



郑州大学研究生精品文库

本项目由“一省一校”研究生课程建设专项资金资助

群论基础

QUNLUN JICHU

曹义刚 易 峰 编著



郑州大学出版社



郑州大学



本项目由“一省一校”研究生课程建设专项资金资助

群论基础

QUNLUN JICHU

曹义刚 易 峰 编著

于数学，从此群论在理工科数学的舞台上

现阶段，群论已经在几乎所有的物理学领域都得到了广泛的应用。从固体物理、凝聚态物理、原子分子物理、核物理和粒子物理以及统计物理，到化学和生命科学等领域也有着很多应用。因此，群论现在已经成为物理学工作者必不可少的一个数学工具。

本书是作者在多年来为郑州大学物理学专业研究生开设的“物理学中的群论”的基础上修改而成，是为物理学不同专业初学者编订的一部简明的群论入门教材。全书共分7章，内容安排如下：第1章介绍群的基本概念；第2章介绍群的表示；第3章是反交换空间群的介绍；第4章介绍转动群；第5章讨论置换群及其表示；第6章、第7章分别是李群和李代数的讨论。

目前，群论教材很多，然而，群论知识的应用举例却不多。本书去掉了一般对物理专业学生来说不太必要的证明，而用一些通俗易懂的例子来帮助读者理解。

助
明



郑州大学出版社

郑州



图书在版编目(CIP)数据

群论基础/曹义刚,易峰编著.—郑州:郑州大学出版社,2016.12
ISBN 978-7-5645-3127-0

I. ①群… II. ①曹… III. ①群论-研究 IV. ①0152

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 138436 号

群论基础

著者：曹义刚 易峰

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

出版人：张功员

全国新华书店经销

郑州市金汇彩印有限公司印制

开本：787 mm×1 092 mm 1/16

印张：6.25

字数：150 千字

版次：2016 年 12 月第 1 版

邮政编码：450052

发行部电话：0371-66966070

印次：2016 年 12 月第 1 次印刷

书号：ISBN 978-7-5645-3127-0

定价：29.00 元

本书如有印装质量问题，由本社负责调换

序言

群论是数学的一个分支,也是用来描述物理世界对称性非常有用的工具。群论的概念主要来自三部分,即19世纪开始的非欧几里得几何、数论以及18世纪末开始的代数方程。

几何学的研究从古希腊的欧几里得几何开始,19世纪后逐渐与直接度量分离,开始了非欧几里得几何研究,从而使得人们开始注意到几何的抽象性质。但当时还完全没有群的概念。直到19世纪末,群的概念才正式建立并与数学建立了联系,从此群论走上了数学的舞台。

现阶段,群论已经在几乎所有的物理学领域都得到了广泛应用,如固体物理、凝聚态物理、原子分子物理、核物理和粒子物理以及统计物理,并在化学和生命科学等领域也有很多应用。因此,群论现在已经成为物理学工作者必不可少的一个数学工具。

本书是作者在多年来为郑州大学物理学专业研究生开设的“物理学中的群论”的基础上修改而成,是为物理学不同专业初学者编订的一部简明的群论入门教材。全书共分7章,内容安排如下:第1章介绍群的基本概念;第2章介绍群的表示;第3章是点群和空间群的介绍;第4章介绍转动群;第5章讨论置换群及其表示;第6章、第7章分别是李群和李代数的讨论。

目前,群论教材很多,然而,群论知识的应用举例却不多。本书去掉了一些对物理学专业初学者而言不必要的证明,增加了一些群知识应用的具体例子,有助于初学者对群论知识的理解和掌握。另外,本书对每一部分知识内容层次分明地展开论述,便于读者有一个统一的概念和认识。

本书难免有不少不妥和错误之处,恳请读者提出宝贵意见。

编者

2015年9月

| | |
|---------------|----|
| 2.1.2 群的线性表示 | 16 |
| 2.1.3 群表示举例 | 16 |
| 2.2 群表示之间的关系 | 16 |
| 2.2.1 等价表示 | 16 |
| 2.2.2 可约表示 | 16 |
| 2.2.3 不可约表示 | 17 |
| 2.2.4 自正(酉)表示 | 17 |

目 录

| | | |
|---------------------------|-------|-------|
| 第4章 群论基础 | 提升题 | 1.1 |
| 4.1.1 用欧拉角表示的SO(3)群元的一般形式 | 提升题 | 1.4.5 |
| 4.1.2 SO(3)与SU(2)的关系 | 示意图 | 1.5.4 |
| 4.2 从SU(2)到SO(3) | 示意图 | 1.5.5 |
| 4.3 SU(2)的不可约表示 | 示意图 | 1.5.6 |
| 4.4 SO(3)的不可约表示 | 墨化示意图 | 1.5.7 |
| 4.5 SO(3)和SU(2)表示之间的关系 | 示意图 | 1.5.8 |
| 4.6 不可约表示的不可约表示 | 示意图 | 1.5.9 |

第1章 群论基础 1

| |
|----------------------|
| 1.1 群 1 |
| 1.1.1 群的定义 1 |
| 1.1.2 群举例 2 |
| 1.1.3 重排定理 3 |
| 1.2 群结构 4 |
| 1.2.1 子群 4 |
| 1.2.2 陪集(旁集) 5 |
| 1.2.3 类和不变子群 6 |
| 1.2.4 商群 7 |
| 1.3 群之间关系 7 |
| 1.3.1 同构 7 |
| 1.3.2 同态 8 |
| 1.4 群的合成 9 |
| 1.4.1 直积 9 |
| 1.4.2 半直积 9 |

第2章 群表示基础 11

| |
|------------------------|
| 2.1 群表示 11 |
| 2.1.1 线性变换 11 |
| 2.1.2 群的线性表示 12 |
| 2.1.3 群表示举例 13 |
| 2.2 群表示之间关系 16 |
| 2.2.1 等价表示 16 |
| 2.2.2 可约表示 16 |
| 2.2.3 不可约表示 17 |
| 2.2.4 么正(酉)表示 17 |

| | |
|---------------------------------------|----|
| 2.3 群代数 | 18 |
| 2.3.1 线性代数 | 18 |
| 2.3.2 群代数 | 19 |
| 2.4 正则表示 | 19 |
| 2.4.1 左正则表示 | 19 |
| 2.4.2 右正则表示 | 21 |
| 2.5 有限群表示理论 | 21 |
| 2.5.1 舒尔引理 | 21 |
| 2.5.2 有限群表示理论 | 21 |
| 2.6 群表示的特征标理论 | 23 |
| 2.6.1 特征标 | 23 |
| 2.6.2 特征标理论 | 23 |
| 2.7 新表示的构成 | 25 |
| 2.7.1 群表示的直积 | 25 |
| 2.7.2 直积群和它的不等价不可约表示的构成 | 26 |
| 第3章 点群 | 27 |
| 3.1 空间操作类型 | 27 |
| 3.1.1 保持三维实空间 R^3 中向量长度不变的空间变换的一般形式 | 27 |
| 3.1.2 三维实正交群 | 27 |
| 3.1.3 空间操作的基本类型 | 28 |
| 3.2 对称操作 | 29 |
| 3.2.1 对称操作的定义 | 29 |
| 3.2.2 对称操作的性质 | 29 |
| 3.2.3 对称操作的分类 | 30 |
| 3.3 点群 | 31 |
| 3.3.1 点群的定义 | 31 |
| 3.3.2 点群的分类 | 31 |
| 3.4 晶体点群 | 37 |
| 3.4.1 晶体制约定理 | 37 |
| 3.4.2 晶体点群的种类 | 37 |
| 3.4.3 晶系 | 38 |
| 3.4.4 晶体点群的符号表示 | 38 |
| 3.5 点群的不可约表示 | 39 |
| 3.5.1 C_1, C_2, C_3, C_4, C_6 的群表示 | 39 |
| 3.5.2 D_2, D_3, D_4, D_6 的表示 | 40 |
| 3.5.3 四面体群 T 和八面体群 O 的表示 | 42 |

| | |
|---------------------------------|----|
| 第4章 转动群 | 44 |
| 4.1 用欧拉角表示的 $SO(3)$ 群元的一般形式 | 44 |
| 4.2 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的关系 | 46 |
| 4.2.1 $SU(2)$ | 46 |
| 4.2.2 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的同态关系 | 46 |
| 4.3 $SU(2)$ 的不可约表示 | 48 |
| 4.4 $SO(3)$ 的不可约表示 | 49 |
| 4.4.1 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 表示之间的关系 | 49 |
| 4.4.2 $SO(3)$ 的不可约表示 | 50 |
| 4.5 $su(2)$ 李代数 | 51 |
| 4.6 $so(3)$ 李代数 | 52 |
| 4.7 $su(2)$ 与 $so(3)$ 的关系 | 53 |
| 4.7.1 李代数 $su(2)$ 与 $so(3)$ 的同构 | 53 |
| 4.7.2 D^i 的函数性质 | 54 |
| 4.8 $SO(3)$ 群表示的直积及 C-G 系数 | 55 |
| 4.8.1 $SO(3)$ 群表示的直积 | 55 |
| 4.8.2 C-G 系数 | 55 |
| 第5章 置换群 | 56 |
| 5.1 置换群 | 56 |
| 5.1.1 置换的定义 | 56 |
| 5.1.2 置换的性质 | 56 |
| 5.2 杨图 | 58 |
| 5.3 投影算子 | 59 |
| 5.3.1 投影算子的定义 | 59 |
| 5.3.2 投影算子的性质 | 59 |
| 5.4 幂等元 | 60 |
| 5.4.1 幂等元的定义 | 60 |
| 5.4.2 幂等元与投影符之间的关系 | 60 |
| 5.5 杨盘 | 61 |
| 5.6 杨算子 | 62 |
| 5.7 S_n 群的不可约表示 | 63 |
| 第6章 李群基础 | 67 |
| 6.1 李群 | 67 |
| 6.1.1 李群的定义 | 67 |

| | |
|-----------------------|-----------|
| 6.1.2 李群举例 | 68 |
| 6.2 无穷小生成元 | 71 |
| 6.2.1 无穷小生成元的定义 | 71 |
| 6.2.2 李群群元与无穷小生成元之间关系 | 72 |
| 6.3 李群的张量表示 | 79 |
| 第7章 李代数基础 | 81 |
| 7.1 李代数 | 81 |
| 7.1.1 李代数的定义 | 81 |
| 7.1.2 李代数的结构 | 81 |
| 7.1.3 几种李代数 | 82 |
| 7.2 伴随表示 | 84 |
| 7.3 基林形式 | 84 |
| 7.4 单根和邓金图 | 85 |
| 7.5 权与李代数的表示 | 87 |
| 7.6 卡西米尔算子 | 88 |
| 参考文献 | 90 |

在数学中，群论是研究对称性的数学分支。它由匈牙利数学家波利亚、勒雷夫（L. Rédei）和苏黎世数学家赫尔曼·扎恩（Hermann Zassenhaus）于1937年创立。

排列 σ 表示把 1 映射为 $\sigma(1)$, 2 映射为 $\sigma(2)$, ..., n 映射为 $\sigma(n)$ 。一个元素 σ 相当于一个置换，他由一个 $n \times n$ 的矩阵表示，其中 $\sigma_{ij} = 1$ 表示 i 映射到 j ， $\sigma_{ij} = 0$ 表示 i 不映射到 j 。

如 $\sigma = (1\ 2\ 3)$ 表示 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ ，即 $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$ 。若 σ_1, σ_2 是两个置换，则 $\sigma_1 \circ \sigma_2$ 表示先做 σ_1 ，再做 σ_2 ，即 $\sigma_1 \circ \sigma_2 = (\sigma_1 \sigma_2)(1\ 2\ 3)$ 。

若 σ 是一个置换，则 σ^k 表示 σ 重复 k 次，即 $\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ 。

若 σ 是一个置换，则 σ^{-1} 表示 σ 的逆置换，即 $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$ 。

若 σ 是一个置换，则 $\sigma^0 = 1$ ，即单位元。

第1章 群论基础

1.1 群

1.1.1 群的定义

设 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ，定义一种运算“乘法”且满足

(1) 封闭性: $\forall g_i, g_j \in G, g_i g_j = g_k \in G$;

(2) 结合性: $\forall f, g, h \in G, (fg)h = f(gh)$;

(3) 存在唯一的单位元素: 即 \exists 唯一 $e \in G, \forall g \in G, eg = ge = g$;

(4) 存在逆元: 即 $\forall f \in G, \exists$ 唯一的逆元 $f^{-1} \in G$, 使 $f^{-1}f = ff^{-1} = e$. 则称 G 为一个群.

根据上述群的定义, 可以看出群具有以下几个特点:

(1) 可包含性. 群是个整体概念, 包含集合里的所有元素, 缺一不可.

(2) 一般情况下, 满足 $fg \neq gf$ 的群, 称为非阿贝尔群; 满足 $fg = gf$ 的群, 称为阿贝尔群.

(3) 群的乘法表. 一般讲, 群都可以用一个表格的形式表示, 叫群的乘法表. 乘法表中, 每一行或每一列中每个群元出现而且仅仅出现一次. 如 $D_3 = \{e, d, f, a, b, c\}$ 群的乘法表如下:

| | e | d | f | a | b | c |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| e | e | d | f | a | b | c |
| d | d | f | e | c | a | b |
| f | f | e | d | b | c | a |
| a | a | b | c | e | d | f |
| b | b | c | a | f | e | d |
| c | c | a | b | d | f | e |

(4) 有限群. 群元的个数有限的群, 称为有限群, 像点群、置换群等.

2 群论基础

(5) 无限群. 群元的个数无限的群, 称为无限群, 像转动群.

(6) 群的阶. 有限群的阶指群元的个数.

(7) 群的标记, 即用参数表示. 任何群元都可用 g_α 唯一标记, 这里 α 为参数. n 阶有限群 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 中, α 和群元 g_α 是一一对应的, 即 $\alpha \neq \alpha'$, 则 $g_\alpha \neq g'_{\alpha'}$.

(8) 分立群. 由分立群元构成的群.

(9) 连续群. 群元是连续的. 如: 绕一固定轴的转运群 $\{C_{k(\psi)}\}$, 群元 $C_{k(\psi)}$ 表示绕固定转动轴 k 转 ψ 角度的操作, 参数 ψ 的变化范围为 $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

1.1.2 群举例

1.1.2.1 实数加群

定义群的乘法为实数的加法, 则全体实数在加法运算下构成一个群, 单位元 0, 因为 $a + 0 = 0 + a = a$, a 的逆元为 $-a$, 因为 $a + (-a) = (-a) + a = 0$. 但实数全体在乘法为数乘时, 并不构成一个群, 因为 0 没有逆元, 除 0 外构成一个群, 单位元 1, a 的逆元为 $\frac{1}{a}$. $\{1\}$ 是一阶群; $\{1, -1\}$ 是二阶群; $\{1, i, -i, -1\}$ 是四阶群.

1.1.2.2 空间反演群

$E\mathbf{r} = \mathbf{r}$, $I\mathbf{r} = -\mathbf{r}$, 定义群的乘法为从右到左连续对 \mathbf{r} 作用, $EI\mathbf{r} = E(-\mathbf{r}) = -\mathbf{r}$, $\{E, I\}$ 构成反演群. 乘法表如下:

| | | E | I |
|-----|-----|-----|-----|
| E | E | I | |
| I | I | E | |

1.1.2.3 矩阵群

定义群的乘法为矩阵乘法, 所有非奇异的同阶矩阵构成一个群. 单位元为单位矩阵, 逆元为矩阵的逆.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 构成一个二阶群; $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 构成一个八阶群. $M_1^{-1} = M_1$, $M_2^{-1} = M_2$, $M_3^{-1} = M_3$, $M_4^{-1} = M_4$, $M_5^{-1} = M_6$, $M_6^{-1} = M_5$, $M_7^{-1} = M_7$, $M_8^{-1} = M_8$.

1.1.2.4 置换群

定义置换操作 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$, 其中 m_1, m_2, \dots, m_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的任意

排列. P 表示把 1 映射为 m_1 , 2 映射为 m_2 , \dots , n 映射为 m_n . 如: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

置换群(S_n 群)为 n 个客体的所有可能的置换操作, 阶数为

$n!$. 如 S_3 群包括如下 6 个群元: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.2.5 平面正三角形对称群 D_3 (六阶二面体群)

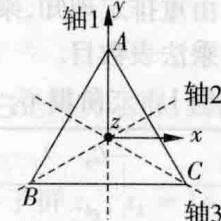


图 1-1

群的乘法为保持正三角形不变的空间转动操作, 如图 1-1.

e : 不动, d : 绕 z 轴转 $\frac{2\pi}{3}$, f : 绕 z 轴转 $\frac{4\pi}{3}$, a : 绕轴 1 转 π , b : 绕轴 2

转 π , c : 绕轴 3 转 π .

对有限群, 群元数目有限, 有可能把元素的乘积全部排列出来, 构成一个表, 即乘法表. D_3 群的乘法表已在 1.1.1 中给出.

1.1.2.6 三维特殊转动群 $SO(3)$

群的乘法定义为保持 R^3 中 O 点不动的转动. 绕所有过 O 点轴的一切转动操作构成 $SO(3)$ 群. 设 k 是任一轴, 绕 k 轴转 Ψ 角的转动为 $C_k(\Psi)$. 定义 $C_{k'}(\Psi')$ $C_k(\Psi)$ 为先实行绕 k 轴转 Ψ 角, 再实行绕 k' 轴转 Ψ' 角. 单位元素是转角 $\Psi=0$, 即不动. 绕同一轴 k 轴转 Ψ 和 $2\pi - \Psi$ 的元素 $C_k(\Psi)$, $C_k(2\pi - \Psi)$ 互为逆元素.

群的乘法可以是数乘和数的加法, 也可以是空间反演, 转动等连续两次操作和连续两次置换等. 有限群的乘法规则, 可以列为乘法表; 无限群不能列出乘法表, 但乘法规则是确定的.

1.1.3 重排定理

1.1.3.1 证明

设 $G = \{g_\alpha\}$, $u \in G$, 当 α 取遍所有可能值时, 乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 中所有元素, 即 $\{ug_\alpha\}$.

证明:

(1) 先证任一群元 g_β 可表示成 ug_α .

$$\because u^{-1} \in G, \exists u^{-1} g_\beta = g_\alpha \in G$$

$$\therefore g_\beta = ug_\alpha$$

(2) 再证当 α 不同时, 不同的 ug_α 给出 G 中不同的元素, 即 $\alpha \neq \alpha', ug_\alpha \neq ug_{\alpha'}$.

反证法: 若 $\alpha \neq \alpha', ug_\alpha = ug_{\alpha'}$

$$\therefore u^{-1} ug_\alpha = u^{-1} ug_{\alpha'}$$

$$\therefore g_\alpha = g_{\alpha'}$$

这与 g_α 与 α 唯一对应相矛盾

$$\therefore \alpha \neq \alpha', ug_\alpha \neq ug_{\alpha'}$$

1.1.3.2 推论

在 α 取遍所有可能值时, $g_\alpha u$ 也给出并且仅仅一次给出群 G 的所有元素.

由重排定理知, 乘法表中每一行(列)都不会有重复元素, 大大限制了有限群实质不同的乘法表数目.

例 1 二阶群 G_2 、三阶群 G_3 及四阶群 G_4 的乘法表如下.

| G_2 | e | a |
|-------|-----|-----|
| e | e | a |
| a | a | e |

| G_3 | e | a | b |
|-------|-----|-----|-----|
| e | e | a | b |
| a | a | b | e |
| b | b | e | a |

| G_4 | e | a | b | c |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

例 2 循环群: 由一个元素及其幂次构成的有限群 C_n , n 为循环的阶. 循环群乘法表的一般规则是生成元按幂次排列时, 表的每一列都可由前一行向左移动一格得到, 而最左的元素移到最右边去, 循环移动.

1.2 群结构

1.2.1 子群

1.2.1.1 定义

设 H 是 G 的一个子集, 按 G 的乘法规则, H 也构成群, 则称 H 为 G 的子群, 即 $\forall h_\alpha, h_\beta \in H, h_\alpha h_\beta \in H$.

H 是 G 非空子群的充要条件:

$$\forall h_\alpha, h_\beta \in H, h_\alpha h_\beta \in H,$$

$$\forall h_\alpha \in H, h_\alpha^{-1} \in H.$$

e, G 是 G 的子群(显然子群或平庸子群), 非显然子群称固有子群.

例如, 定义群的乘法为数的加法时, 全体整数构成的群是全体实数构成群的子群.

$\{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}, \{e, d, f\}$ 是 D_3 的子群.

1.2.1.2 循环子群

n 阶循环群是由元素 a 的幂 a^k 组成的, $\{a, a^2, \dots, a^n = e\} = z_n$, 它是阿贝尔群, 其群的乘法可以变换.

从 n 阶有限群 G 的任一元素 a 出发, 总可以构成 G 的一个循环子群 z_k , $z_k = \{a, a^2, \dots, a^k = e\}$, k 为阶.

1.2.2 哈集(旁集)

1.2.2.1 定义

设 H 是群 G 的子群, $H = \{h_\alpha\}$, 由固定 $g \in G, g \notin H$ 可生成子群 H 的左陪集 $gH = \{gh_\alpha \mid h_\alpha \in H\}$, 同样也可生成 H 的右陪集 $Hg = \{h_\alpha g \mid h_\alpha \in H\}$.

例如, D_3 , 取 $H = \{e, a\}$, 则由群元 b, c, d 可分别生成左陪集 $bH = \{b, f\}, cH = \{c, d\}, dH = \{d, c\}$. 这里注意, $fH = \{f, b\} = bH$; 右陪集 $Hb = \{b, d\}$.

1.2.2.2 性质

- (1) 一般 $gH \neq Hg$;
- (2) 同一陪集中群元全不相同;
- (3) 陪集中元素的个数等于子群(有限群)的阶;
- (4) 陪集中不含 e , 不是子群;
- (5) 陪集和子群没有公共元素;
- (6) 两个左(右)陪集的元素或全同或全不同, 即陪集定理.

证明: 设 H 是 G 的子群. $u, v \in G; u, v \notin H$.

$$uH = \{uh_\alpha \mid h_\alpha \in H\}, vH = \{vh_\beta \mid h_\beta \in H\}.$$

设 uH 和 vH 有一公共元素, $uh_\alpha = vh_\beta$,

$$\text{则 } v^{-1}u = h_\beta h_\alpha^{-1} \in H.$$

根据重排定理, $v^{-1}uh_\gamma$ 给出 H 的所有元素一次, 且仅一次. 故左陪集 $v[v^{-1}uh_\gamma]$ 与左陪集 vh_γ 重合.

1.2.2.3 拉格朗日定理

有限群子群的阶等于该有限群阶的因子.

该定理可以用数学如下描述: 如果群 G 的阶为 n , 群 G 子群 H 的阶为 m , 则 $n = m \times j$, 其中 j 为整数, 大小为 H 的陪集个数+1.

例如, D_3 群的子群有 $H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, c\}, H_4 = \{e, d, f\}$. D_3 可按 H_1 分成陪集串: $H_1 = \{e, a\}, bH_1 = \{b, f\}$ 和 $cH_1 = \{c, d\}$. 这里 $n = 6, m = 2, j = 3$, 显然满足拉格朗日定理. 我们也可以按 H_4 分成右陪集串: $H_4 = \{e, d, f\}$ 和 $H_4a = \{a, b, c\}$, 同样满足拉格朗日定理.

1.2.2.4 推论 1

素数(即除 1 和自身外,不能表示为任何其他两个整数的积)阶的群无非显然子群,即无固有子群,只能是循环群.

1.2.2.5 推论 2

如果群 G 的阶 $n = n_1 \cdot n_2$, 其中 n_1, n_2 为互为不等的两个不为 1 的素数, 且 G 是阿贝尔群, 则 G 一定是循环群, 至少有 $(n_1 - 1) \cdot (n_2 - 1)$ 个生成元.

1.2.3 群和不变子群

1.2.3.1 共轭

(1) 定义: $\forall f, h \in G, \exists g \in G, gfg^{-1} = h$, 则 f, h 共轭, 记 $f \sim h$.

(2) 性质

a. 对称性: $h \sim f \Rightarrow f \sim h$;

b. 自反性: $h \sim h, efe^{-1} = f$;

c. 传递性: $f_1 \sim h, f_2 \sim h$, 则 $f_1 \sim f_2$.

1.2.3.2 类

(1) 定义: 群 G 的所有相互共轭的元素集合组成 G 的一个类, 记作: $f = \{f' \mid f' = g_\alpha f g_\alpha^{-1}, g_\alpha \in G\}$, g_α 取遍所有群元.

(2) 性质

a. 单位元素自成一类;

b. 阿贝尔群的每个元素自成一类;

c. 设 f 元素的阶为 m , 即 $f^m = e$, 则 f 类所有元素的阶都是 m ;

d. 两个不同的类没有公共元素, 所以可以对群按共轭类进行分割;

e. 不同类中元素个数不一定相同;

f. 有限群每类元素的个数等于群阶的因子.

1.2.3.3 共轭子群

(1) 定义: 设 H, K 是 G 的子群, 若 $K = gHg^{-1} = \{k = ghg^{-1} \mid h \in H\}, g \in G$, 则 H 是 K 的共轭子群. 如 D_3 群中, $\{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}$ 互为共轭子群, 其中 $g = d$.

(2) 性质

a. 对称性: 若 H 与 K 共轭, 则 K 与 H 共轭;

b. 传递性: 若 H_1, H_2 是 K 的共轭子群, 则 H_1, H_2 互为共轭子群, G 的全部子群可以分割为共轭子群类.

1.2.3.4 不变子群(正规子群)

(1) 定义: 设 H 是 G 的子群, 若 $\forall g \in G, h_\alpha \in H$, 有 $gh_\alpha g^{-1} \in H$ (即如果 H 包含元素 h_α , 则它将包含所有与 h_α 同类的元素) 称 H 是 G 的不变子群.

(2) 定理: 设 H 是 G 的不变子群, 对任一固定元素 $f \in G$, 在 h_α 取遍 H 的所有群元

时,乘积 $f h_\alpha f^{-1}$ 一次并且仅仅一次给出 H 的所有元素.

证明: $\because H$ 是不变子群,

$$\therefore f^{-1} h_\beta f \in H.$$

令 $f^{-1} h_\beta f = h_\alpha$, 则 $h_\alpha = f h_\beta f^{-1} \in H$.

当 $h_\alpha \neq h_\gamma$ 时, $f h_\alpha f^{-1} \neq f h_\gamma f^{-1}$, 否则引起矛盾

(3) 举例

例 1 D_3 中, $H = \{e, d, f\}$ 为不变子群, $aH = \{a, b, c\}$, $Ha = \{a, c, b\}$, 但 $ad = b, da = c, ad \neq da$.

例 2 以加法为群的乘法时, 整数加法群是实数加法群的不变子群.

例 3 阿贝尔群的所有子群都是不变子群.

(4) 性质

a. 不变子群的左右陪集重合;

b. 不变子群的两个陪集中元素的乘积一定属于另一陪集.

1.2.4 商群

1.2.4.1 定义

不变子群和它所有陪集串的集合构成一个群, 叫商群. 记作: $G/H = \{H, g_1H, \dots, g_iH, \dots\}$. 乘法规则: $g_ih_\alpha g_jh_\beta = g_kh_\delta \in g_kH$.

证明: (1) 封闭性: $g_iH \cdot Hg_j = g_i g_j H H = g_k H \in G/H$.

(2) 单位元: $H, Hg_iH = g_iHH = g_iH$.

(3) 逆元: g_iH 的逆元为 $g_i^{-1}H$.

1.2.4.2 举例

例如, D_3 群, 其不变子群: $H = \{e, d, f\}$, 陪集串: $H = \{e, d, f\} \rightarrow f_0, aH = \{a, b, c\} \rightarrow f_1$. 商群为 $\{H, aH\}$ 或 $\{f_0, f_1\}$, 且商群为二阶循环群.

1.3 群之间关系

1.3.1 同构

1.3.1.1 定义

\forall 群 $G = \{g_i\} \rightarrow F = \{f_i\}$, \exists 一一对应的满射 Φ , 且保持群的基本运算规则不变, 即 G 中两个元素乘积的映射, 等于两个元素映射的乘积, 也即 $\Phi = (g_i g_j) = \Phi(g_i) \Phi(g_j) = f_i f_j$, 则 $G \cong F$, Φ 叫同构映射.

1.3.1.2 特点

(1) 单位元映射为单位元;

(2) 逆元映射为逆元;

- (3)一定存在逆映射 Φ^{-1} ;
- (4)同构关系具有对称性、自反性、传递性;
- (5)群元和乘法规律都是一一对应的;
- (6)两个同构的群具有完全相同的群结构;
- (7)具有相同的乘法表;

例1 $\{E, I\}$ 与 $Z_2 = \{a, a^2 = E\}$ 同构.

例2 S_3 与 D_3 同构.

- (8)群 G 的两个互为共轭的子群 H, K 同构.

1.3.1.3 自同构群

自身到自身的映射,即 $\nu: G \rightarrow G$,称为自同构映射.自同构映射构成的群,称为自同构群,记 $A(G)$ 或 $Aut(G)$.

例如,三阶循环群 $Z_3 = \{e, a, a^2\}$ 的自同构群为 $A(Z_3)$ 有 2 个元素,即 $\nu_0: \{e, a, a^2\} \rightarrow \{e, a, a^2\}$, $\nu: \{e, a, a^2\} \rightarrow \{e, a^2, a\}$.因此, $A(Z_3)$ 与 Z_2 同构.

1.3.1.4 内自同构群

群 G 的所有内自同构映射 μ ,即由 $\mu \in G$ 引起的自同构映射,构成一个群,叫 G 的内自同构群,记 $I(G)$ 或 $I_n(G)$. $I(G)$ 是 $A(G)$ 的一个子群,且是不变子群.

1.3.2 同态

1.3.2.1 定义

设存在一个 $G \rightarrow F$ 上的满射 Φ , Φ 保持群的基本运算规律不变,即 G 中两个元素乘积的映射,等于两个元素映射的乘积(亦即 $\Phi(g_i g_j) = \Phi(g_i) \Phi(g_j)$),则称群 G 与 F 同态,记 $G \sim F$. F 仅反映 G 的部分性质.

1.3.2.2 性质

- (1)不具有对称性,即 $G \sim F$,但不一定 $F \sim G$;
- (2)同态一般指大群到小群;
- (3)同构一定同态,但同态不一定同构.

$$\Phi(g_0) = f_0, \Phi(g_i^{-1}) = f_i^{-1}$$

例1 $D_3 \sim Z_2$. 这里, $\{e, d, f\} \rightarrow e; \{a, b, c\} \rightarrow a$.

例2 任何群 G 与只有单位元素的群 $Z_1 = \{e\}$ 同态,称为显然同态,一般不计.

1.3.2.3 同态核

设 $G \sim F$, G 中与 F 的单位元素 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_\alpha\}$,称为 G 的同态核.

例如, D_3 的同态核为 $\{e, d, f\}$.

1.3.2.4 同态核定理

设 $G \sim F$, 则

- (1)同态核 H 是 G 的不变子群;
- (2)商群 G/H 与 F 同构.

同态核定理说明同态映射保持群的乘法规律不变,它是关于同态性质的重要定理.

例如, D_3 群与二阶循环群 Z_2 同态,同态核是不变子群 $H=\{e,d,f\}$,陪集是 $aH=\{a,b,c\}$.

1.4 群的合成

1.4.1 直积

1.4.1.1 直积群

设 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$, 定义直积群 $G = G_1 \otimes G_2$, 其群元 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一表示为: $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$

定义直积群的乘法: $g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = g_{1\alpha}g_{2\beta}g_{1\alpha'}g_{2\beta'} = g_{1\alpha}g_{1\alpha'}g_{2\beta}g_{2\beta'} = g_{1\alpha''}g_{2\beta''} = g_{\alpha''\beta''} \in G$, 单位元: $e = e_1e_2$, 逆元: $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{1\alpha}^{-1}g_{2\beta}^{-1}$.

1.4.1.2 群的直积因子

当 G 的子群 G_1, G_2 满足

(1) $\forall g_{\alpha\beta} \in G$, 唯一 $\exists g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}, g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$

(2) 按 G 的乘法规则满足 $g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$ 时,

称 G_1, G_2 为 G 的直积因子, 记作: $G = G_1 \otimes G_2$.

1.4.1.3 特点

(1) e 是 G_1, G_2 唯一的公共元素;

(2) G_1, G_2 是 G 的不变子群;

(3) $G/G_1 \cong G_2, G/G_2 \cong G_1$.

例如: $z_6 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\}$

$$z_2 = \{a^3, a^6 = e\}$$

$$z_3 = \{a^2, a^4, a^6 = e\}$$

$$z_6 = z_2 \otimes z_3, z_6/z_2 \cong z_3, z_6/z_3 \cong z_2$$

1.4.2 半直积

1.4.2.1 定义

设群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$, $A(G_1)$ 为 G_1 的自同构群, $v \in A(G_1)$,

若存在一个同态映射 $\Phi: G_2 \rightarrow A(G_1)$, 即 $\Phi(g_{2\beta}) = v_{2\beta}$, 则可以定义半直积群 $G = G_1 \otimes_s G_2$. G 的任一元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一表示为 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta} \rangle$, 其中 $g_{1\alpha}$ 和 $g_{2\beta}$ 是有序的. G 的乘法定义为: $g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta} \rangle \langle g_{1\alpha'}g_{2\beta'} \rangle = \langle g_{1\alpha}v_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})g_{2\beta}g_{2\beta'} \rangle$.

1.4.2.2 性质

(1) G_1, G_2 不能交换次序.

(2) 若 $G = G_1 \otimes_s G_2$, 则 G_1 是 G 的不变子群, 但 G_2 一般不是; 当 G_2 也是 G 的不变子群时, 半直积退化为直积, 即半直积比直积群的条件弱. 有些群不能作为简单的直积, 但可