　插页:1
版次：2017 年 12 月第 1 版　　2017 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-19805-0　　定价:49.00 元

前　言

“信号与系统”是电气信息类专业最为重要的专业基础课程之一，也是相关专业硕士研究生入学考试的必考课程。长期的教学实践表明，学生在学习“信号与系统”课程中，除了必须掌握其中的基础理论知识，还需通过研习各种典型例题和习题才能加深对理论知识的理解，以巩固和透彻掌握课程的内容。

“信号与系统”课程理论概念多、工程背景强、数学基础涉及面宽广，因此，学生在学习或复习阶段，要想透彻把握课程的基本理论和基本分析方法，深刻理解和熟练运用基本概念和重要结论以及数学工具与分析方法，完整透彻地掌握好课程的精髓，就必须首先学会深度剖析各类典型例题，再自己动手做大量习题，才可能达到优异的学习或复习效果。因此，为了有效帮助本科生和备考研究生者深入学习和把握“信号与系统”课程的理论知识，灵活掌握分析方法，着实提高分析和求解各种复杂或综合问题的能力，编者根据自己长期从事该课程中英文教学工作的实际经验和大量科研工作的体会，编写了这本学习指导和解题指南，其中，对课程的重点、难点及分析解题方法，通过各类代表性例题进行了深入全面系统的总结和透析。

全书各 9 章均由基本要点、典型例题和习题解答三部分组成，包含了“信号与系统”课程的全部内容与关键知识点，通过融汇多种具有典型意义的例题和习题详解，清晰表述了该课程的基本理论和基本方法，以及经典分析方法和现代解题技巧，相信广大读者通过仔细阅读本书，一定会在贯通理解、解题能力等方面产生质的飞跃。

本书第 1 章至第 4 章由秦亮副教授编写，其余各章均由胡钋教授编写。胡钋教授担任主编并负者统稿。刘开培教授审阅了全书，并提出了很多宝贵意见，在此向他表示诚挚的谢意。

在本书的编写过程中，得到了武汉大学电气工程学院信号与系统课程组全体老师的大力帮助，也得到唐炬、徐箭、刘开培、查晓明、阮江军、常湧等有关专家的积极支持，在此一并表示衷心感谢。

作　者

2017 年 8 月

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　基本要点

1.1.1　信号及其描述方式

所谓信号，广泛地说，它是随时间变化的物理量，是传递和记录信息的一种工具。从数学的角度而言，它可以看成是一个或多个独立变量的函数表达式。从通信技术角度而言，它是借助电、光、声信号将文字、图像、语音、数码等信息从甲地传递到乙地或对不同信号进行各种形式的处理。

信号的描述方式主要有两种：一种是解析函数表达形式，另一种是图像表达形式。信号的独立变量与其函数的依托关系是多种形式的，如以时间特征量作为自变量来表示信号，则称之为时域表示法，即把一个信号随时间变化的规律用 $x=x(t)$ 的解析函数表达式描述出来，或通过图像的形式描述出来。

1.1.2　信号的分类

由语音、图像、数码等形成的电信号，其形式是多种多样的，根据其本身的特征，可进行如下分类：

1. 确定性信号与随机信号

如果信号可以表示为一个或几个自变量的确定函数，则称此信号为确定性信号。如果一个信号在发生以前，无法确切地知道它的波形，即该信号没有确定的函数表达式，而只能预测该信号对某一数值的概率，这样的信号称为随机信号。

2. 周期信号与非周期信号

如果一个信号每隔固定的时间 T 精确地再现该信号的本身，则称此信号为周期信号。周期信号具有两大特点，即周而复始且无始无终。一个时间周期信号的表达式为

$$x(t)=x(t\pm nT),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

非周期信号则无固定时间长度的周期。

3. 连续时间信号与离散时间信号

如果在所讨论的时间间隔内，除若干个不连续点之外，对于任意时间值都可给出确定的函数值，则此信号就称为连续信号，对应的函数用 $x(t)$ 表示。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的(只取某些规定值)。时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。离散信号在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间则

没有定义。函数符号写作 $x(n)$，仅当 n 为整数时，$x(n)$ 才有定义。如果离散时间信号的幅值是连续的，则又可称其为抽样信号，另一种情况是时间与幅值都具有离散性，这种信号又称为数字信号。

4. 能量信号与功率信号

若信号 $x(t)$ 能量有限，即 $0 < E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\mathrm{d}t < \infty$，此时 $P = 0$，则称该信号为能量信号；若信号 $x(t)$ 功率有限，即 $0 < P = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t < \infty$，此时 $E = \infty$，则称该信号为功率信号。对于周期信号，其能量随着时间的增加可以趋于无限，但功率是有限值，所以周期信号属于功率信号，而非周期信号则可以是能量信号，也可以是功率信号。

5. 偶信号与奇信号

如果一个连续信号 $x(t)$ 对 $\forall t$ 满足：$x(-t) = x(t)$，则称该连续信号为偶信号。如果信号 $x(t)$ 满足：对 $\forall t$，有 $x(-t) = -x(t)$，则称该信号为奇信号。偶信号关于纵轴或时间原点对称，而奇信号关于时间原点中心对称。

6. 实信号与复信号

一般物理可实现信号的函数值(或信号序列值)为实数，这类信号称为实信号。在某些场合，结合信号处理算法的需要，会人为形成或构造函数值为复数的信号，称为复信号。

1.1.3 系统的模型

系统模型的建立是有一定条件的，对于同一物理系统，在不同条件下，可以得到不同形式的数学模型。从另一方面讲，对于不同的物理系统，经过抽象和近似，有可能得到形式上完全相同的数学模型。

如果系统数学模型、起始状态以及输入激励信号都已确定，即可运用数学方法求解其响应。系统分析的过程，是从实际物理问题抽象为数学模型，经数学解析后再回到物理实际的过程。

1.1.4 系统的分类

1. 连续时间系统与离散时间系统

连续时间系统是指输入、输出及状态量都是时间 t 的连续函数，其数学模型是微分方程。离散时间系统是指输入、输出都是离散 n 的变量(n 为整数集合)，其数学模型是差分方程。

2. 即时系统与动态系统

若系统响应信号只取决于同时刻的激励信号，而与它过去的工作状态(历史)无关，则为无记忆系统，又称即时系统，其用代数方程描述。

若系统响应信号不仅取决于同时刻的激励信号，而且与它过去工作状态有关，则为动态系统，其数学模型是微分方程或差分方程。

3. 集总参数系统与分布参数系统

只由集总参数元件组成的系统，称为集总参数系统，其数学模型是常微分方程。含有

分布参数元件的系统是分布参数系统(如传输线、波导等)，其数学模型是偏微分方程。

4. 线性系统与非线性系统

具有叠加性与均匀性(也称齐次性，homogeneity)的系统，称为线性系统。所谓叠加性，是指当几个激励信号同时作用于系统时，总的输出响应等于每个激励单独作用所产生响应之和；而均匀性则是指，当输入信号乘以某常数时，响应也乘以相同的常数。不满足叠加性或均匀性的系统，是非线性系统。

5. 时变系统与时不变系统

时变系统是指系统参数随时间变化，其数学模型应是变系数微分方程或变系数差分方程。非时变系统的重要性质是系统参数不随时间而改变，其数学模型是常系数微分方程或常系数差分方程。

6. 可逆系统与不可逆系统

若系统在不同激励信号作用下产生不同的响应，则称此系统为可逆系统。若系统在不同的激励信号作用下产生了相同的响应，则称此系统为不可逆系统。

7. 因果与非因果系统

若系统任何时刻的响应只取决于激励现在与过去值，而不取决于激励的将来值，则为因果系统。若系统的响应发生在激励之前，没有激励就有响应，则为非因果系统。

8. 稳定系统与非稳定系统

稳定系统是指对于有限(有界)激励只能产生有限(有界)响应的系统。若有限(有界)激励产生无限(无界)的响应，则称为非稳定系统。

1.1.5 系统分析方法

在建立系统模型方面，系统的数学描述方法可分为两大类型，一是输入 - 输出描述法，另一是状态变量描述法。

从系统数学模型的求解方法来讲，大体上可分为时间域方法与变换域方法两大类型。时间域方法直接分析时间变量的函数，研究系统的时间响应特性，或称时域特性。变换域方法将信号与系统模型的时间变量函数变换成相应变换域的某种变量函数。例如，傅里叶变换以频率为独立变量，以频域特性为主要研究对象；而拉普拉斯变换与 Z 变换则注重研究极点与零点分析，利用 s 域或 z 域的特性解释现象和说明问题。

1.2 典型例题

例 1-1 试判断图 1-1 所示各波形为连续信号还是离散信号。若为离散信号，是否为数字信号?

解：首先根据时间离散性区分连续时间信号和离散时间信号，然后对离散时间信号根据幅度离散性区分离散信号为抽样信号还是数字信号。

图(a)中 $x(t)$ 为连续信号，因该信号的时间取值是连续的。而且该信号是幅值连续的连续信号，故虽然部分点的幅值有所跳变，但从整体来看幅值是仍连续的，故 $x(t)$ 为模拟信号。

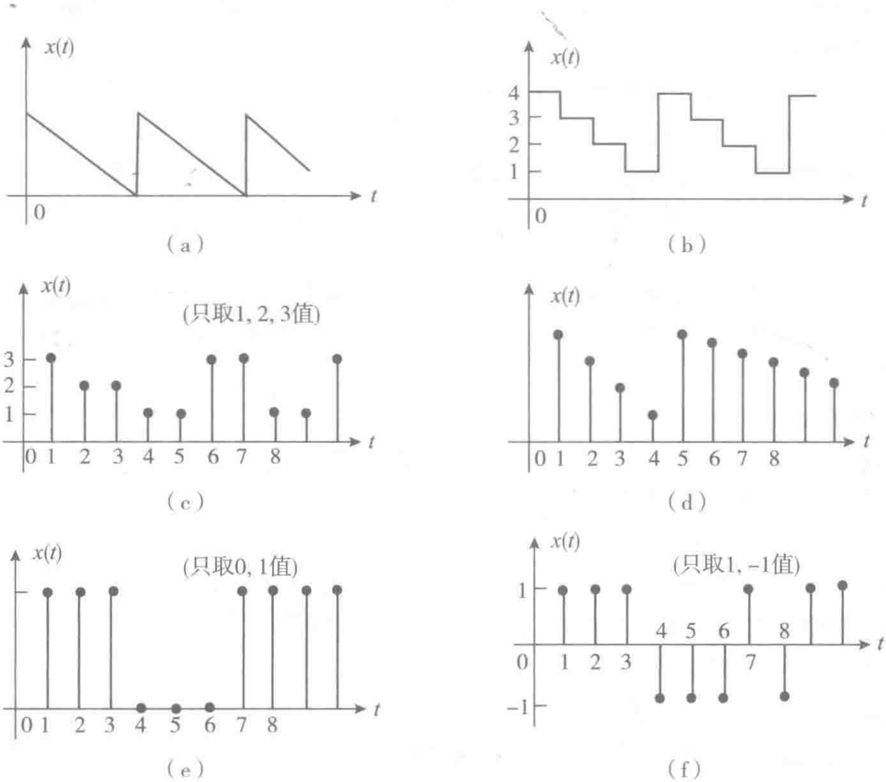

图 1-1

图(b) 中 $x(t)$ 为连续信号，因该信号时间取值连续。但该信号是幅值离散的连续信号。

图(c) 中 $x(t)$ 为离散信号，因该信号时间取值离散。而且该信号是幅值离散的离散信号，即数字信号。

图(d) 中 $x(t)$ 为离散信号，因该信号时间取值离散。而且该信号是幅值连续的离散信号，即抽样信号。

图(e) 中 $x(t)$ 为离散信号，因该信号时间取值离散。而且该信号是幅值离散的离散信号，即数字信号。

图(f) 中 $x(t)$ 为离散信号，因该信号时间取值离散。而且该信号是幅值离散的离散信号，即数字信号。

例 1-2　下列信号中哪些不是周期信号？

A. $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$　　B. $\cos\left(\dfrac{n}{8}-\pi\right)$

C. $\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}+1\right)$　　D. $\cos\left(\dfrac{n^2\pi}{8}\right)$

解： A. 为周期信号。

B. 由$\frac{n}{8}=2\pi$得$n=16\pi$，不是有理数，故该信号不是周期信号。

C. $\sin\left(\frac{6\pi}{7}+1\right)=$常数，故该信号不是周期信号。

D. 设其周期为m，则有$(m+n)^2\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{n^2}{8}\pi$，$k=0,1,2,3,\cdots\Rightarrow m^2+2mn=16k$。

周期m依赖于n的取值，故该信号不是周期信号。

例 1-3 判断下列各信号是否为周期信号。若为周期信号，试求出其周期。

(1)$x(t)=\cos 8t-\sin 12t$；　　(2)$x(t)=\cos 2t+2\sin\pi t$；

(3)$x(n)=\cos\omega n$，ω为常数；　(4)$x(n)=\cos\frac{\pi}{4}n+2\sin 2\pi n$。

解：(1) $\cos 8t$为周期信号，周期为$T_1=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$；

$\sin 12t$为周期信号，周期为$T_2=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$。

且$\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{2}$为有理数，故$x(t)$为周期信号，其周期$T$等于$T_1$和$T_2$的最小公倍数，即$T=\frac{\pi}{12}$。

(2)$\cos 2t$为周期信号，周期$T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$；$2\sin\pi t$是周期信号，周期$T_2=\frac{2\pi}{2}=\pi$，但$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{2}$为无理数，$T_1$和$T_2$之间不存在最小公倍数，故$x(t)$为非周期信号。此题说明两个周期信号之和不一定是周期信号。

(3)$x(n)$的周期$N=\frac{2\pi}{\omega}$，N应为正整数，但由于π是无理数，N不可能为正整数，故$x(n)$为非周期信号。

(4)$\cos\frac{\pi}{4}n$为周期信号，周期为$N_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$个间隔；$2\sin 2\pi n$为周期信号，周期为$N$，$N_2=\frac{2\pi}{2\pi}=1$。故$x(n)$为周期信号，其周期$N$等于$N_1$和$N_2$的最小公倍数，即$N=8$个间隔。

例 1-4 计算下列信号的能量和功率，判断是否为能量或功率信号。

(1)$e^{-|t|}$；(2)$\varepsilon(t+3)$；(3)$\mathrm{Sa}(t)$；(4)$\mathrm{sgn}(t)$；(5)$2e^{t^2}$。

解：(1) 能量$E=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-|t|})^2 dt=2\int_0^{+\infty}e^{-2t}dt=-e^{-2t}\Big|_0^{+\infty}=1$，为能量信号，其功率为0。

(2) 能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}(\varepsilon(t+3))^2\mathrm{d}t=\int_{-3}^{+\infty}1\mathrm{d}t=+\infty$，为无穷大；

功率 $\overline{P}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-3}^{+\frac{T}{2}-3}[\varepsilon(T+3)]^2\mathrm{d}t=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-3}^{+\frac{T}{2}-3}1\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$，为功率信号。

(3) 能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{Sa}(t)]^2\mathrm{d}t=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sin t)^2}{t^2}\mathrm{d}t=\pi$，为能量信号；

功率为0。

(4) 能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{sgn}t)^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}1\mathrm{d}t=+\infty$；

功率 $\overline{P}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}(\mathrm{sgn}t)^2\mathrm{d}t=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}1\mathrm{d}t=1$，为功率信号。

(5) 既非能量又非功率信号。能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}(2\mathrm{e}^{t^2})^2\mathrm{d}t=+\infty$；

功率为 $\overline{P}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}(2\mathrm{e}^{t^2})^2\mathrm{d}t=+\infty$。

例1-5　试求出图1-2所示方框图表示的系统的微分方程。

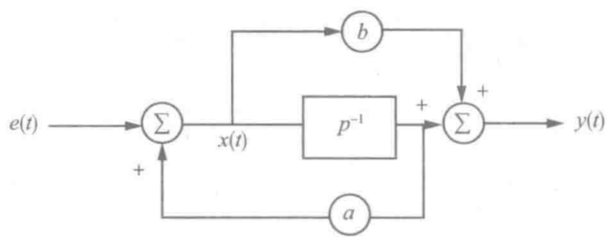

图1-2

解：按节点法可以得到

$$y(t)=bx(t)+p^{-1}x(t)$$
$$x(t)=e(t)+ap^{-1}x(t)$$

由上式可得

$$x(t)=\frac{e(t)}{1-ap^{-1}}$$

代入 $y(t)$ 式，得

$$y(t)=\frac{(b+p^{-1})e(t)}{1-ap^{-1}}$$
$$(1-ap^{-1})y(t)=(b+p^{-1})e(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)-ay(t)=b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+e(t)$$

例 1-6 如图 1-3 所示的连续时间系统，由两个积分器和两个比例乘法器构成。求输入 $e(t)$ 与输出 $y(t)$ 之间的微分方程。

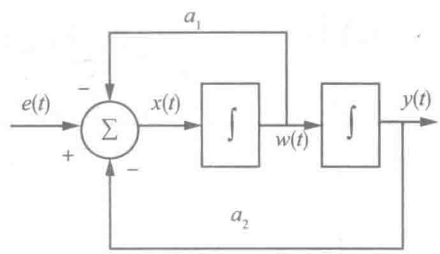

图 1-3

解： 由仿真系统求微分方程，通常选择加法器输出作为中间变量，经过化简得到最终微分方程，连续时间系统的阶数等于系统中积分器的个数。设 $x(t)$ 和 $w(t)$ 分别是图 1-3 中第一个积分器的输入和输出。第一个积分器的输入为

$$x(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w(t) \tag{①}$$

也可写为

$$x(t)=-a_1w(t)-a_2y(t)+e(t) \tag{②}$$

因为 $r(t)$ 是图 1-3 中第二个积分器的输出，则有

$$w(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \tag{③}$$

将式 ③ 代入式 ① 和式 ② 的右端，并令式 ① 和式 ② 右端相等，可得

$$\frac{d^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)=-a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)-a_2y(t)+e(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+a_2y(t)=e(t)$$

为所求的二阶线性微分方程。

例 1-7 对图 1-4 所示的电路图分别列出电流 i_1，i_2 和电压 u_0 的微分方程式。

解： 按 KCL 和 KVL，可以写出

$$\begin{cases} i_1+i_2+\frac{1}{2}\int i_2\mathrm{d}t=I(t) & ① \\ 3i_1=\frac{\mathrm{d}\left(i_2+\frac{1}{2}\int i_2\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}t}+u_0 & ② \\ u_0=\int i_2\mathrm{d}t & ③ \end{cases}$$

由式 ② 与式 ③ 得

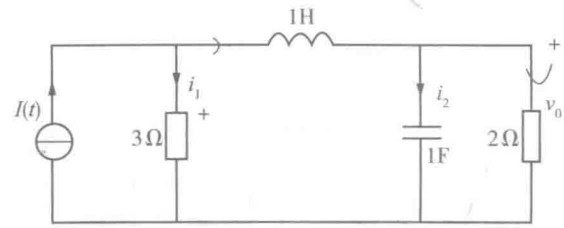

图 1-4

$$i_1 = \frac{1}{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i_2 + \frac{1}{2}\int i_2 \mathrm{d}t\right) + \int i_2 \mathrm{d}t\right]$$

将 i_1 代入方程式 ①，整理后得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{7}{2}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{5}{2}i_2 = 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) \qquad ④$$

由式 ③ 得

$$i_2 = \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$$

将其代入式 ④，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_0}{\mathrm{d}t^2} + \frac{7}{2}\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \frac{5}{2}u_0 = 3I(t) \qquad ⑤$$

将式 ① 微分后代入式 ②，得

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + 3i_1 = \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + u_0$$

再利用式 ③，可得

$$i_2 = \frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} \qquad ⑥$$

将式 ⑥ 代入式 ①，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{7}{2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{5}{2}i_1 = \frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + I(t)$$

例 1-8　如图 1-5 所示电路图，电流源 $i_g(t)$ 是激励，试列出电流 $i_L(t)$ 和电阻 R_1 上电压 $U_1(t)$ 的微分方程表达式。

解： 根据 KVL 有

$$U_C + U_1 = U_L + R_2 i_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + R_2 i_L$$

对上式求导，并注意到 $i_C = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$ 和 $R_1 i_C = U_1$，可得

$$\frac{1}{R_1 C}U_1 + \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + R_2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad ①$$

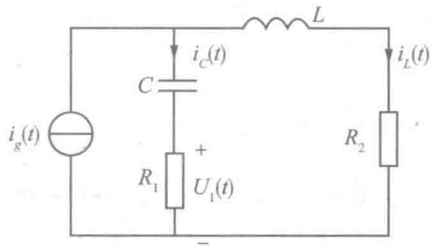

图 1-5

根据 KCL，有

$$i_C = i_g - i_L,\ U_1 = R_1 i_C = R_1(i_g - i_L)$$

将 U_1 和$\dfrac{dU_1}{dt}$代入式①，可得

$$\frac{1}{C}(i_g - i_L) + R_1\left(\frac{di_g}{dt} - \frac{di_L}{dt}\right) = L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2\frac{di_L}{dt}$$

于是

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{R_1}{L}\frac{di_g}{dt} + \frac{1}{LC}i_g$$

将 $i_L = i_g - i_C = i_g - \dfrac{U_1}{R_1}$ 的一阶和二阶导数代入式(1-10)，消去 i_L 并加以整理，可得

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L}\frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{LC}U_1 = R_1\frac{d^2 i_g}{dt^2} + \frac{R_1 R_2}{L}\frac{di_g}{dt}$$

例 1-9　对图 1-6 所示的每个电路列写电流 $i_1(t)$、电流 $i_2(t)$ 和电压 $v_0(t)$ 的微分方程式。

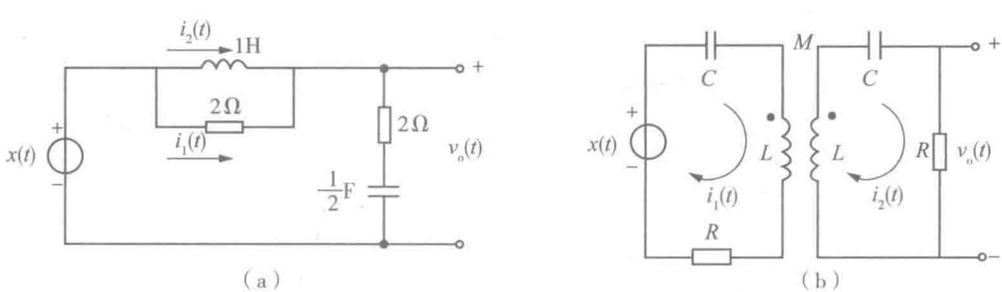

图 1-6

解： 对于电路系统，建立微分方程的基本依据是电路网络的两个约束特性：

(1) 元件端口的电压与电流的约束关系。

例如，电阻：$v_R(t)=Ri_R(t)$；

电感：$v_L(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$；

电容：$v_c(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_c(\tau)\mathrm{d}\tau$。

(2) 网络拓扑约束，即KVL和KCL。根据以上两点列写所给电路的微分方程，由KCL可得

$$\begin{cases}2i_1(t)=\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} & ①\\ x(t)=2i_1(t)+v_0(t) & ②\\ v_0(t)=2[i_1(t)+i_2(t)]+2\int_{-\infty}^{t}[i_1(\tau)+i_2(\tau)]\mathrm{d}\tau & ③\end{cases}$$

将式 ③ 代入式 ② 得

$$4i_1(t)+2i_2(t)+2\int_{-\infty}^{t}[i_1(\tau)+i_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=x(t) \qquad ④$$

将式 ④ 求一阶导数得

$$4\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+2i_1(t)+2i_2(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad ⑤$$

由式 ① 得

$$i_1(t)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \qquad ⑥$$

再对式 ⑥ 求一阶导数得

$$\frac{\mathrm{d}i_1(r)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2i_i(t)}{\mathrm{d}t^2} \qquad ⑦$$

将式 ⑥ 与式 ⑦ 代入式 ⑤，并整理得 $i_2(t)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+i_2(t)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad ⑧$$

将式 ① 代入式 ⑧ 得 $i_1(t)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2i_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+i_1(t)=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \qquad ⑨$$

由式 ② 得

$$i_1(t)=\frac{1}{2}[x(t)-v_0(t)] \qquad ⑩$$

将式 ⑩ 代入式 ⑨，即得 v_0t 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v_0(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t}+v_0(t)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)$$

由 KVL 可得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + L\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + Ri_1(t) - M\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) & ⑪\\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau + L\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + Ri_2(t) - M\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 & ⑫\\ v_0(t) = Ri_2(t) & ⑬\end{cases}$$

从式 ⑪ 求出 $i_2(t)$，再将其代入式 ⑫，整理后得

$$(L^2 - M^2)\frac{\mathrm{d}^4 i_1(t)}{\mathrm{d}t^4} + 2RL\frac{\mathrm{d}^3 i_1}{\mathrm{d}t^3} + \left(R^2 + \frac{2L}{C}\right)\frac{\mathrm{d}^2 i_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2R}{C}\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C^2}i_1(t)$$
$$= L\frac{\mathrm{d}^4 x(t)}{\mathrm{d}t^4} + R\frac{\mathrm{d}^3 x(t)}{\mathrm{d}t^3} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \quad ⑭$$

同理，从式 ⑫ 求出 $i_1(t)$，再将其代入式 ⑪ 可求得

$$(L^2 - M^2)\frac{\mathrm{d}^4 i_2(t)}{\mathrm{d}t^4} + 2RL\frac{\mathrm{d}^3 i_2}{\mathrm{d}t^3} + \left(R^2 + \frac{2L}{C}\right)\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2R}{C}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C^2}i_2(t) = M\frac{\mathrm{d}^3 x(t)}{\mathrm{d}t^3} \quad ⑮$$

再将式 ⑬ 代入式 ⑮，求得

$$(L^2 - M^2)\frac{\mathrm{d}^4 v_0(t)}{\mathrm{d}t^4} + 2RL\frac{\mathrm{d}^3 v_0(t)}{\mathrm{d}t^3} + \left(R^2 + \frac{2L}{C}\right)\frac{\mathrm{d}^2 v_0(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2R}{C}\frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C^2}v_0(t)$$
$$= RM\frac{\mathrm{d}^3 x(t)}{\mathrm{d}t^3}$$

由以上结果可以看出，所求得的微分方程的阶数与电路中独立储能元件的个数(即电路的阶数)是相同的。例如，图 1-6(a) 含有 2 个独立的储能元件，则为二阶微分方程。而图 1-6(b) 含有 4 个独立的储能元件，因此所列方程为四阶微分方程。

例 1-10 某连续系统的框图如图 1-7 所示，写出该系统的微分方程。

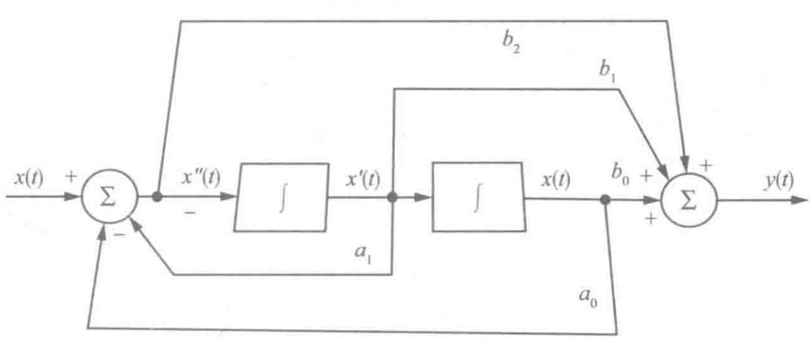

图 1-7

解：若已知描述系统的框图，写该系统的微分或差分方程的一般步骤是：

(1) 选中间变量 $x(\cdot)$：对于连续系统，设其最右端积分器的输出为 $x(t)$；对于离散系统，设其最左端迟延单元的输入为 $x(n)$；

(2) 写出各加法器输出信号的方程；