俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Construction Theory of Function (II)

函数构造论（中）

[俄罗斯] 纳汤松 著　徐家福 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

函数构造论（中）

Construction Theory of Function (II)

[俄罗斯]纳汤松 著

徐家福 译

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分8章，主要介绍平方逼近的相关内容，包括：$L_{p(x)}^{2}$空间，直交系，直交多项式等知识，详细讨论了勒让德多项式及雅可比行列式，并分类讨论了有限区间及无限区间的矩量问题.

本书可供数学专业学生及高等数学研究人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

函数构造论. 中/(俄罗斯)纳汤松著；徐家福译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.6

ISBN 978-7-5603-6753-8

Ⅰ.①函… Ⅱ.①纳…②徐… Ⅲ.①函数构造论 Ⅳ.①O174.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第158166号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 11.25 字数 202千字
版　　次 2017年6月第1版 2017年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6753-8
定　　价 48.00元

◎目录

第二篇　平方逼近

第二篇

平方逼近

第一章 $L^2_{p(x)}$ 空间

§1 问题的提出

在本书的第二篇，和在前一篇一样，我们主要是致力于研究用多项式来逼近任意函数的问题. 但是，用多项式 $P(x)$ 逼近函数 $f(x)$ 的精确度，我们将采用与前面不同的估值.

那就是，设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，$P(x)$ 是一个多项式，如果量

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} | P(x) - f(x) | \tag{1}$$

是很小的话，在以前我们便认为多项式 $P(x)$ 接近于函数 $f(x)$；而现在如果积分[①]

$$\int_a^b [P(x) - f(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{2}$$

很小，我们便说多项式 $P(x)$ 接近于函数 $f(x)$.

应当指出，用表达式(1) 来估计逼近的精确度时，对函数 $f(x)$ 的连续性这一要求是极为重要的. 因为，如果在这种估计方法下要使用多项式逼近函数达到任意的精确度，那么，$f(x)$ 便是一致收敛的多项式序列的极限，而这只有在 $f(x)$ 连续的时候才可能.

---

① 通常我们所采用的 $P(x)$ 接近于 $f(x)$ 的估值，是借助于较式(2) 的形式更广泛的积分，但是在目前，为了不使问题复杂，我们根据书中所指出的标准来谈.

在用积分(2)估计逼近时,问题便不是这样.例如,设函数 $f(x)$ 是按下法定义在 $[-1,1]$ 上的

$$f(x)=\begin{cases}0, 当 -1\leqslant x\leqslant 0 时\\ 1, 当 0< x\leqslant 1 时\end{cases}$$

虽然函数 $f(x)$ 是间断的,但却存在这样的多项式 $P(x)$,对于它来说,积分

$$\int_{-1}^{1}[P(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x$$

可以任意地小.

事实上,我们引进函数 $\varphi(x)$,令

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, 当 -1\leqslant x\leqslant 0 时\\ 1, 当 \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1 时\end{cases}$$

并且在闭区间 $[0,\frac{1}{n}]$ 上把 $\varphi(x)$ 当作是线性的.容易看出 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是连续的,并且

$$\int_{-1}^{1}[\varphi(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}[\varphi(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x<\frac{1}{n}$$

因为 $|\varphi(x)-f(x)|\leqslant 1$.根据魏尔斯特拉斯定理,可以选取这样的多项式 $P(x)$,使得对于 $[-1,1]$ 中的所有 x,都有

$$|P(x)-\varphi(x)|<\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

对于这个多项式,显然

$$\int_{-1}^{1}[P(x)-\varphi(x)]^2\mathrm{d}x<\frac{1}{n}$$

因为

$$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$$

所以

$$[P(x)-f(x)]^2\leqslant 2\{[P(x)-\varphi(x)]^2+[\varphi(x)-f(x)]^2\}$$

故有

$$\int_{-1}^{1}[P(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x<\frac{4}{n}$$

因为 n 可以取得任意地大,从而便推出了我们的断言.

这样一来,在我们的新观点下,被逼近函数的连续性这一要求便是多余的

了.我们不提出连续性这个要求,而在讨论中也引进间断的函数.但是,这些函数并不能是完全任意的,因为我们必须保证积分(2)的存在.如果我们以黎曼的积分定义为基础,那么,我们便只能研究间断点集的测度等于零的不连续函数.但是并非所述理论在本质上一定要引出这种要求,而不过是由于采用通常的积分定义才引起的.要想使说明具有更严谨与更完美的形式,我们不以黎曼(Riemann)积分为基础而以勒贝格(Lebesgue)积分为基础.这就要求读者熟悉实变函数论的基本内容.此后,这些内容都假定是已经知道了的.

§2 权函数与 $L^2_{p(x)}$ 空间

设在闭区间$[a,b]$上给定了一个非负的且可求和的函数 $p(x)$.由于这函数在以后将要起特殊的作用,我们便把它叫作权函数,或简称为权.我们永远约定只考虑这样的权 $p(x)$,它只在一个测度等于 0 的集合上才等于 0.以后我们便不再提到这个约定.

每一个权函数 $p(x)$ 都对应有两类定义在$[a,b]$上的可测函数:乘积 $p(x)f(x)$ 可求和的 $L_{p(x)}$ 类,以及乘积 $p(x)f^2(x)$ 可求和的 $L^2_{p(x)}$ 类.在 $p(x)=1$ 时,我们便把这两个函数类简单地记作 L 和 L^2.有时候我们要求在这些函数类的记号中能表示出所有被考虑的函数定义在什么区间上.这时,我们便分别用 $L_{p(x)}([a,b])$,$L^2_{p(x)}([a,b])$,$L([a,b])$ 和 $L^2([a,b])$ 来表示它们.

由不等式

$$|f(x)|\leqslant\frac{1+f^2(x)}{2}$$

便推得 $L^2_{p(x)}$ 包含在 $L_{p(x)}$ 内.

仿此,不等式

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

表明 $L^2_{p(x)}$ 中两个函数的乘积包含在 $L_{p(x)}$ 内,借助于恒等式

$$(f\pm g)^2=f^2\pm 2fg+g^2$$

从而也知道 $L^2_{p(x)}$ 中两个函数的和或差也都在这一类内.最后,重要的是:所有的函数 $cf(x)$ 与 $f(x)$ 一起都在 $L^2_{p(x)}$ 内,其中的 c 是常数.

定理 1.1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $L^2_{p(x)}$ 内的两个函数,则不等式

$$\left[\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2$$
$$\leqslant\left[\int_a^b p(x)f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b p(x)g^2(x)\mathrm{d}x\right] \tag{3}$$

与不等式

$$\sqrt{\int_a^b p(x)[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x}$$
$$\leqslant\sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b p(x)g^2(x)\mathrm{d}x} \tag{4}$$

都成立.它们分别称为布尼亚柯夫斯基(Буняковский)不等式与柯西(Cauchy)不等式.

要证明不等式(3)我们令

$$\psi(z)=\int_a^b p(x)[zf(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x=Az^2+2Bz+C$$

其中

$$A=\int_a^b p(x)f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$B=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$C=\int_a^b p(x)g^2(x)\mathrm{d}x$$

若 $A=0$,则 $f(x)=0$(像通常在度量函数论中一样,我们对于只在零测度集合上不相等的函数是不加区别的),而不等式(3)就化为等式 $0=0$;若 $A>0$,则式(3)可根据 $\psi(z)\geqslant 0$ 和

$$\psi\left(-\frac{B}{A}\right)=\frac{AC-B^2}{A}$$

推出.

于是,式(3)便被证明了.把式(3)写成

$$\int_a^b pfg\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\int_a^b pf^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b pg^2\,\mathrm{d}x}$$

的形式后,二倍起来,在不等式两端都加上

$$\int_a^b pf^2\,\mathrm{d}x+\int_a^b pg^2\,\mathrm{d}x$$

我们便得到与式(4)等价的不等式

$$\int_a^b p(f+g)^2\mathrm{d}x \leqslant \left[\sqrt{\int_a^b pf^2\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b pg^2\mathrm{d}x}\right]^2$$

对于 $L^2_{p(x)}$ 中的每一个函数 $f(x)$，我们都赋予一个数

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)\mathrm{d}x}$$

这个量便叫作函数 $f(x)$ 的范数，它具有下列类似于数的模的性质：

(1) $\| f \| \geqslant 0$，并且当且仅当 $f(x)=0$ 时，才有 $\| f \| =0$；

(2) $\| cf \| =| c |\cdot \| f \|$，特别的，$\| -f \| = \| f \|$；

(3) $\| f+g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$.

范数的概念使得能够引用便利的几何术语.

设 E 是任意性质的元素 $x,y,z,\cdots$ 的集合. 如果对应于集合 E 中的每一对元素 x 和 y，都有一个具有下列性质的实数 $r(x,y)$：

(1) $r(x,y)\geqslant 0$，并且当且仅当 $x=y$ 时，$r(x,y)=0$；

(2) $r(x,y)=r(y,x)$；

(3) $r(x,z)\leqslant r(x,y)+r(y,z)$.

那么，集合 E 便叫作距离空间，并称 $r(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离.

对于 $L^2_{p(x)}$ 中的任意两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，令

$$r(f,g)=\| f-g \|$$

我们就把 $L^2_{p(x)}$ 变成了一个距离空间.

§3 平均收敛性

定义 1.1 设 f 与 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$ 都是空间 $L^2_{p(x)}$ 中的元素，如果

$$\lim_{n\to\infty}\| f_n - f \| =0$$

我们就称 f 为序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n,\cdots$ 的极限.

虽然这样的关系在函数论上的意义是

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b p(x)[f_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x=0$$

我们仍按通常的方式把它写成

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ 或 } f_n \to f$$

这种类型的收敛性便叫作带权 $p(x)$ 的平均收敛性.

定理 1.2 $L^2_{p(x)}$ 中的元素序列不能有两个不同的极限.

事实上,如果 $f_n \to f$ 且 $f_n \to g$,则对不等式

$$0 \leqslant \| f-g \| \leqslant \| f-f_n \| + \| f_n - g \|$$

取极限,便得到关系 $\| f-g \| =0$,从而 $f=g$.

定理 1.3 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于函数 $f(x)$,则从其中可以选出一个几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$.

此定理的证明系根据函数论中的下述重要命题:

勒维(Levi) 定理 设在 $[a,b]$ 上给定了一个非负的可测函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots, u_k(x), \cdots$$

并设

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b u_k(x) \mathrm{d}x < +\infty$$

则在 $[a,b]$ 上几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$$

转来证明定理 1.3,选这样的 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$,使得

$$\int_a^b p(x)[f_{n_k}(x) - f(x)]^2 \mathrm{d}x < \frac{1}{k!}$$

那么,根据勒维定理,在 $[a,b]$ 上几乎处处有

$$\lim_{k\to\infty} p(x)[f_{n_k}(x) - f(x)]^2 = 0$$

因为 $p(x)$ 几乎处处是严格正的.于是定理便证明了.

定理 1.4 若 $f_n \to f$,则 $\| f_n \| \to \| f \|$.

因为

$$\| f \| \leqslant \| f_n \| + \| f - f_n \|, \| f_n \| \leqslant \| f \| + \| f_n - f \|$$

所以

$$| \| f_n \| - \| f \| | \leqslant \| f_n - f \|$$

证明的其余部分是显然的.

定义 1.2 设序列 $\{f_n\} \subset L^2_{p(x)}$.若对应于每一个 $\varepsilon > 0$,都有这样一个 N,使得当 $n > N, m > N$ 时

$$\| f_n - f_m \| < \varepsilon \tag{5}$$

便称序列 $\{f_n\}$ 自我收敛.

定理 1.5 有极限的序列必为自我收敛.

事实上,若 $f_n \to f$,则对任意的 $\varepsilon > 0$,都能够求得这样的 N,使得当 $n > N$ 时

$$\| f_n - f \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

若取 $n > N, m > N$,则有

$$\| f_n - f_m \| \leqslant \| f_n - f \| + \| f - f_m \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

逆定理也成立:

定理 1.6(菲舍尔(E. Fischer))　若序列自我收敛,则它有极限.

这个定理所表示出的空间 $L^2_{p(x)}$ 的性质,称为空间 $L^2_{p(x)}$ 的完备性.

为证明计,我们选这样的 n_k,使得当 $n \geqslant n_k$ 且 $m \geqslant n_k$ 时

$$\| f_n - f_m \| < \frac{1}{k!}$$

同时可以认为 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. 那么,特别地有

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \| < \frac{1}{k!}$$

因而级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|$$

收敛.

若对函数

$$f = | f_{n_{k+1}} - f_{n_k} | \text{ 和 } g = 1$$

应用不等式(3),则有

$$\int_a^b p(x) | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_a^b p(x) \mathrm{d}x} \, \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|$$

因而,级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b p(x) | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \mathrm{d}x$$

也收敛. 又根据所引的勒维定理,级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(x) | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) |$$

几乎处处收敛,因而级数

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \{ f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \}$$

亦然.

这后一级数的收敛性等价于存在有限的极限

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

我们引进一个函数 $f(x)$，在上述极限存在且为有限时，它就等于这个极限，而在其余的点处等于 0.

兹证明这个函数属于 $L^2_{p(x)}$，并且它就是 $f_n(x)$ 的极限. 为此目的，取 $\varepsilon > 0$，我们求出这样的 N，使得当 $n > N, m > N$ 时式(5) 成立. 然后固定 $n > N$. 对于充分大的 k 将有 $n_k > N$，因而

$$\| f_n - f_{n_k} \| < \varepsilon$$

我们要利用下面这个函数论中的定理：

法图(Fatou) 定理　设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 为定义在$[a,b]$ 上的非负可测函数列，它几乎处处收敛于函数 $\psi(x)$，并且若对所有 k 有

$$\int_a^b \varphi_k(x)\mathrm{d}x \leqslant A$$

则也有

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x \leqslant A$$

在所述情形下，函数 $p(x)[f_n(x) - f_{n_k}(x)]^2$（$n$ 是固定的）就是 $\varphi_k(x)$. 函数 $p(x)[f_n(x) - f(x)]^2$ 是 $\psi(x)$，ε^2 是 A.

这就是说

$$\int_a^b p(x)[f_n(x) - f(x)]^2 \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon^2 \tag{6}$$

从而便已经推得，差 $f_n(x) - f(x)$ 与函数 $f(x)$ 自己都属于 $L^2_{p(x)}$. 此外，因为要想不等式(6) 成立，只需 $n > N$，于是定理得证.

除了平均收敛以外，我们还得涉及所谓“弱收敛性”. 我们说序列$\{f_n(x)\} \subset L^2_{p(x)}$ 是弱收敛于 $L^2_{p(x)}$ 中的函数 $f(x)$，如果对于任意的函数$g(x) \in L^2_{p(x)}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b p(x)f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

据布尼亚柯夫斯基不等式

$$\left|\int_a^b pf_n g\,\mathrm{d}x - \int_a^b pfg\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b pg^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b p(f_n - f)^2\mathrm{d}x}$$

因而由某一序列的平均收敛性便推得了它的弱收敛性(都收敛于同一个极限函数).

§4 在 $L^2_{p(x)}$ 内稠密的函数类

设 E 是一个距离空间,而 A 是它的某一个子集.若 E 的每一个元素都能够表示成集合 A 中元素序列的极限,则说 A 是在 E 内处处稠密的集合.显然,要想 A 在 E 内处处稠密,其充要条件便是:对任意的 $f \in E$ 和任意的 $\varepsilon > 0$,都存在这样一个元素 $g \in A$,使得

$$r(f,g) < \varepsilon$$

由于我们一开始便假定权函数 $p(x)$ 是可求和的,显然,在 $L^2_{p(x)}$ 中包含全部有界的可测函数.其中更加是包含了全部的连续函数以及全部的阶梯函数[①].

我们规定以下的记号:M 表所有的有界可测函数,C 表所有的连续函数,S 表所有的阶梯函数(自然,指的都是定义在所考虑的闭区间$[a,b]$上的函数),P 表所有的多项式,T 表所有的三角多项式.

定理 1.7 函数类 M,C,S,P 中的每一个都是在 $L^2_{p(x)}$ 内处处稠密的.如果基本区间$[a,b]$的长度是 2π,则函数类 T 在 $L^2_{p(x)}$ 内也是处处稠密的.

证明 (1) 设 $f(x) \in L^2_{p(x)}$.取 $\varepsilon > 0$ 并选这样的 $\delta > 0$,使得包含在$[a,b]$中的任一个测度 $me < \delta$ 的可测集 e 都满足不等式

$$\int_e p(x) f^2(x) \mathrm{d}x < \varepsilon^2$$

由于积分的绝对连续性,选取这样的 δ 是可能的.

因为函数 $f(x)$ 几乎处处有限(不然的话,它便不可能属于 $L^2_{p(x)}$),我们便有

$$m \prod_{n=1}^{\infty} E(|f| > n) = 0 \tag{7}$$

在另一方面

$$E(|f| > 1) \supset E(|f| > 2) \supset \cdots \tag{8}$$

如所知,由式(7)与(8)便得

① 我们说定义在$[a,b]$上的函数 $f(x)$ 是阶梯函数,如果存在有限个点 $a = c_1 < c_2 < \cdots < c_s = b$,使得在开区间$(c_i, c_{i+1})$内这个函数是常数.

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f|>n)=0$$

这就是说，可以指出这样的 n 来，使得

$$mE(|f|>n)<\delta$$

固定这个 n，并令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), 若\ |f(x)|\leqslant n \\ 0, 若\ |f(x)|>n \end{cases}$$

显然，$g(x)\in M$，并且

$$\|f-g\|^2=\int_a^b p(f-g)^2\mathrm{d}x=\int_{E(f\neq g)} p(f-g)^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E(|f|>n)} pf^2\mathrm{d}x<\varepsilon^2$$

于是，定理对于 M 便证明了.

(2) 设 $f(x)\in L^2_{p(x)}$ 且 $\varepsilon>0$. 我们求出 M 中这样的 $g(x)$，使得 $\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 设 $|g(x)|\leqslant K$，根据熟知的鲁金（Лузин）定理，存在这样的连续函数 $\varphi_\delta(x)$，使得

$$mE(g\neq\varphi_\delta)<\delta,\ |\varphi_\delta(x)|\leqslant K$$

其中的 δ 是预先任意给定的正数. 对于这个函数，有

$$\|g-\varphi_\delta\|^2=\int_{E(g\neq\varphi_\delta)} p(g-\varphi_\delta)^2\mathrm{d}x\leqslant 4K^2\int_{E(g\neq\varphi_\delta)} p(x)\mathrm{d}x$$

但是，由于积分的绝对连续性，δ 这个数可以认为如此之小，使得最后一个不等式的右端小于$\frac{\varepsilon^2}{4}$. 因此，对于所求得的 $\varphi_\delta(x)$ 有

$$\|f-\varphi_\delta\|\leqslant\|f-g\|+\|g-\varphi_\delta\|<\varepsilon$$

这就对于函数类 C 证明了本定理.

(3) 设 $f(x)\in L^2_{p(x)}$，且 $\varepsilon>0$. 我们求出满足不等式 $\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}$ 的连续函数 $\varphi(x)$.

据康托（Cantor）定理，闭区间$[a,b]$ 可以用点

$$c_0=a<c_1<\cdots<c_n=b$$

分成这样的子区间$[c_i,c_{i+1}]$，使得在其中的每一个上，$\varphi(x)$ 的振幅都小于某一个预先取定的数 $\delta>0$. 引进函数 $h(x)$，令 $h(b)=\varphi(b)$，而在 $c_i\leqslant x<c_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 时 $h(x)=\varphi(c_i)$. 这是一个阶梯函数，它具有这样的性质：对于