Mathematical Modeling

数学建模

周 凯 邬学军 宋军全 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学建模

周　凯　邬学军　宋军全　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/周凯,邬学军,宋军全编著. —杭州:浙江大学出版社,2017.12
ISBN 978-7-308-17725-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①周… ②邬… ③宋… Ⅲ.①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第318529号

数学建模
周　凯　邬学军　宋军全　编著

责任编辑　徐素君
责任校对　陈静毅　郝　娇
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号　邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　16.75
字　　数　420千
版 印 次　2017年12月第1版　2017年12月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-17725-2
定　　价　48.00元

前　言

数学，作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和人们生活的实际需要、各种应用问题密切相关的。数学建模作为用数学方法解决实际问题的关键一步，自然有着与数学同样悠久的历史。两千多年前创立的欧几里德几何，17世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例。培根(F. Bacon)说过："数学是进入各个科学门户的钥匙，如果没有数学知识，就不可能知晓这个世界的一切。"数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，而且在于它应用的广泛性。控制论创立者维纳(N. Wiener)提出："数学的优势在于数学抽象能使我们的注意力不再局限于特定的情况，而是关注解决问题的思路、方法和抽象形式的表达，它的一个好处是数学的描述可以毫无偏差地从一个领域应用于另一个领域。"这就是数学的一个重要作用，使人们忽略细枝末节，提炼出最为关键的问题，然后概括成一个数学表达式——数学模型。不论是直接使用数学方法，还是与其他学科结合形成交叉学科在科技和生产领域解决实际问题，首先和关键的一步是建立研究对象的数学模型。

进入20世纪以来，随着电子计算机的出现与飞速发展，数学正以空前的广度和深度向一切领域渗透，数学建模也越来越受到人们的重视。近年来数学建模活动在国内各个高校内普遍开展，每年的全国大学生数学建模竞赛是这项活动的高潮。本书是为各类本专科院校开展数学建模活动和参加全国大学生数学建模竞赛的培训指导而编著的，是作者在使用多年的数学建模课程教学及竞赛培训的相关材料基础上结合最新的国内外竞赛题修订而成的。它对以往在全国大学生数学建模竞赛以及其他数学建模活动中出现过的几类主要数学模型进行了归纳总结。本书可以作为相关院校数学建模课程的教材或竞赛培训材料。

全书以数学建模所涉及的常用数学方法(类型)为主线进行编排，内容包括：

数学建模概述;数学建模方法示例;优化数学模型;图与网络数学模型;评价管理数学模型;预测分析数学模型;微分与差分方程数学模型;随机服务系统数学模型;统计分析数学模型;启发式算法简介。每一章讨论一种类型的模型,以应用为目的,不做过多的数学理论阐述,通过例子介绍如何使用该方法来解决实际问题。所用实例大部分来自于各种形式的数学建模竞赛,当然一篇完整的竞赛论文往往不仅仅只是一种数学方法的使用,所以在本书中一般只是给出该例子的解题思路及主要过程,它往往只是问题的部分解,一般只涉及与这一章的数学方法有关的内容。一篇优秀的竞赛论文往往是多种数学方法以及各种工具的综合运用,它是一个团队综合能力的具体展示。

希望通过本书的学习,能够帮助大家快速了解建立数学模型的过程;能够掌握一些基本的数学模型和建立数学模型的常用方法,以及运用数学建模的方法去解决现实生活中出现的一些简单的实际问题;能够对大家运用数学的能力有一个提升;当然也希望通过本书的学习,能够对组建培养优秀的大学生团队参加每年一次的全国大学生数学建模竞赛提供有益的帮助。

限于编者水平,不妥之处敬请指正。

本教材受到浙江工业大学重点教材建设项目资助。

编　者

2017年5月

于浙江工业大学理学院

目　　录

第一章　数学建模概述

近半个多世纪以来，随着计算机技术的迅速发展，数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用，而且以空前的广度和深度向经济、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域不断渗透，数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分。不论是用数学方法在科技和生产领域解决实际问题，还是与其他学科相结合形成交叉学科，首要的和关键的一步是建立研究对象的数学模型，并加以计算求解。在知识经济时代数学建模和计算机技术是必不可少的技术手段。

数学是研究现实与抽象世界中数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是与各种各样的应用问题紧密相关。数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，而且更在于它应用的广泛性。20 世纪以来，随着科学技术的迅速发展和计算机的日益普及，人们对解决各种问题的要求及精确度的提高，使数学的应用越来越广泛和深入，特别是在进入 21 世纪的知识经济时代，数学科学的地位发生了巨大的变化，它已经从经济和科技的后备走到了前沿。经济发展的全球化、计算机的迅猛发展、理论与方法的不断扩充使得数学已经成为当今高科技的一个重要组成部分，数学已经成为一种能够普遍实施的技术。培养学生应用数学的意识和能力已经成为数学教学的一个重要方面。

1.1　认识数学模型与数学建模

目前对数学模型还没有一个统一准确的定义，站在不同的角度便可以有一个不同的定义。简单地说：数学模型就是对实际问题的一种数学表述。具体一点说：数学模型就是对于一个特定的对象，为了一个特定目标（目的），根据其特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，而得到的一个数学结构。下面结合一个例子加以说明，嫦娥三号于 2013 年 12 月 2 日 1 时 30 分成功发射，12 月 6 日抵达月球轨道。嫦娥三号在高速飞行的情况下，要保证准确地在月球预定区域内实现软着陆，其关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。其着陆轨道设计的基本要求是：着陆准备轨道为近月点 15km，远月点 100km 的椭圆形轨道；着陆轨道为从近月点至着陆点，其软着陆过程共分为 6 个阶段，要求满足每个阶段在关键点所处的状态；尽量减少软着陆过程的燃料消耗。在现实世界中，科学家无法为嫦娥三号尝试多次试飞，对比各种软着陆策略的效果。在发射嫦娥三号前，科学家需要计算嫦娥三号的软着陆轨道以及最优控制策略。也就是说，为实现嫦娥三号软着陆的目的，根据卫星在太空中的受力分析规律，得到嫦娥三号的减速控制策略，此策略也就是

所谓的数学模型。

我们将数学模型理解为是一种将数学理论与实际实践相结合所产生的一种思想方法，是将实际生活中的切实问题，运用数学理论，构造算法加以解决的一种思想方法。数学模型课程中并没有太多(对本科生来说)新的数学内容，而是将个人以前学过的数学理论与方法加以分类总结，指导学生如何应用数学解决问题的一门课程。

数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段。数学建模就是用数学语言描述实际现象的过程。这里的实际现象既包含具体的自然现象比如自由落体现象，也包含抽象的现象比如顾客对某种商品的价值倾向等。这里的描述不但包括对外在形态、内在机制的描述，也包括预测、试验和解释实际现象等内容。

我们也可以这样直观地理解这个概念：数学建模是一个让纯粹数学家(指只懂数学而不太了解数学在实际中应用的数学家)变成物理学家、生物学家、经济学家、心理学家等的过程。数学模型一般是实际问题的一种数学简化。它常常是以某种意义上接近实际问题的抽象形式存在，但它和真实的事物有着本质的区别。要描述一个实际现象可以有很多种方式，比如录音、录像、比喻、传言等。为了使描述更具科学性、逻辑性、客观性和可重复性，人们采用一种普遍认为比较严格的语言来描述各种现象，这种语言就是数学。使用数学等语言描述的事物就称为数学模型。有时候，我们需要做一些实验，但这些实验往往是用抽象出来了的数学模型代替实际物体而进行的，实验本身也是实际操作的一种理论替代。

下面通过三个例子让大家明白什么是数学模型、什么是数学建模。

例 1.1　测量山高问题

小明站在一个小山上，想要测量这个山的高度。他站在山边，采取了最原始的方法：从小山向下丢一小石子，他于 5s 后听到了从小山下传来的回音。请各位尝试建立数学模型估计小山丘的高度。

解题思路

数学建模的初学者一看到这个问题也许会认为数学建模并不是一件困难的事情，因为很多学生在高中时就遇到过类似的问题。确实是这样！这是一个比较简单的实际问题(数学建模问题)，大家很容易得到如下结果：

$$H=\frac{1}{2}gt^2=0.5\times 9.8\times 5^2=122.5(\mathrm{m})$$

运用自由落体公式可以计算出山的高度。也许有人会提出疑问：上述运算是数学建模吗？如果是，这样数学建模不是很简单吗？

是的，我们可以认为这样的过程就是数学建模。上述建立的模型可以称为最理想的自由落体模型，因为这是在非常理想化状态下建立的模型，它没有考虑任何其他可能影响测量的因素。数学模型就是一个解决实际问题的方法，解决问题即可视为数学建模，解决问题时所用到的数学结构式即为数学模型。但是在此需要说明一点：数学建模问题与其他数学问题不同，数学建模问题的**结果本身没有对错之分，但有优劣之分**。建立模型解决问题也许不难，但需要所建立的数学模型有效地指导实际工作就比较困难。这正是数学建模的难点所在。下面继续通过这个例子来解释数学模型间的优劣之分。

虽然上述理想的自由落体模型可以计算出山的高度，但计算所得到的结果可能存在较大的误差。122.5m这个答案在中学考试中应该是一个标准答案，不会认为这个答案是错误的。但是，专业测量队在测量山高时绝对不会采用上述计算得到的结果。因为它可能存在较大的误差，所以它是不能被接受的。在研究这个问题时请不要忘记：现在我们研究的不再是一个抽象的理论问题而是具体的实际问题。所建立的数学模型或者结果应该能对实际工作有较强的指导意义，应该尽力使求得的答案贴近事实。

那么，在这个问题中我们还需要考虑哪些因素？例如人的反应时间，在现实中这是一个需要考虑的因素。通过查找资料（数学建模竞赛过程中允许查找相关资料来帮助求解。查阅资料在数学建模中极其重要，也是现代大学生必须具备的基本素质，http://iask.sina.com.cn/b/3352472.html），可以知道人的反应时间约为0.1s，那么计算式在结果上能够得到改善。

$$H=\frac{1}{2}gt^2=0.5\times9.8\times(5-0.1)^2=117.649(\mathrm{m})$$

通过上面的分析可以认为117.649m比122.5m更加接近实际情况。相比理想的自由落体模型，以上的数学建模过程可以称为修正的自由落体模型。就实际测量而言，修正的自由落体模型比理想的自由落体模型更加优秀，因为得到的结果更加接近实际。两种模型得到的答案也可以说都是正确的，两种答案都是基于不同的假设前提而得到。理想的自由落体模型假设不考虑人的反应时间，如果你作为专业测量队的队长，相信你也会选择修正自由落体模型，因为它得到的答案更加接近实际情况。

一个优秀的队伍往往能够做更多！在考虑人的反应时间这一因素后，还有没有其他因素需要考虑，例如空气阻力？如果从高达117.649m的山上丢下石子，能不考虑空气阻力吗？各位有了大学生的思维外，还有了大学生的手段——微积分。通过查阅相关资料，可以发现石头所受空气阻力和速度成正比，阻力系数与质量之比为0.2。由此我们又可以建立以下微分方程模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a=g-\dfrac{f}{m}=g-\dfrac{k}{m}v\\ v(0)=0\end{cases}$$

解微分方程得 $v(t)=\dfrac{(g\times m)}{k}(1-\mathrm{e}^{\frac{-k\times t}{m}})$

积分得 $H=\int_0^{4.5}v(t)\mathrm{d}t=87.05(\mathrm{m})$

可以发现，计算结果得到了很大的改善，理想的自由落体模型计算方法得到的山高122.5m的确存在着较大的误差。

如果用心，大家可以做得更好。在实际生活中，回音传播时间是另一个不可忽略的因素。因此我们在上述模型的基础上引入回音传播时间 t_2，对模型进行如下修改：

$$\begin{cases}H=\int_0^{t_1}v(t)\mathrm{d}t=340\times t_2\\ t_1+t_2=4.9\end{cases}\Rightarrow H=79.96(\mathrm{m})$$

在这个例题中，先后呈现了四种不同的解题方法，也可以说四种不同的数学模型。从理想的自由落体数学模型获得的122.5m到考虑人的反应、阻力、回音的数学模型获得的是

79.96m，可见理想模型的122.5m存在非常大误差，相对误差超过了50%。

希望大家能够通过这个例子体会到数学模型的真谛：能够解决问题的方法就是数学模型，其本身没有对错之分。以上四种模型计算得到的答案应该说都是正确的，但是却有优劣之分，问题在于思考的角度。它是一种新的思维方法，从上面的例子可以得到，数学模型往往是以下两个方面的权衡：

1. 数学建模是用以解决实际问题的，所建立的模型不能太理想、太简单，过于理想化的模型往往脱离实际情况，这就违背了建模的目的；

2. 数学建模必须是以能够求解为前提的，建立的模型一定要能够求出解，所建立的模型不能过于实际，过于实际的模型往往难以求解，因此做适当合理的简化假设是十分重要的。

很多刚开始接触学习数学模型的学生可能认为自己的数学能力不够好，因此容易产生打退堂鼓的念头。然而，他们不知道现在已经有很多应用软件可以帮助他们完成数学模型的计算任务。这样使得所有专业的学生可以站在同一起跑线学习数学模型。比如，如果自己不能求解上述微分方程，那么就交给软件去做吧。上述常微分方程，通过数学软件MATLAB的编程计算一点也不困难，仅仅一行代码即可得到答案。在数学建模竞赛过程中，大家可以借助一切手段(数学软件、图书资料等)得到你想要的结果。整体上来说，数学软件MATLAB是一个非常庞大的软件，要全部掌握是很困难的，而数学建模仅仅只用到其中的部分知识。基于MATLAB在数学建模中的应用，本书将结合例子做一些讲解。

例1.2　教室光照问题

现有一个教室长为15m，宽为12m，在距离地面高2.5m的位置均匀地安放4个光源，假设横向(纵向)墙壁与光源、光源与光源、光源与墙壁之间的距离相等，各个光源的光照强度均为一个单位。要求：

1. 如何计算教室内任意一点处距离地面1m处的光照强度？(光源对目标点的光照强度与该光源到目标点距离的平方成反比，与该光源的强度成正比)。

2. 画出距离地面1m处各个点的光照强度与位置(横纵坐标)之间的函数关系曲面图，同时给出一个近似的函数关系式。

解题思路

假设光源对目标点的光照强度与该光源到目标点距离的平方成反比，并且各个光源符合独立作用与叠加原理。光源在光源点的光照强度为“一个单位”，并且空间光反射情况可以忽略不计。

取地面所在的平面为xOy平面，x轴与教室的宽边平行，y轴与教室的长边平行，坐标原点在地面的中心，如图1-1所示。在空间中任意取一点i，它的坐标可以表示为(x_i, y_i, z_i)，那么空间点i的光照强度E_i应该满足以下公式：

$$E_i = \frac{1}{(x_i-2)^2+(y_i-2.5)^2+(z_i-2.5)^2} + \frac{1}{(x_i-2)^2+(y_i+2.5)^2+(z_i-2.5)^2} + \frac{1}{(x_i+2)^2+(y_i-2.5)^2+(z_i-2.5)^2} + \frac{1}{(x_i+2)^2+(y_i+2.5)^2+(z_i-2.5)^2}$$

将空间点 i 的纵坐标设定为 1，就可以计算距离地面高 1m 处各点的光照强度。在 MATLAB 计算中都是对离散点进行计算操作，因此将距离地面高 1m 处的 12m×15m 平面离散为网格，每隔 0.25m 取一个点，而点与点之间采用插值算法可以得到这个平面的光照强度，如图 1-2 所示。

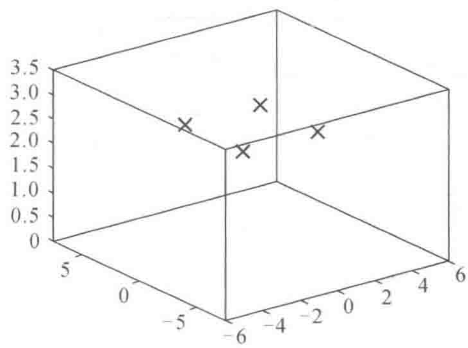

图 1-1　教室坐标示意图

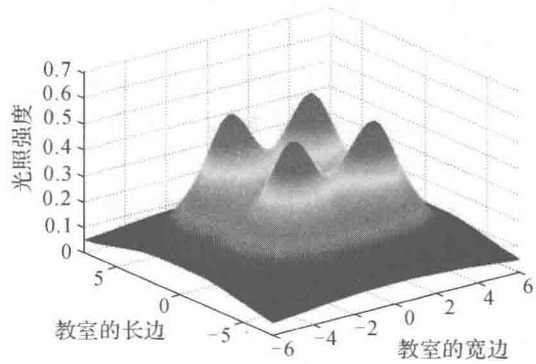

图 1-2　无反射情况下教室光照强度示意图

通过示意图可以发现，在这个距离地面为 1m 的平面中，四个灯下的光照强度最强。上述模型是建立在不考虑墙面反射基础上。那么，忽略反射的想法是否正确呢？考虑墙面反射对于平面各点光照强度会带来怎样的影响？为方便求解，首先假设墙面反射满足镜面反射原理，这也是最简单的假设。重新计算可以得到在距离地面为 1m 的平面中各点的光照强度如图 1-3 所示。对比有无一次镜面反射，平面光照强度的改善情况如图 1-4 所示。从图中可以发现：墙边附近的光照强度改善最大，墙角和墙边的改善最小。因为墙角和墙边的反射最少，这些都与实际情况符合。

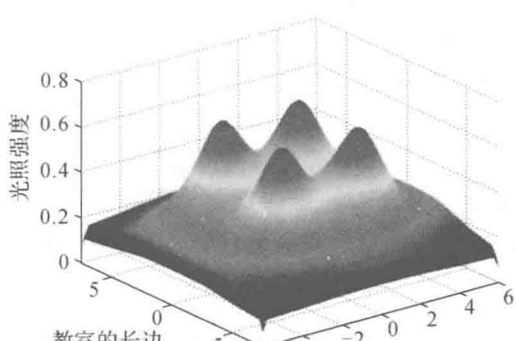

图 1-3　反射情况下教室光照强度示意图

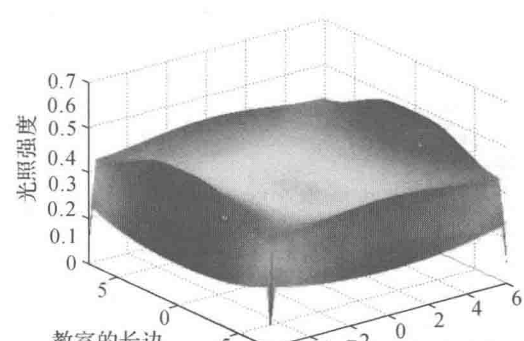

图 1-4　两种情况下教室光照强度对比示意图

图 1-4 显示，通过一次镜面反射光照强度最大可以提高 0.1 左右。那么如果考虑二次反射，二次反射所能增加的光照强度将更加小，可以忽略不计。需要注意的是：在实际生活中，墙面的反射并不是简单的镜面反射，光源也不是点光源，光照强度也并非简单叠加。这样建立的模型将更为复杂！

例 1.3　污染预测问题—CUMCM2005(部分)

长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。2004 年 10 月，由全国政协与中国发展研究院联合组成"保护长江万里行"考察团，从长江上游宜宾到下游上海，对沿线 21 个重点城市做了实地考察，揭示了一幅长江污染的真实画面，其污染程度让人触目惊心。假如不采取更有效的治理措施，依照过去 10 年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来 10 年的情况。表 1-1 为 1995—2004 年长江的排污量，根据以上数据，预测 2005—2014 年长江的排污量。

表 1-1　1995—2004 年长江排污量

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
排污量/亿吨	174	179	183	189	207	234	220.5	256	270	285

解题思路

如果能够找到一种合理的函数表达式来表示数据的增长趋势，函数的自变量为年份，因变量为预测量，就可完成预测工作。一旦找到了这样的函数，只需要将预测的年份代入函数表达式，就可以做预测。根据实际数据，运用最小二乘拟合方式，便可以确定函数的系数。预测过程如下所示：首先将 1995—2004 年的数据以散点图的方式表现出来，如图 1-5 所示，这样可以观察数据所蕴含的内在关系。通过观察，可以发现数据以类似二次函数形式增长。因此可以假定数据以二次函数形式增长，通过最小二乘拟合确定二次函数的系数(可用 MATLAB 来实现)，并预测 2005—2014 年的排污量数据，如图 1-6 所示。

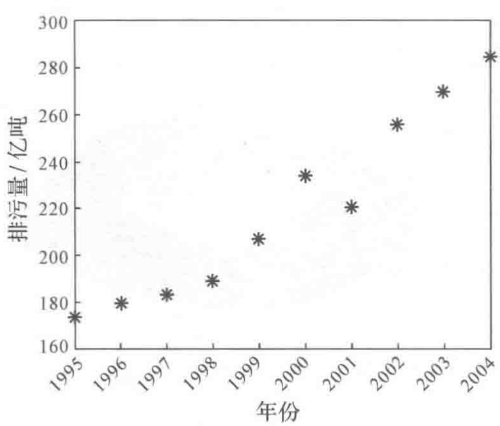

图 1-5　排污量趋势示意图

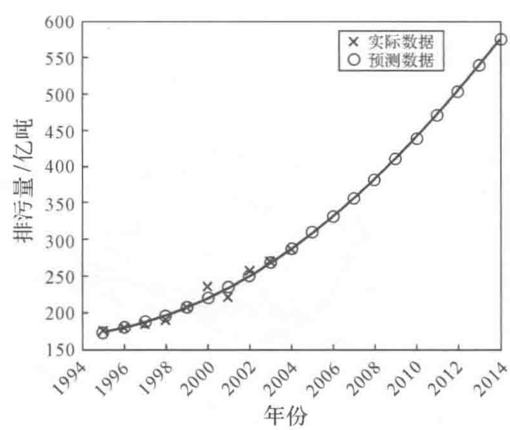

图 1-6　排污量预测示意图

通过 MATLAB 程序可以寻找出与实际数据最贴近的二次函数表达式为：

$$P=0.84\times Year^2-3300\times Year+3300000$$

通过图 1-6 可以发现拟合效果还是比较好的，通过代入 2005—2014，就可以得到那些年份的排污量数据如表 1-2 所示。

表 1-2　2005—2014 年排污量预测结果

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
排污量/亿吨	309	332	356	383	410	440	471	504	539	575

以上三题虽然涉及的内容各不相同,但是作为数学建模问题有着以下的共同之处:

1. 都是通过建立数学模型解决实际问题,可以看出数学模型不是特指哪一块数学知识内容,而是指一种解决问题的思想。数学模型的很多内容对大家来说并不是全新的,本书的目的就在于帮助大家整理所学的数学知识,用所学的知识解决实际问题。

2. 数学模型本身没有对错,只是在方法、结果上有优劣之分。解决一个实际问题的方法也许有很多,所建立的数学模型也会有很多,但是大家要学会分析和思考。

通过以上三个例子的简单介绍,希望大家能够初步明白什么是数学模型、对数学建模的过程有一个大致的了解。下面我们将比较系统地介绍数学建模的一般步骤,知道如何建立数学模型。

1.2　数学模型的分类以及建立模型的一般步骤

总结数学模型的分类以及建立数学模型的一般步骤对于初学者而言是非常重要的。虽然数学模型多种多样,但是其中有着内在的相似之处。经常总结经验有助于初学者尽快掌握各类模型,适应不同的数学建模问题。

数学模型可以按照不同方式来分类。比如,按照模型的应用领域可以分为数量经济模型、医学模型、地质模型、社会模型等;更具体的有人口模型、交通模型、生态模型等;按照建立模型的数学方法可以分为几何模型、微分方程模型、图论模型等。数学建模的初衷是洞察源于数学之外的事物或系统;通过选择数学系统,建立原系统的各部分与描述其行为的数学部分之间的对应,达到发现事物运行的基本过程的目的。因此,人们通常也用如下的方法分类:

观察模型与决策模型　基于对问题状态的观察、研究,所提出的数学模型可能有几种不同的数学结构。例如,决策模型是针对一些特定目标而设计的。典型的情况是:某个实际问题需要做出某种决策或采取某种行动以达到某种目的。决策模型常常是为了使技术的发展达到顶峰而设计的,它包括算法和由计算机完成的特定问题解的模拟。例如,一般的马尔可夫链模型是观察模型,而动态规划模型是决策模型。

确定性模型和随机性模型　确定性模型建立在如下假设的基础上:即如果在时间的某个瞬间或整个过程的某个时段有充分的确定信息,则系统的特征就能准确的预测,如 2016 年全国大学生数学建模竞赛的系泊系统设计问题。确定性模型常常用于物理和工程之中,微分方程模型就是常见的确定性模型。随机性模型是在概率意义上描述系统的行为,它广泛应用于社会科学和生命科学中出现的问题,如 2009 年全国大学生数学建模竞赛的眼科病床的合理安排问题。

连续模型和离散模型　有些问题可用连续变量描述,比如 2014 年全国大学生数学建模

竞赛的“嫦娥三号”软着陆轨道设计与控制策略；有些问题适合离散量描述，比如2013年全国大学生数学建模竞赛的碎纸片拼接复原问题。有些问题由连续性变量描述更接近实际，但也允许离散化处理。

解析模型和仿真模型 建立的数学模型可直接用解析式表示，结果可能是特定问题的解析解，或得到的算法是解析形式的，通常可以认为是解析模型，如2014年全国大学生数学建模竞赛的创意折叠桌椅问题。而实际问题的复杂性经常使目前的解析法满足不了实际问题的要求或无法直接求解。因此，很多实际问题需要进行仿真，如2015年全国大学生数学建模竞赛的太阳影子定位问题。仿真模型可以对原问题进行直接或间接的仿真。

在现实生活工作中所面临的问题纷繁复杂，如果需要借助数学模型来求解，往往不可能孤立地使用一种方法。需要根据对研究对象的了解程度和建模目的来决定采用什么数学工具。一般来说，建模的方法可以分为**机理分析法、数据分析法和类比仿真法等**。

机理分析是根据对现实对象特征的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律。用这种方法建立起来的模型，常有明确的物理或现实意义。各个“量”之间的关系可以用几个函数、几个方程(或不等式)乃至一张图等数学工具明确地表示出来。在内部机理无法直接寻求时，可以尝试采用数据分析的方法。首先测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型。这种方法也可称为系统辨识。有时还要将这两种方法结合起来运用，即用机理分析建立模型的结构，用系统辨识来确定模型的参数。类比则是在两类不同的事物之间进行对比，找出若干相同或相似之处，推测在其他方面也可能存在相同或相似之处的一种思维模式，这样便可借用其他一些已有的模型，推测现实问题应该或可能的模型结构。仿真(也称为模拟)是以类比为逻辑基础，用计算机模仿实际系统的运行过程。在整个运行时间内，对系统状态的变化进行观察和统计，从而得到系统基本性能的估计或认识。但是，仿真法一般不能得到解析的结果。

建立数学模型没有固定的模式，通常它与实际问题的性质、建模的目的等有关。当然，建模的过程也有其共性，一般来说大致可以分为以下几个步骤：

形成问题 要建立现实问题的数学模型，首先要对所要解决的问题有一个十分明确的提法。只有明确问题的背景，尽量清楚对象的特征，掌握有关的数据，确切地了解建立数学模型要达到的目的，才能形成一个比较明晰的“问题”。

假设和简化 根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要地、合理地假设和简化。如前所述，现实问题通常是纷繁复杂的，必须紧抓本质的因素(起支配作用的因素)，忽略次要的因素。此外，一个现实问题不经过假设和化简，很难归结成数学问题。因此，有必要对现实问题做一些简化，有时甚至是理想化的简化假设。

模型构建 根据所做的假设，分析对象的因果关系，用适当的数学语言刻画对象的内在规律，构建现实问题中各个变量之间的数学结构，得到相应的数学模型。这里，有一个应遵循的原则，即尽量采用简单的数学工具。

检验和评价 数学模型能否反映原来的现实问题，必须经受多种途径的检验。这里包括数学结构的正确性，即没有逻辑上自相矛盾的地方；适合求解，即是否会有多解或无解的情况出现；数学方法的可行性，迭代方法收敛性以及算法的复杂性等。而最重要和最困难的问题是检验模型是否真正反映原来的现实问题。模型必须反映实际，但又不等同于现实；模

型必须简化，但过分的简化则使模型远离现实，无法解决现实问题。因此，检验模型的合理性和适用性，对于建模的成败非常重要。评价模型的根本标准是看它能否准确地解决现实问题。此外，是否容易求解也是评价模型的一个重要标准。

模型的改进　模型在不断的检验过程中进行修正，逐步趋向完善，这是建模必须遵循的重要规律。一旦在检验过程中发现问题，人们必须重新审视在建模时所做的假设和简化的合理性，检查是否正确刻画对象内在量之间的相互关系和服从的客观规律。针对发现的问题做出相应的修正。然后，再次重复建模、计算、检验、修改等过程，直到获得某种程度的满意模型为止。

模型的求解　经过检验，能比较好地反映现实问题的数学模型，最后通过求解得到数学上的结果；再通过"翻译"回到现实问题，得到相应的结论。模型若能获得解的确切表达式固然最好，但现实中多数场合需依靠计算机数值求解。正是由于计算技术的飞速发展，使得数学建模现在变得越来越重要。

应用数学去解决各类实际问题时，建立数学模型是十分关键的一步，同时也是十分困难的一步。建立数学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程。要通过调查、收集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题。这就需要深厚扎实的数学基础，敏锐的洞察力和想象力，对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。数学建模是联系数学与实际问题的桥梁，是数学在各个领域广泛应用的媒介，是数学科学技术转化的主要途径，数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。

为了适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次科技人才，数学建模已经在大学教育中普遍开展，国内外越来越多的大学正在进行数学建模课程的教学和参加开放性的数学建模竞赛，将数学建模教学和竞赛作为高等院校的教学改革和培养高层次科技人才的一个重要内容。现在许多院校正在将数学建模与教学改革相结合，努力探索更有效的数学建模教学法和培养面向21世纪人才的新思路。与我国高校的其他数学类课程相比，数学建模具有难度大、涉及面广、形式灵活、对教师和学生要求高等特点，数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程。为了改变过去以教师为中心、以课堂讲授、知识传授为主的传统教学模式，数学建模课程指导思想是：以实验室为基础、学生为中心、问题为主线；以培养能力为目标来组织教学工作。通过教学使学生了解利用数学理论和方法去分析和解决问题的全过程，提高他们分析问题和解决问题的能力；提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力，使他们在以后的工作中能经常性地使用数学去解决问题，提高他们尽量利用计算机软件及当代高新科技成果的意识，能将数学、计算机有机地结合起来去解决实际问题。数学建模以学生为主，教师利用一些事先设计好的问题启发、引导学生主动查阅文献资料和学习新知识，鼓励学生积极开展讨论和辩论，培养学生主动探索、努力进取的学风，培养学生从事科研工作的初步能力，培养学生团结协作的精神，形成一个生动活泼的环境和气氛。教学过程的重点是创造一个环境去诱导学生的学习欲望，培养他们的自学能力，增强他们的数学素质和创新能力，教学过程强调的是获取新知识的能力，是解决问题的过程，而不是求得某个具体问题的结果。

接受参加数学建模竞赛赛前培训的同学大都需要学习诸如数理统计、最优化、图论、微

分方程、计算方法、神经网络、层次分析法、模糊数学，以及数学软件包的使用等“短课程（或讲座）”，用的学时不多，多数是启发性的讲一些基本的概念和方法，主要是靠同学们自己去学，充分调动同学们的积极性，充分发挥同学们的潜能。培训中广泛地采用讨论班方式，同学自己报告、讨论、辩论，教师主要起质疑、答疑、辅导的作用，竞赛中一定要使用计算机及相应的软件，如 SPSS，LINGO，Maple，Mathematica，MATLAB 甚至排版软件等。

1.3 走入数学建模竞赛的世界

为了选拔人才（实际上是更好地培养人才），组织竞赛是一种行之有效的方法。1985 年在美国出现了一种叫作 MCM 的一年一度的大学生数学建模竞赛（1987 年前全称是 Mathematical Competition in Modeling，1988 年全称改为 Mathematical Contest in Modeling，其缩写均为 MCM）。

在 1985 年以前，美国只有一种大学生数学竞赛（The William Lowell Putnam Mathematical Competition，简称 Putnam（普特南）数学竞赛），它是由美国数学协会（Mathematical Association of America，MAA）主持，于每年 12 月的第一个星期六分两试进行，每试 6 题，每试各为 3 小时。近年来，在次年的美国数学月刊（*The American Mathematical Monthly*）上刊出竞赛小结、奖励名单、试题及部分题解。这是一个历史悠久、影响很大的全美大学生数学竞赛。自 1938 年举行第一届竞赛以来已近 78 届了，主要考核基础知识和训练逻辑推理及证明能力、思维敏捷度、计算能力等。试题中很少有应用题，完全不能用计算机，是闭卷考试，竞赛是由各大学组队自愿报名参加。普特南数学竞赛在吸引青年人热爱数学从而走上数学研究的道路、鼓励各数学系更好地培养人才方面起了很大作用，事实上有很多优秀的数学家就曾经是它的获奖者。

有人认为应用数学、计算数学、统计数学和纯粹数学一样是数学研究和数学课程教学的重要组成部分，它们是一个有机的整体。有人形象地把这四者比喻为一四面体的四个顶点，棱和面表示学科的“内在联系”，例如应用线性代数、数值分析、运筹学等，而该四面体即数学的整体。因此，在美国自 1983 年就有人提出了应该有一个普特南应用数学竞赛，经过论证、讨论、争取资助的过程，终于在 1985 年开始了第一届大学生数学建模竞赛。

MCM 的宗旨是鼓励大学生对范围并不固定的各种实际问题予以阐明、分析并提出解法，通过这样一种结构鼓励师生积极参与并强调实现完整模型的过程。每个参赛队有一名指导教师，他在比赛开始前负责队员的训练和战术指导；并接收考题，竞赛由学生自行参加，指导教师不得参与。比赛于每年 2 月或 3 月的某个周末进行。从 2015 年开始，每次给出三个问题（一般是连续、离散、数据挖掘各一题），每队只需任选一题。赛题是由在工业和政府部门工作的数学家提出建议，由命题组成员选择的没有固定范围的实际问题。

美国大学生数学建模竞赛（MCM/ICM），是一项国际级的竞赛项目，为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。MCM/ICM 是 Mathematical Contest in Modeling 和 Interdisciplinary Contest in Modeling 的缩写，即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”。MCM 始于 1985 年，ICM 始于 2000 年，由 COMAP（the Consortium for Mathematics and its Application，美