郑州大学研究生精品文库

本项目由“一省一校”研究生课程建设专项资金资助

群论基础

QUNLUN JICHU

曹义刚 易 峰 编著

郑州大学出版社

郑州大学研

本项目由“一省一校”研究生课程建设专项资金资助

群论基础

QUNLUN JICHU

曹义刚　易　峰　编著

郑州大学出版社
郑州

图书在版编目(CIP)数据

群论基础/曹义刚,易峰编著. —郑州:郑州大学出版社,2016.12
ISBN 978-7-5645-3127-0

Ⅰ.①群…　Ⅱ.①曹…　Ⅲ.①群论-研究　Ⅳ.①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 138436 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:张功员　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
郑州市金汇彩印有限公司印制
开本:787 mm×1 092 mm　1/16
印张:6.25
字数:150 千字
版次:2016 年 12 月第 1 版　　印次:2016 年 12 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-3127-0　　定价:29.00 元

序 言

群论是数学的一个分支,也是用来描述物理世界对称性非常有用的工具。群论的概念主要来自三部分,即19世纪开始的非欧几里得几何、数论以及18世纪末开始的代数方程。

几何学的研究从古希腊的欧几里得几何开始,19世纪后逐渐与直接度量分离,开始了非欧几里得几何研究,从而使得人们开始注意到几何的抽象性质。但当时还完全没有群的概念。直到19世纪末,群的概念才正式建立并与数学建立了联系,从此群论走上了数学的舞台。

现阶段,群论已经在几乎所有的物理学领域都得到了广泛应用,如固体物理、凝聚态物理、原子分子物理、核物理和粒子物理以及统计物理,并在化学和生命科学等领域也有了很多应用。因此,群论现在已经成为物理学工作者必不可少的一个数学工具。

本书是作者在多年来为郑州大学物理学专业研究生开设的"物理学中的群论"的基础上修改而成,是为物理学不同专业初学者编订的一部简明的群论入门教材。全书共分7章,内容安排如下:第1章介绍群的基本概念;第2章介绍群的表示;第3章是点群和空间群的介绍;第4章介绍转动群;第5章讨论置换群及其表示;第6章、第7章分别是对李群和李代数的讨论。

目前,群论教材很多,然而,群论知识的应用举例却不多。本书去掉了一些对物理学专业初学者而言不必要的证明,增加了一些群知识应用的具体例子,有助于初学者对群论知识的理解和掌握。另外,本书对每一部分知识内容层次分明地展开论述,便于读者有一个统一的概念和认识。

本书难免有不少不妥和错误之处,恳请读者提出宝贵意见。

编者

2015年9月

目录

第1章 群论基础

1.1 群

1.1.1 群的定义

设 $G=\{\cdots,g_\alpha,\cdots,g_\beta,\cdots\}$，定义一种运算"乘法"且满足

(1)封闭性：$\forall g_\alpha,g_\beta\in G, g_\alpha g_\beta=g_\gamma\in G$；

(2)结合性：$\forall f,g,h\in G,(fg)h=f(gh)$；

(3)存在唯一的单位元素：即 $\exists$ 唯一 $e\in G,\forall g\in G, eg=ge=g$；

(4)存在逆元：即 $\forall f\in G$，$\exists$ 唯一的逆元 $f^{-1}\in G$，使 $f^{-1}f=ff^{-1}=e$. 则称 G 为一个群.

根据上述群的定义，可以看出群具有以下几个特点：

(1)可包含性.群是个整体概念，包含集合里的所有元素，缺一不可.

(2)一般情况下，满足 $fg\neq gf$ 的群，称为非阿贝尔群；满足 $fg=gf$ 的群，称为阿贝尔群.

(3)群的乘法表.一般讲，群都可以用一个表格的形式表示，叫群的乘法表.乘法表中，每一行或每一列中每个群元出现而且仅仅出现一次.如 $D_3=\{e,d,f,a,b,c\}$ 群的乘法表如下：

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

(4)有限群.群元的个数有限的群，称为有限群，像点群、置换群等.

(5)无限群. 群元的个数无限的群,称为无限群,像转动群.

(6)群的阶. 有限群的阶指群元的个数.

(7)群的标记,即用参数表示. 任何群元都可用 g_α 唯一标记,这里 α 为参数. n 阶有限群 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$ 中,α 和群元 g_α 是一一对应的,即 $\alpha \neq \alpha'$,则 $g_\alpha \neq g'_\alpha$.

(8)分立群. 由分立群元构成的群.

(9)连续群. 群元是连续的. 如:绕一固定轴的转运群 $\{C_{k(\psi)}\}$,群元 $C_{k(\psi)}$ 表示绕固定转动轴 $\boldsymbol{k}$ 转 ψ 角度的操作,参数 ψ 的变化范围为 $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$.

1.1.2 群举例

1.1.2.1 实数加群

定义群的乘法为实数的加法,则全体实数在加法运算下构成一个群,单位元 0,因为 $a+0=0+a=a$,a 的逆元为 $-a$,因为 $a+(-a)=(-a)+a=0$. 但实数全体在乘法为数乘时,并不构成一个群,因为 0 没有逆元,除 0 外构成一个群,单位元 1,a 的逆元为 $\frac{1}{a}$. $\{1\}$ 是一阶群;$\{1,-1\}$ 是二阶群;$\{1,i,-i,-1\}$ 是四阶群.

1.1.2.2 空间反演群

$E\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}$,$I\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}$,定义群的乘法为从右到左连续对 $\boldsymbol{r}$ 作用,$EI\boldsymbol{r}=E(-\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{r}$,$\{E,I\}$ 构成反演群. 乘法表如下:

	E	I
E	E	I
I	I	E

1.1.2.3 矩阵群

定义群的乘法为矩阵乘法,所有非奇异的同阶矩阵构成一个群. 单位元为单位矩阵,逆元为矩阵的逆.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 构成一个二阶群;$M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$M_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,$M_3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,$M_4=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$M_5=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$,$M_6=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$,$M_7=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,$M_8=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ 构成一个八阶群. $M_1^{-1}=M_1$,$M_2^{-1}=M_2$,$M_3^{-1}=M_3$,$M_4^{-1}=M_4$,$M_5^{-1}=M_6$,$M_6^{-1}=M_5$,$M_7^{-1}=M_7$,$M_8^{-1}=M_8$.

1.1.2.4 置换群

定义置换操作 $P=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\m_1&m_2&m_3&\cdots&m_n\end{pmatrix}$,其中 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意

排列. P 表示把 1 映射为 m_1, 2 映射为 m_2, $\cdots$, n 映射为 m_n. 如: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

置换群(S_n 群)为 n 个客体的所有可能的置换操作,阶数为 $n!$. 如 S_3 群包括如下 6 个群元: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

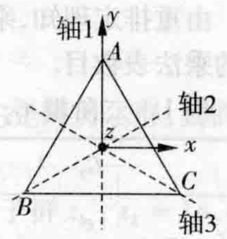

图 1–1

1.1.2.5　**平面正三角形对称群 D_3(六阶二面体群)**

群的乘法为保持正三角形不变的空间转动操作,如图 1–1.

e:不动, d:绕 z 轴转 $\frac{2\pi}{3}$, f:绕 z 轴转 $\frac{4\pi}{3}$, a:绕轴 1 转 π, b:绕轴 2 转 π, c:绕轴 3 转 π.

对有限群,群元数目有限,有可能把元素的乘积全部排列出来,构成一个表,即乘法表. D_3 群的乘法表已在 1.1.1 中给出.

1.1.2.6　**三维特殊转动群 $SO(3)$**

群的乘法定义为保持 R^3 中 O 点不动的转动. 绕所有过 O 点轴的一切转动操作构成 $SO(3)$ 群. 设 $\boldsymbol{k}$ 是任一轴,绕 $\boldsymbol{k}$ 轴转 Ψ 角的转动为 $C_k(\Psi)$. 定义 $C_{k'}(\Psi')\,C_k(\Psi)$ 为先实行绕 $\boldsymbol{k}$ 轴转 Ψ 角,再实行绕 $\boldsymbol{k}'$ 轴转 Ψ' 角. 单位元素是转角 $\Psi=0$,即不动. 绕同一轴 $\boldsymbol{k}$ 轴转 Ψ 和 $2\pi-\Psi$ 的元素 $C_k(\Psi)$, $C_k(2\pi-\Psi)$ 互为逆元素.

群的乘法可以是数乘和数的加法,也可以是空间反演,转动等连续两次操作和连续两次置换等. 有限群的乘法规则,可以列为乘法表;无限群不能列出乘法表,但乘法规则是确定的.

1.1.3　重排定理

1.1.3.1　**证明**

设 $G=\{g_\alpha\}$, $u\in G$, 当 α 取遍所有可能值时,乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 中所有元素,即 $\{ug_\alpha\}$.

证明:

(1)先证任一群元 g_β 可表示成 ug_α.

$\because u^{-1}\in G, \exists u^{-1}g_\beta=g_\alpha\in G$

$\therefore g_\beta=ug_\alpha$

(2)再证当 α 不同时,不同的 ug_α 给出 G 中不同的元素,即 $\alpha\neq\alpha'$, $ug_\alpha\neq ug_{\alpha'}$.

反证法:若 $\alpha\neq\alpha'$, $ug_\alpha=ug_{\alpha'}$

$\because u^{-1}ug_\alpha=u^{-1}ug_{\alpha'}$

$\therefore g_\alpha=g_{\alpha'}$

这与 g_α 与 α 唯一对应相矛盾

$\therefore \alpha\neq\alpha'$, $ug_\alpha\neq ug_{\alpha'}$

1.1.3.2 推论

在 α 取遍所有可能值时，$g_\alpha u$ 也给出并且仅仅一次给出群 G 的所有元素.

由重排定理知，乘法表中每一行(列)都不会有重复元素，大大限制了有限群实质不同的乘法表数目.

例1 二阶群 G_2、三阶群 G_3 及四阶群 G_4 的乘法表如下.

G_2	e	a
e	e	a
a	a	e

G_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

G_4	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

例2 循环群：由一个元素及其幂次构成的有限群 C_n，n 为循环的阶. 循环群乘法表的一般规则是生成元按幂次排列时，表的每一列都可由前一行向左移动一格得到，而最左的元素移到最右边去，循环移动.

1.2 群结构

1.2.1 子群

1.2.1.1 定义

设 H 是 G 的一个子集，按 G 的乘法规则，H 也构成群，则称 H 为 G 的子群，即 $\forall h_\alpha, h_\beta \in H, h_\alpha h_\beta \in H$.

H 是 G 非空子群的充要条件：

$\forall h_\alpha, h_\beta \in H, h_\alpha h_\beta \in H$,

$\forall h_\alpha \in H, h_\alpha^{-1} \in H$.

e,G 是 G 的子群(显然子群或平庸子群),非显然子群称固有子群.

例如,定义群的乘法为数的加法时,全体整数构成的群是全体实数构成群的子群. $\{e,a\}$,$\{e,b\}$,$\{e,c\}$,$\{e,d,f\}$ 是 D_3 的子群.

1.2.1.2　循环子群

n 阶循环群是由元素 a 的幂 a^k 组成的,$\{a,a^2,\cdots,a^n=e\}=z_n$,它是阿贝尔群,其群的乘法可以变换.

从 n 阶有限群 G 的任一元素 a 出发,总可以构成 G 的一个循环子群 z_k,$z_k=\{a,a^2,\cdots,a^k=e\}$,$k$ 为阶.

1.2.2　陪集(旁集)

1.2.2.1　定义

设 H 是群 G 的子群,$H=\{h_\alpha\}$,由固定 $g\in G,g\notin H$ 可生成子群 H 的左陪集 $gH=\{gh_\alpha|h_\alpha\in H\}$,同样也可生成 H 的右陪集 $Hg=\{h_\alpha g|h_\alpha\in H\}$.

例如,D_3,取 $H=\{e,a\}$,则由群元 b,c,d 可分别生成左陪集 $bH=\{b,f\}$,$cH=\{c,d\}$,$dH=\{d,c\}$.这里注意,$fH=\{f,b\}=bH$;右陪集 $Hb=\{b,d\}$.

1.2.2.2　性质

(1)一般 $gH\neq Hg$;

(2)同一陪集中群元全不相同;

(3)陪集中元素的个数等于子群(有限群)的阶;

(4)陪集中不含 e,不是子群;

(5)陪集和子群没有公共元素;

(6)两个左(右)陪集的元素或全同或全不同,即陪集定理.

证明:设 H 是 G 的子群. $u,v\in G$;$u,v\notin H$.

$uH=\{uh_\alpha \mid h_\alpha\in H\}$,$vH=\{vh_\beta\mid h_\beta\in H\}$.

设 uH 和 vH 有一公共元素,$uh_\alpha=vh_\beta$,

则 $v^{-1}u=h_\beta h_\alpha^{-1}\in H$.

根据重排定理,$v^{-1}uh_\gamma$ 给出 H 的所有元素一次,且仅一次.故左陪集 $v[v^{-1}uh_\gamma]$ 与左陪集 vh_γ 重合.

1.2.2.3　拉格朗日定理

有限群子群的阶等于该有限群阶的因子.

该定理可以用数学如下描述:如果群 G 的阶为 n,群 G 子群 H 的阶为 m,则 $n=m\times j$,其中 j 为整数,大小为 H 的陪集个数+1.

例如,D_3 群的子群有 $H_1=\{e,a\}$,$H_2=\{e,b\}$,$H_3=\{e,c\}$,$H_4=\{e,d,f\}$. D_3 可按 H_1 分成陪集串:$H_1=\{e,a\}$,$bH_1=\{b,f\}$ 和 $cH_1=\{c,d\}$.这里 $n=6$,$m=2$,$j=3$,显然满足拉格朗日定理.我们也可以按 H_4 分成右陪集串:$H_4=\{e,d,f\}$ 和 $H_4a=\{a,b,c\}$,同样满足拉格朗日定理.

1.2.2.4　**推论 1**

素数(即除 1 和自身外,不能表示为任何其他两个整数的积)阶的群无非显然子群,即无固有子群,只能是循环群.

1.2.2.5　**推论 2**

如果群 G 的阶 $n = n_1 \cdot n_2$,其中 n_1, n_2 为互为不等的两个不为 1 的素数,且 G 是阿贝尔群,则 G 一定是循环群,至少有 $(n_1 - 1) \cdot (n_2 - 1)$ 个生成元.

1.2.3　类和不变子群

1.2.3.1　**共轭**

(1)定义:$\forall f, h \in G$, $\exists g \in G, gfg^{-1} = h$,则 f, h 共轭,记 $f \sim h$.

(2)性质

a. 对称性:$h \sim f$, $f \sim h$;

b. 自反性:$h \sim h$, $efe^{-1} = f$;

c. 传递性:$f_1 \sim h, f_2 \sim h$,则 $f_1 \sim f_2$.

1.2.3.2　**类**

(1)定义:群 G 的所有相互共轭的元素集合组成 G 的一个类,记作:$f = \{f' \mid f' = g_\alpha f g_\alpha^{-1}, g_\alpha \in G\}$,$g_\alpha$ 取遍所有群元.

(2)性质

a. 单位元素自成一类;

b. 阿贝尔群的每个元素自成一类;

c. 设 f 元素的阶为 m,即 $f^m = e$,则 f 类所有元素的阶都是 m;

d. 两个不同的类没有公共元素,所以可以对群按共轭类进行分割;

e. 不同类中元素个数不一定相同;

f. 有限群每类元素的个数等于群阶的因子.

1.2.3.3　**共轭子群**

(1)定义:设 H, K 是 G 的子群,若 $K = gHg^{-1} = \{k = ghg^{-1} \mid h \in H\}, g \in G$,则 H 是 K 的共轭子群. 如 D_3 群中,$\{e,a\}, \{e,b\}, \{e,c\}$ 互为共轭子群,其中 $g = d$.

(2)性质

a. 对称性:若 H 与 K 共轭,则 K 与 H 共轭;

b. 传递性:若 H_1, H_2 是 K 的共轭子群,则 H_1, H_2 与互为共轭子群,G 的全部子群可以分割为共轭子群类.

1.2.3.4　**不变子群(正规子群)**

(1)定义:设 H 是 G 的子群,若 $\forall g \in G, h_\alpha \in H$,有 $gh_\alpha g^{-1} \in H$(即如果 H 包含元素 h_α,则它将包含所有与 h_α 同类的元素)称 H 是 G 的不变子群.

(2)定理:设 H 是 G 的不变子群,对任一固定元素 $f \in G$,在 h_α 取遍 H 的所有群元

时,乘积 $fh_\alpha f^{-1}$ 一次并且仅仅一次给出 H 的所有元素.

证明:$\because H$ 是不变子群,

$\therefore f^{-1}h_\beta f \in H$.

令 $f^{-1}h_\beta f = h_\alpha$,则 $h_\beta = fh_\alpha f^{-1} \in H$.

当 $h_\alpha \neq h_\gamma$ 时,$fh_\alpha f^{-1} \neq fh_\gamma f^{-1}$,否则引起矛盾

(3)举例

例 1　D_3 中,$H=\{e,d,f\}$ 为不变子群,$aH=\{a,b,c\}$,$Ha=\{a,c,b\}$,但 $ad=b$,$da=c$,$ad \neq da$.

例 2　以加法为群的乘法时,整数加法群是实数加法群的不变子群.

例 3　阿贝尔群的所有子群都是不变子群.

(4)性质

a. 不变子群的左右陪集重合;

b. 不变子群的两个陪集中元素的乘积一定属于另一陪集.

1.2.4　商群

1.2.4.1　定义

不变子群和它所有陪集串的集合构成一个群,叫商群. 记作:$G/H=\{H,g_1H,\cdots,g_iH,\cdots\}$. 乘法规则:$g_ih_\alpha g_jh_\beta = g_kh_\delta \in g_kH$.

证明:(1)封闭性:$g_iH \cdot Hg_j = g_ig_jHH = g_kH \in G/H$.

(2)单位元:H,$Hg_iH = g_iHH = g_iH$.

(3)逆元:g_iH 的逆元为 $g_i^{-1}H$.

1.2.4.2　举例

例如,D_3 群,其不变子群:$H=\{e,d,f\}$,陪集串:$H=\{e,d,f\} \to f_0$,$aH=\{a,b,c\} \to f_1$. 商群为 $\{H,aH\}$ 或 $\{f_0,f_1\}$,且商群为二阶循环群.

1.3　群之间关系

1.3.1　同构

1.3.1.1　定义

$\forall$ 群 $G=\{g_i\} \to F=\{f_i\}$,$\exists$ 一一对应的满射 Φ,且保持群的基本运算规则不变,即 G 中两个元素乘积的映射,等于两个元素映射的乘积,也即 $\Phi=(g_ig_j)=\Phi(g_i)\Phi(g_i)=f_if_j$,则 $G \cong F$,Φ 叫同构映射.

1.3.1.2　特点

(1)单位元映射为单位元;

(2)逆元映射为逆元;

(3)一定存在逆映射 Φ^{-1}；

(4)同构关系具有对称性、自反性、传递性；

(5)群元和乘法规律都是一一对应的；

(6)两个同构的群具有完全相同的群结构；

(7)具有相同的乘法表；

例1 $\{E,I\}$ 与 $Z_2=\{a,a^2=E\}$ 同构.

例2 S_3 与 D_3 同构.

(8)群 G 的两个互为共轭的子群 H、K 同构.

1.3.1.3 自同构群

自身到自身的映射，即 $\nu: G \to G$，称为自同构映射. 自同构映射构成的群，称为自同构群，记 $A(G)$ 或 $Aut(G)$.

例如，三阶循环群 $Z_3=\{e,a,a^2\}$ 的自同构群为 $A(Z_3)$ 有2个元素，即 $\nu_0:\{e,a,a^2\}\to\{e,a,a^2\}$，$\nu:\{e,a,a^2\}\to\{e,a^2,a\}$. 因此，$A(Z_3)$ 与 Z_2 同构.

1.3.1.4 内自同构群

群 G 的所有内自同构映射 μ，即由 $\mu\in G$ 引起的自同构映射，构成一个群，叫 G 的内自同构群，记 $I(G)$ 或 $I_n(G)$. $I(G)$ 是 $A(G)$ 的一个子群，且是不变子群.

1.3.2 同态

1.3.2.1 定义

设存在一个 $G\to F$ 上的满射 Φ，Φ 保持群的基本运算规律不变，即 G 中两个元素乘积的映射，等于两个元素映射的乘积（亦即 $\Phi(g_ig_j)=\Phi(g_i)\Phi(g_j)$），则称群 G 与 F 同态，记 $G\sim F$. F 仅反映 G 的部分性质.

1.3.2.2 性质

(1)不具有对称性，即 $G\sim F$，但不一定 $F\sim G$；

(2)同态一般指大群到小群；

(3)同构一定同态，但同态不一定同构.

$\Phi(g_0)=f_0$, $\Phi(g_i^{-1})=f_i^{-1}$

例1 $D_3\sim Z_2$. 这里，$\{e,d,f\}\to e$；$\{a,b,c\}\to a$.

例2 任何群 G 与只有单位元素的群 $Z_1=\{e\}$ 同态，称为显然同态，一般不计.

1.3.2.3 同态核

设 $G\sim F$，G 中与 F 的单位元素 f_0 对应的元素集合 $H=\{h_\alpha\}$，称为 G 的同态核.

例如，D_3 的同态核为 $\{e,d,f\}$.

1.3.2.4 同态核定理

设 $G\sim F$，则

(1)同态核 H 是 G 的不变子群；

(2)商群 G/H 与 F 同构.

同态核定理说明同态映射保持群的乘法规律不变,它是关于同态性质的重要定理.

例如,D_3 群与二阶循环群 Z_2 同态,同态核是不变子群 $H=\{e,d,f\}$,陪集是 $aH=\{a,b,c\}$.

1.4 群的合成

1.4.1 直积

1.4.1.1 直积群

设 $g_{1\alpha}\in G_1, g_{2\beta}\in G_2$,定义直积群 $G= G_1\otimes G_2$,其群元 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一表示为: $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$

定义直积群的乘法: $g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = g_{1\alpha}g_{2\beta}g_{1\alpha'}g_{2\beta'} = g_{1\alpha}g_{1\alpha'}g_{2\beta}g_{2\beta'} = g_{1\alpha''}g_{2\beta''} = g_{\alpha''}g_{\beta''}\in G$,单位元: $e=e_1e_2$,逆元: $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{1\alpha}^{-1}g_{2\beta}^{-1}$.

1.4.1.2 群的直积因子

当 G 的子群 G_1, G_2 满足

(1) $\forall g_{\alpha\beta}\in G$,唯一 $\exists g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}, g_{1\alpha}\in G_1, g_{2\beta}\in G_2$

(2)按 G 的乘法规则满足 $g_{1\alpha}g_{2\beta}=g_{2\beta}g_{1\alpha}$ 时,

称 G_1, G_2 为 G 的直积因子,记作:$G=G_1\otimes G_2$.

1.4.1.3 特点

(1) e 是 G_1, G_2 唯一的公共元素;

(2) G_1, G_2 是 G 的不变子群;

(3) $G/G_1\cong G_2, G/G_2\cong G_1$.

例如:$z_6 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\}$

$z_2 = \{a^3, a^6 = e\}$

$z_3 = \{a^2, a^4, a^6 = e\}$

$z_6 = z_2\otimes z_3, z_6/z_2\cong z_3, z_6/z_3\cong z_2$

1.4.2 半直积

1.4.2.1 定义

设群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$, $A(G_1)$ 为 G_1 的自同构群, $v\in A(G_1)$,

若存在一个同态映射 $\Phi: G_2\to A(G_1)$,即 $\Phi(g_{2\beta}) = v_{2\beta}$,则可以定义半直积群 $G = G_1\otimes_s G_2$. G 的任一元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一表示为 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle$,其中 $g_{1\alpha}$ 和 $g_{2\beta}$ 是有序的. G 的乘法定义为: $g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha}g_{2\beta}\rangle\langle g_{1\alpha'}g_{2\beta'}\rangle = \langle g_{1\alpha}v_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'})g_{2\beta}g_{2\beta'}\rangle$.

1.4.2.2 性质

(1) G_1, G_2 不能交换次序.

(2)若 $G = G_1\otimes_s G_2$,则 G_1 是 G 的不变子群,但 G_2 一般不是;当 G_2 也是 G 的不变子群时,半直积退化为直积,即半直积比直积群的条件弱. 有些群不能作为简单的直积,但可