“十三五”国家重点出版物出版规划项目

诺/贝/尔/经/济/学/奖/获/得/者/丛/书

Library of Nobel Laureates in Economic Sciences

博弈论讲义

Lectures on Game Theory

罗伯特·J. 奥曼（Robert J. Aumann） 著

中国人民大学出版社

五”国家重点出版物出版规划项目

济/学/奖/获/得/者/丛/书

obel Laureates in Economic Sciences

博弈论讲义

Lectures on Game Theory

罗伯特·J. 奥曼（Robert J. Aumann） 著
周华任 佘潇 王俐莉 刘娟 译

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

博弈论讲义 / 罗伯特·J. 奥曼著；周华任等译. —北京：中国人民大学出版社，2017.2

（诺贝尔经济学奖获得者丛书）

书名原文：Lectures on Game Theory

ISBN 978-7-300-23682-7

Ⅰ.①博… Ⅱ.①罗… ②周… Ⅲ.①博弈论—研究 Ⅳ.①O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 282721 号

"十三五"国家重点出版物出版规划项目

诺贝尔经济学奖获得者丛书

博弈论讲义

罗伯特·J. 奥曼 著

周华任 佘潇 王俐莉 刘娟 译

Boyilun Jiangyi

出版发行	中国人民大学出版社				
社　　址	北京中关村大街 31 号		**邮政编码**	100080	
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）		
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）		
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）		
网　　址	http://www.crup.com.cn				
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)				
经　　销	新华书店				
印　　刷	北京东君印刷有限公司				
规　　格	160 mm×235 mm 16 开本		**版　　次**	2017 年 2 月第 1 版	
印　　张	7.5 插页 1		**印　　次**	2017 年 2 月第 1 次印刷	
字　　数	74 000		**定　　价**	32.00 元	

前言

这本书是 1975—1976 年秋季和冬季学期我在斯坦福大学经济系的讲义集。我非常感谢 Jesé Córdoba 和 Haruo Imai，他们做了笔记，记录了这些讲义。我还要感谢 Martin Osborne，讲义中所有练习题的答案都是他提供的。

自从这些讲义被写出以后的 13 年里，博弈理论得到迅猛的发展。然而，我的这些讲义代表了这个领域的最初资料，还没有过时。今天，基于这些讲义开设一门课程是完全有可能的，当然毫无疑问，一些后来的研究可以纳入其中。尽管在当时，这些讲义也只是给出了部分内容，因为在一个为期两个季度的学期的课程中包含所有的材料是不现实的。

对于经济学、运筹学、统计学、数学和其他偏向数理专业的水平较高的本科生或者研究生而言，本书的第 1～7 章不算太深奥，第 8 章有点难度。

在出版之前，我简要地回顾了一下这些材料，做了一些

小的修正，但是，很可能还存在一些错误，欢迎读者随时批评指正。

为了避免产生新的错误和加快出版进程，这些材料没有被重新抄写，是在最初的手稿基础上修正的，因此，在行间留了比较大的间距。此外，细心的读者会发现，打字机使用的字体和原稿可能有不一致的地方。书中的字体不一致，这也许不太紧要，就像有意识地在考古原址上的重建。无论如何，敬请读者谅解。

我要感谢斯坦福大学，尤其是社会科学数学研究所的经济部门及其主任 Mordecai Kurz 教授，感谢他们为开设这些课程提供了机会，也感谢他们对这些讲义做出的安排。

罗伯特·J. 奥曼

1988 年 9 月

目　录

第1章 策梅洛定理

博弈论是指具备不同利益的人的理性行为理论。其应用已经延伸至包含经济、政治及战争等领域，其作用远远超越了通常意义上的博弈。此种情况下，我们所说的“博弈”即“game”一词是通过一系列“规则”定义的某种局面，而“play”指的是博弈中的特定事件。因此，国际象棋是一场博弈，费希尔和斯帕斯基在1972年夏季就进行了几场国际象棋博弈。

我们首先从国际象棋中的策梅洛定理开始谈起。

1.1 **定理**（Zermelo，1912）：要么白方有必胜之策略，要么黑方有必胜之策略，要么双方有必不败之策略。

证明：我们将证明包含国际象棋在内的博弈结果。每场博弈的特征在于：（1）国际象棋中的位置；（2）“谁必须移动”的指示（黑方或白方）；（3）n 是正整数（要理解如果对手没有结束博弈或者在移动 n 步之后仍无一方战败，那么博弈将会被宣布为平局）。［国际象棋也是博弈这个大家族中的一员，因为其移动的步数是有限的（规则为：当相同位置被重复三次以后，博弈宣布结束）。］

我们通过归纳 n 来证明这一结果，使用较大家族的原因是它加强了归纳假设，并且使得归纳证明变得可行，属于典型的归纳论证。

假设 $n=1$，如果黑方移动，他可以选择配合或者不配合这一步的移动；如果选择配合，黑方就处于必胜的位置，如果选择不配合，双方都处于不败的位置。对于白方也是一样。现在假定在所有 $n \leqslant m-1$ 的情况下，该定理都是正确的，我们希望推导出的定理为 $n=m$，不失一般性地，我们都假定黑方先移动。在归纳假设中，黑方先移动之后，要么黑方有必胜之策略，要么白方有必胜之策略，要么双方有必不败之策略。换句话来说，将黑方的每次移动指定为 p，那么必定有相关联的字母 $f(p)$，可能是 b、w 或者 d（b、w 和 d 分别代表“黑方有必胜之策略”、“白方有必胜之策略”以及“双方有必不败之策略”）。此后，会出现三种相互排斥且详尽的案例：

(1) 如果黑方移动 p 使得 $f(p)=\mathrm{b}$，那么在原博弈中，黑方有必胜之策略。

(2) 如果对所有的 p 而言，$f(p)=\mathrm{w}$，那么在原博弈中，白方有必胜之策略。

(3) 否则，若对于 p，$f(p)=\mathrm{b}$ 不成立，$f(p)=\mathrm{d}$ 成立，黑白双方有必不败之策略。

这样就完成了对定理的证明。

现在我们介绍博弈论策略中一个至关重要的概念。对于策略而言，我们指的是博弈（博弈一方）中的完整计划，将所有突发事件考虑在内，包括博弈过程中其他对手可能会做的所有事情。

举例而言：在井字棋中，先走的一方最多可以移动 5 步，

而每一步最多有 9 种可能。尽管他的策略远远不止 45 个，但每一个策略都是一个完整的计划，其中，仅仅涵盖先走一方前两步的可能数就高达 504 个。这是因为，第一步有 9 种可能，第二个局中人则有 8 种可能的应对方法，第一个局中人在第二步中又有 7 种选择。

就策略而言，表 1—1 至表 1—3 三张表格详细说明了策梅洛定理。行代表白方的策略，列代表黑方的策略，数字 1，2，…代表策略的索引。对每组白方或黑方的策略而言，都有相应的字母 w、b 以及 d 与之对应。如果白方有必胜之策略，不管黑方使用何种策略，白方都有策略来确保结果为 w；如果黑方有必胜之策略，不管白方使用何种策略，黑方都有策略来确保结果为 b；如果双方都有必不败之策略，那么就没有为白方确保 w 的策略，也没有为黑方确保 b 的策略，但是有至少为黑白两方确保 d 的策略。

表 1—1　白方有必胜之策略当且仅当 *k* 行全部填满了 w

白方的策略 \ 黑方的策略	1	2	3	…
1	w	b	w	…
2	d	w	d	…
3	w	b	d	…
⋮	⋮	⋮	⋮	
k	w	w	w	w…w
⋮	⋮	⋮	⋮	

表 1—2　黑方有必胜之策略当且仅当 k 列全部填满了 b

白方的策略＼黑方的策略	1	2	3	…	k	…
1	d	d	b	…	b	…
2	w	b	d	…	b	…
3	w	w	w	…	b	…
⋮	⋮	⋮	⋮		b ⋮ b	

表 1—3　双方有必不败之策略当且仅当 k 列没有一个 w 并且 k' 行没有一个 b

白方的策略＼黑方的策略	1	2	3	…	k	…
1	w	d	b	…	d	…
2	d	b	b	…	b	…
3	w	w	b	…	b	…
⋮	⋮	⋮	⋮		b 或 d	
k'	w	d	w	w 或 d	d	w 或 d
⋮	⋮	⋮	⋮		b 或 d	

1.2 **例**（六角）：以下规则定义了“六角”博弈。

博弈中均有黑方、白方两个局中人。如图 1—1 所示，棋盘由角度为 60 度及 120 度的菱形的点组成；两个相对的边被标注为“白色”，另外两个边被标注为“黑色。”（对于一场比较具有挑战性的博弈而言，棋盘应该更大，例如 11×11。）如果与其他点过于靠近，需要调用两个相邻的点；因此棋盘内的每个点都有 6 个相邻的点，这一方法是为了鼓励局中人尝试将自己的棋子两边连接起来。白方先走，可以将棋子落在菱形中的任何点上，然后局中人轮流将棋子落在没有人选择的点上（不一定要与先前所选择的点相邻）。如果某个局中人通过连接相邻点将自己的棋子两端连起来，他就赢得了博弈（如图 1—1 所示）。

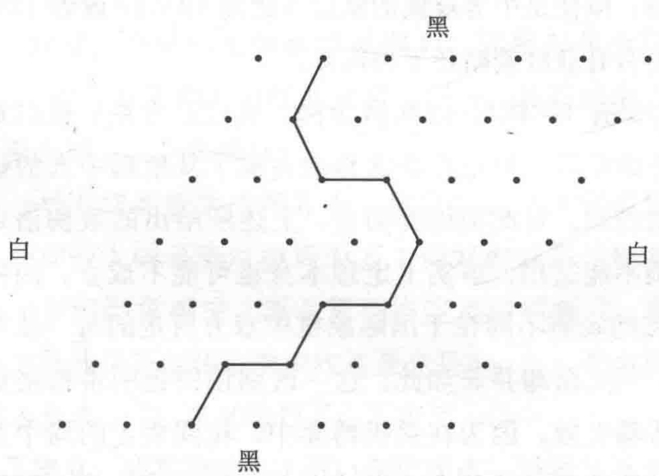

图 1—1　在六角博弈中黑方将棋子两端连接起来

很明显，这一博弈完全适用策梅洛定理。同时，稍加思索我们就会发现：在此博弈中，平局的情形不可能出现，因

此不论白方还是黑方都没有必胜的策略。现在我们证明：事实上，白方拥有必胜的策略。最后我们可以证明：如果黑方有必胜的策略，那么白方肯定也有必胜的策略。

除黑方先行之外，我们将反转六角定义为与六角完全一致。如果黑方在六角中有必胜的策略，那么白方在反转六角中有必胜的策略。现在考虑一个六角博弈，白方在率先落步时可以任意移动，随后其忽略此移动并且一心要赢，犹如其在反转六角中一般。如果在任何时候，其策略都能够让他占据第一步所走的位置，那么他就可以轻而易举地占据另一个任意点，从而取得胜利，但这是相互矛盾的。因此在六角中，黑方不可能拥有必胜的策略，而白方有必胜的策略。

值得注意的是：这仅仅简单地证明了白方拥有取得胜利的策略；即便是中等规模的棋盘（比如 12×12 或者 13×13），白方是否有获胜策略还不得而知。

1.3 **例**（兵棋）：以兵棋为例，黑白双方在下棋时都不知道对方的位置，只有在非法移动占据了其他局中人的位置时才会被告知。对此类博弈而言，上述所给出的策梅洛定理的证明则不能适用，事实上定理本身也可能不成立。国际象棋及兵棋的实质不同在于国际象棋中双方所走的每一步对方都知晓，而兵棋却并非如此。这一区别使得证明策梅洛定理的归纳步骤失效，因为在兵棋博弈中，轮到要走的局中人并不知道他所选择的位置会有什么后果。从技术上讲，国际象棋是一种展示全部信息的博弈，而兵棋并非如此。

第 2 章　非合作博弈

目前为止，我们所讨论的博弈中均包含的是利益完全对立的两个局中人。很显然，有两个以上局中人时，他们之间的利益不可能完全对立，这便引发了以下定义：

2.1 **定义**：严格的竞争性博弈即为，如果有两个局中人(1 和 2)，对于任意两个可能的结果 x 及 y，如果局中人 1 偏好 x，那么局中人 2 则偏好 y。

在一场严格的竞争性博弈中，我们可以用数字来指定结果，从而使较大的号码对应局中人 1 偏好的结果。如果将此方法应用到国际象棋中，那么策梅洛定理可以断言：数字 v 使得白方能够保证他所取得的收益至少是 v，并且黑方所取得的收益不会高于 v。这又得到了以下定义。

2.2 **定义**：如果局中人 1 可以保证所取得的收益至少是 v，并且局中人 2 可以保证局中人 1 所取得的收益不会高于 v，数字 v 就是一场严格的竞争性博弈中的最小最大值。

不是所有严格的竞争性博弈都有最小最大值，举例而言，在“猜硬币”博弈中，表 2—1 所给出的就是局中人 1 所取得

的收益，并没有最小最大值。

表 2—1

		局中人 2	
		策略 1	策略 2
局中人 1	策略 1	1	−1
	策略 2	−1	1

现在，我们可以进一步研究那些不是严格竞争且拥有两个以上局中人的博弈。

2.3 **定义**：博弈 G（以策略形式出现）包含：

(1) 一组 N 个局中人；

(2) 对于每一个局中人 i，都有一个策略集 S^i；

(3) 对于每一个局中人 i，都有一个收益函数 $h^i: \underset{i \in N}{\times} S^i \to \mathrm{R}$。

2.4 **注释**：术语“策略形式”用来表明我们已经从单个行动中抽离出来，进而寻找策略。

如果 $s \in \underset{i \in N}{\times} S^i$，这就是说 s 是一个 n 维策略，并且 $t^i \in S^i$，即 t^i 是局中人 i 的一个策略，记作 $s \mid t^i$。

2.5 **定义**：一个博弈的均衡点是策略集的一个 n 维策略 s，对于任何局中人 i 及他的任何策略 t^i 而言，有

$$h^i(s \mid t^i) \leqslant h^i(s)$$

二人零和博弈即为博弈 G，设 $n=2$ 使得对于所有的策略对 s，我们有

$$h^1(s) + h^2(s) = 0$$

很明显，二人零和博弈是严格竞争的。在这样的博弈中，若对于任意的 t^1 和 t^2 有

$$h^1(s \mid t^1) \leqslant h^1(s)$$

$$h^2(s \mid t^2) \leqslant h^2(s) = -h^1(s)$$

或者对于任意的 t^1 和 t^2，

$$h^1(t^1,s^2) \leqslant h^1(s^1,s^2) \leqslant h^1(s^1,t^2)$$

那么，一对 s 就是一个均衡点。

这意味着 $h^1(s^1,s^2)$ 是博弈的最小值。因此我们发现，当且仅当二人零和博弈有一个均衡点时，此博弈有一个最小最大值。我们现在希望证明一个命题，将二人零和博弈中均衡点的存在性（或者说最小最大值的存在性）和所谓的“最小最大性”联系起来。

2.6 **定义**：如果欧几里得空间的一个子集是有界且封闭的，则其被称为是紧的。

2.7 **注释**：一个实值连续函数在一个紧集上可以取到最大值和最小值（请读者自行证明）。

2.8 **命题**：设 G 为一个二人零和博弈。假设 S^i 是欧几里得空间的紧子集，h^i 是连续的。那么 G 中均衡点存在的充分必要条件是：

$$\max_{s^1}\min_{s^2} h^1(s^1,s^2) = \min_{s^2}\max_{s^1} h^1(s^1,s^2)$$

2.9 **注释**：$\max\min h^1(s^1,s^2)$ 表示局中人 1 利用适当的策略可以确保自己获得的最大值。相似地，$\min\max h^1(s^1,s^2)$ 表示局中人 2 可以保证的局中人 1 不会超过的最小值。在“猜硬币”博弈中，不存在最小最大值，这些量是不同的：我们有 $\max\min=-1$ 和 $\min\max=1$。

2.10 **注释**：收益函数 h^i 的实值性和连续性需要确定最大最小值（max min）和最小最大值（min max）的存在。

2.11 **注释**：紧集的笛卡儿乘积也是紧的（请读者自证）。

2.12 **注释**：设 h 在 $s^1 \times s^2$ 上连续且 s^1 和 s^2 是紧的。那么

$\min_{s^2} h(s^1, s^2)$ 是 s^1 的连续函数（请读者自证）。

命题证明：我们首先假设总有

$$\max_{s^1} \min_{s^2} h^1 \leqslant \min_{s^2} \max_{s^1} h^1 \tag{2.1}$$

事实上，对于任意的 s^1 和 s^2 我们有

$$\max_{s^1} h^1(s^1, s^2) \geqslant h^1(s^1, s^2)$$

两边取 s^2 的最小值，我们得到

$$\min_{s^2} \max_{s^1} h^1(s^1, s^2) \geqslant \min_{s^2} h^1(s^1, s^2)$$

既然这对于所有的 s^1 都满足，当 s^1 取最大值时也满足上式；从而

$$\min_{s^2} \max_{s^1} h^1(s^1, s^2) \geqslant \max_{s^1} \min_{s^2} h^1(s^1, s^2)$$

至此（2.1）式证毕。

假设 s_0 是一个均衡点；即对于所有的 s^1 和 s^2，

$$h^1(s^1, s_0^2) \leqslant h^1(s_0^1, s_0^2) = v \leqslant h^1(s_0^1, s^2)$$

那么对于所有的 s^1 和 s^2，

$$\begin{aligned}\max_{s^1} \min_{s^2} h^1 &\geqslant \min_{s^2} h^1(s_0^1, s^2) \geqslant h^1(s_0^1, s_0^2) \\ &= v \geqslant \max_{s^1} h^1(s^1, s_0^2) \geqslant \min_{s^2} \max_{s^1} h^1(s^1, s^2)\end{aligned}$$

结合（2.1）式，可以得到

$$\max_{s^1} \min_{s^2} h^1 = \min_{s^2} \max_{s^1} h^1$$

反之，最后假设

$$\max_{s^1} \min_{s^2} h^1 = \min_{s^2} \max_{s^1} h^1$$

设左端最大值达到 s_0^1，即

$$\max_{s^1} \min_{s^2} h^1(s^1, s^2) = \min_{s^2} h^1(s_0^1, s^2)$$

相似地，设

$$\min_{s^2} \max_{s^1} h^1(s^1, s^2) = \max_{s^1} h^1(s_0^1, s^2)$$

对于所有的 s^1 和 s^2，因此我们有

$$h^1(s_0^1, s^2) \geqslant \min_{s^2} h^1(s_0^1, s^2) = \max_{s^1} h^1(s^1, s_0^2) \geqslant h^1(s^1, s_0^2)$$

用 s_0 代替 s 得到

$$h^1(s_0^1, s_0^2) = \max_{s^1} \min_{s^2} h^1 = \min_{s^2} \max_{s^1} h^1$$

因此

$$h^1(s^1, s_0^2) \leqslant h^1(s_0^1, s_0^2) \leqslant h^1(s_0^1, s^2)$$

因此 s_0 是一个均衡点，命题证明完毕。

下面我们介绍“博弈的混合扩展”的概念。

2.13 **例**：考虑前面介绍的“猜硬币”博弈。可以解释为每个局中人说出硬币的不同面。如果两枚硬币都是正面或者都是反面，则局中人 1 获胜，否则，局中人 2 获胜。我们已经知道这个博弈没有最小最大值，或者等效地说，没有均衡点。作为推论，既然一个局中人可以猜出结果并获胜，那么博弈系统就不能由一个局中人来维持。所以最后每个局中人都是随机参与，即每个局中人到墙角掷一枚硬币然后把正反面展示给大家。这种方式的随机博弈等同于选择胜率各为 $\frac{1}{2}$ 的两种策略。如果一个局中人随机选择，他的期望收益为 0，不论另一个局中人的策略是什么。我们发现随机博弈扩大了策略选择的可能性。每个局中人现在可以在一个连续区间内选择，我们可以用单位区间来表示这个连续区间。我们定义一种新的博弈：

$$N = \{1,2\}$$

$$S^1 = \{p: 0 \leqslant p \leqslant 1\},\ S^2 = \{q: 0 \leqslant q \leqslant 1\}$$

并且

$$\begin{aligned} H^1(p,q) &= pq \cdot 1 - (1-p)q \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot 1 \\ &\quad - (1-q)p \cdot 1 \\ &= (1-2p)(1-2q) \end{aligned}$$