“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材（配套用书）
普通高等教育电子信息类专业“十三五”规划教材

电磁场与电磁波(第4版)

学习辅导

冯恩信 张安学 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材（配套用书）

普通高等教育电子信息类专业"十三五"规划教材

电磁场与电磁波(第4版)

学习辅导

冯恩信 张安学 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

电磁场与电磁波是电子信息类专业的一门技术基础课。本课程内容是电子信息类专业本科学生所具备的知识结构中的重要组成部分。本书是冯恩信编写的《电磁场与电磁波》(第4版,西安交通大学出版社)教材的配套辅导书。本书按其配套教材也分为矢量场、静电场、恒定电流场、恒定磁场、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波和电磁辐射与天线等8章。每章包括5部分,分别为主要内容关系、重点要求、复习提要、典型题解及课后习题解答。

本书适合作为电子信息类专业本科学生电磁场与电磁波的学习辅导书,也可供其他讲授或学习电磁场与电磁波基础的教师和学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波(第4版)学习辅导/冯恩信,张安学编著.
—西安:西安交通大学出版社,2017.8
ISBN 978-7-5605-9866-6

Ⅰ.①电… Ⅱ.①冯… ②张… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料 ②电磁波-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第158557号

书　　名 电磁场与电磁波(第4版)学习辅导
编　　著 冯恩信　张安学
责任编辑 屈晓燕　季苏平

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西日报社

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张** 11.25　**字数** 270千字
版次印次 2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-9866-6
定　　价 25.00元

读者购书、书店添货,如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954　QQ:8377981
读者信箱:lg_book@163.com

前　言

电磁场与电磁波是电子信息类专业的技术基础课，本课程内容是电子信息类专业学生所具备的知识结构中的重要组成部分。电磁场与电磁波课程中的基本物理量是矢量场，内容比较抽象，被认为是一门教师难教、学生难学的课程。

自从笔者编写的《电磁场与电磁波》第1版出版以后，有不少学生和读者希望能有一本与教材内容配套的教学辅导书，以方便在学习过程中参考。应广大学生和读者的要求，在出版社的大力支持下，配合第2版教材，我们编写了配套的教学辅导书。这次为配合《电磁场与电磁波》第4版学习，我们也相应修订了辅导书。

本书是笔者编写的《电磁场与电磁波》(第4版，西安交通大学出版社)的配套辅导书。希望能帮助使用该教材的读者理解和掌握本课程的基本要求和重点内容，正确理解电磁场与电磁波的基本概念、规律和方法。

本书内容按配套教材，也分为8章，包括矢量场、静电场、恒定电流场、恒定磁场、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁辐射与天线。

每章包含5个部分。第1部分是主要内容关系，给出了每一章的主要内容和它们之间的关系；第2部分是每章的重点要求；第3部分是复习提要，帮助读者对每章内容进行总结；第4部分是典型题解，详细分析和解答大量的例题，使读者加深对理论内容的理解和掌握，拓宽解题思路，提高解题技巧；第5部分是课后习题答案。

本书第1至4章由张安学博士修订，其余部分由冯恩信修订。

本书参考了近年来国内外相关的教材和参考书，吸收了很多有益的经验，受到不少启发。对为本书的的修订和出版给予帮助和支持的编辑和广大读者，在此一并表示衷心的感谢。

书中若有不妥或错误之处，敬请读者批评指正。

编著者

2017年2月于西安交通大学

目　录

第 1 章　矢量场

一、主要内容关系

- 矢量场
  - 矢量
    - 矢量的定义
    - 矢量的表示方法
      - 数学符号表示
      - 几何表示
      - 坐标分量表示
    - 矢量的代数运算
      - 两矢量的和与差
      - 标量乘以矢量
      - 两矢量的标积和矢积
      - 矢量的混合运算
  - 矢量场在三种坐标系中的表示
    - 直角坐标系
    - 圆柱坐标系
    - 圆球坐标系
  - 矢量场的微分和源
    - 标量场的方向导数和梯度
    - 矢量场的通量和散度、高斯定理
    - 矢量场的环量和旋度、斯托克斯定理
  - 几个定理
    - 格林定理
    - 亥姆霍兹定理
    - 唯一性定理

二、重点要求

1)矢量及其矢量场

熟练掌握矢量的表示方法和矢量的运算法则，掌握矢量场的概念。

2)三种常用坐标系中的矢量场

掌握在直角、圆柱和圆球三种常用坐标系中空间位置点和矢量的表示方法，了解在三种常用坐标系之间矢量场的坐标和坐标分量之间的关系。

3)梯度

熟悉标量场梯度的意义、梯度和方向导数的关系以及在三种常用坐标系中怎样计算梯度，了解梯度的运算规则。

4)散度

熟悉矢量场通量和散度的意义以及在三种常用坐标系中怎样计算散度，了解散度的运算规则，掌握高斯定理的意义。

5)旋度

熟悉矢量场环量、环量强度和旋度的意义以及在三种常用坐标系中怎样计算旋度，了解旋度的运算规则，掌握斯托克斯定理的意义。

6)无旋场与无散场

熟悉无旋场与无散场的特点，掌握亥姆霍兹定理的物理意义，了解在无界空间中矢量场的确定条件。

7)格林定理

掌握标量格林定理的物理意义及其公式表示。

8)唯一性定理

掌握唯一性定理的物理意义，以及在有界空间中矢量场的唯一性确定条件。

三、复习提要

1. 矢量及其矢量场

(1)标量与矢量。

(2)矢量的表示方法。矢量可用符号表示、几何表示、坐标分量表示。

矢量的坐标表示：

$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

矢量可用其大小和单位矢量表示：

$$\mathbf{A} = A\hat{a}$$

(3)矢量的代数运算。

矢量的加减法 $$\mathbf{A}\pm\boldsymbol{B}=(A_x\pm B_x)\hat{x}+(A_y\pm B_y)\hat{y}+(A_z\pm B_z)\hat{z}$$

点积 $$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

矢积 $$\mathbf{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

(4) 标量场与矢量场。

2. 三种常用坐标系中的矢量场

(1)三种常用坐标系：直角坐标系、圆柱坐标系、圆球坐标系。三种常用坐标系的坐标分别为(x,y,z)，(ρ,φ,z)，(r,θ,φ)。

直角坐标系的坐标轴单位矢量为 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$，即

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

圆柱坐标系的坐标轴单位矢量为 $\hat{\rho},\hat{\varphi},\hat{z}$，即

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = A_\rho(\boldsymbol{r})\hat{\rho} + A_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\varphi} + A_z(\boldsymbol{r})\hat{z}$$

圆球坐标系的坐标轴单位矢量为 $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$，即

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = A_r(\boldsymbol{r})\hat{r} + A_\theta(\boldsymbol{r})\hat{\theta} + A_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\varphi}$$

位置矢量

$$\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \hat{\rho} + z\hat{z} = r\hat{r}$$

距离矢量

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$$

(2)矢量场直角坐标系中的坐标分量和圆柱坐标系中的坐标分量的关系用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

(3)矢量场圆球坐标系中坐标分量与直角坐标系中的坐标分量的关系用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

(4)正交曲面坐标系中的微分线元、面元及体积元。

直角坐标系中的线元、面元及体积微元分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{x}\mathrm{d}x + \hat{y}\mathrm{d}y + \hat{z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \hat{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \hat{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \hat{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

圆柱坐标系中的线元、面元及体积微元分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{\rho}\mathrm{d}\rho + \hat{\varphi}\rho\mathrm{d}\varphi + \hat{z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \hat{\rho}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z + \hat{\varphi}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z + \hat{z}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$$

圆球坐标系的中的线元、面元及体积微元分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \hat{r}\mathrm{d}r + \hat{\theta}r\,\mathrm{d}\theta + \hat{\varphi}r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \hat{r}r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \hat{\theta}r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi + \hat{\varphi}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

3. 梯度

(1)标量的方向导数

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}$$

(2)标量的梯度

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi = \hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \hat{l}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

(3)在圆柱坐标系中,有

$$\nabla\Phi=\hat{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

(4)在圆球坐标系中,有

$$\nabla\Phi=\hat{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

(5)$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$, $\nabla'\frac{1}{R}=\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$

4. 矢量场的散度

(1)矢量场的通量

$$\Psi=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(2)矢量场的散度定义及计算公式。

散度定义

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

在直角坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

在圆柱坐标系及圆球坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

(3)高斯定理

$$\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

5. 矢量场的旋度

(1)矢量场的环量

$$\Gamma=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

(2)旋度定义及计算公式。

旋度定义

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\hat{n}_{\max}\left\{\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta s}\right\}_{\max}$$

直角坐标系中,矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度用行列式表示为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

圆柱坐标系和圆球坐标系中，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可分别用行列式表示为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

(3)斯托克斯定理

$$\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

6. 无旋场与无散场

(1)亥姆霍兹定理。若矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在无限空间中处处单值，且其导数连续有界，源分布在有限区域中，则当矢量场的散度及旋度给定后，该矢量场可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

式中

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

(2)无界空间中，矢量场由其散度及旋度确定，可分为无旋场和无散场；有界空间中，根据区域中矢量场散度及旋度是否为 0，矢量场可分为 4 类。

7. 格林定理

标量格林定理：若任意两个标量场 Φ 及 Ψ 在有界空间区域 V 中具有连续的二阶偏导数，在包围区域 V 的封闭面 S 上，具有连续的一阶偏导数，则标量场 Φ 及 Ψ 满足下列等式：

$$\iiint_V(\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\oint_S\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$\iiint_V(\Psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V=\oint_S\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

8. 矢量场的唯一性定理

矢量场的唯一性定理：在空间某一有界区域 V 中的矢量场，当其在该区域 V 中的散度、旋度以及边界面 S 上的切向分量或法向分量给定后，则该区域中的矢量场被唯一地确定。

四、典型题解

1-1　已知 $\boldsymbol{A}=5\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z}$，$\boldsymbol{B}=2\hat{x}+3\hat{y}-2\hat{z}$。求：(a)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小(模)；(b)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量；(c)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(d) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$；(e)直角坐标系中，$\boldsymbol{A}$ 在三个坐标轴上的投影。

解　(a)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}=\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{35}$$

$$B=|\boldsymbol{B}|=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}=\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$$

(b)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量

$$\hat{a}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=\frac{1}{\sqrt{35}}(5\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z})=\frac{5}{\sqrt{35}}\hat{x}+\frac{3}{\sqrt{35}}\hat{y}-\frac{1}{\sqrt{35}}\hat{z}$$

$$\hat{b}=\frac{\boldsymbol{B}}{B}=\frac{1}{\sqrt{17}}(2\hat{x}+3\hat{y}-2\hat{z})=\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{x}+\frac{3}{\sqrt{17}}\hat{y}-\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{z}$$

(c)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=10+9+2=21$

(d)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 5 & 3 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=-3\hat{x}+8\hat{y}+9\hat{z}$

(e)$\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影：$\boldsymbol{A}\cdot\hat{x}=A_x=5$

$\boldsymbol{A}$ 在 y 轴上的投影：$\boldsymbol{A}\cdot\hat{y}=A_y=3$

$\boldsymbol{A}$ 在 z 轴上的投影：$\boldsymbol{A}\cdot\hat{z}=A_z=-1$

1-2 将圆柱坐标系中的矢量场 $\boldsymbol{F}(\rho,\varphi,z)=2\hat{\rho}+3\hat{\varphi}$ 用直角坐标系中的坐标分量表示。

解 根据

$$\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_\rho\\ A_\varphi\\ A_z\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos\varphi-3\sin\varphi\\ 2\sin\varphi+3\cos\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(2\cos\varphi-3\sin\varphi)\hat{x}+(2\sin\varphi+3\cos\varphi)\hat{y}$$

又因为

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ z=z\end{cases}$$

所以

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}[(2x-3y)\hat{x}+(2y+3x)\hat{y}]$$

1-3 将圆球坐标系中的矢量场 $\boldsymbol{F}(r,\theta,\varphi)=5\hat{r}+2\hat{\theta}$ 用直角坐标系中的坐标分量表示。

解 根据

$$\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_r\\ A_\theta\\ A_\varphi\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\sin\theta\cos\varphi-2\sin\varphi\\5\sin\theta\sin\varphi+2\cos\varphi\\5\cos\theta\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\hat{x}(5\sin\theta\cos\varphi-2\sin\varphi)+\hat{y}(5\sin\theta\sin\varphi+2\cos\varphi)+\hat{z}5\cos\theta$$

又因为

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

得

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{x}+\left(\frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{y}+\frac{5z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{z}$$

1－4　求标量场 $f(x,y,z)=3xy+2yz^2$ 在点(1,1,1)沿 $\boldsymbol{l}=x\hat{x}-2\hat{y}+\hat{z}$ 方向的变化率。

解　标量场沿某一方向的变化率为该标量的梯度在这一方向上的投影。标量场的梯度为

$$\nabla f=\hat{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}=3y\hat{x}+(3x+2z^2)\hat{y}+4yz\hat{z}$$

$\boldsymbol{l}$ 的方向矢量为

$$\hat{l}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2^2+1}}(x\hat{x}-2\hat{y}+\hat{z})$$

标量场 f 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\nabla f\cdot\hat{l}=\frac{3xy-2(3x+2z^2)+4yz}{\sqrt{x^2+5}}$$

所以，沿 $\hat{l}$ 方向的变化率为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{3}{\sqrt{6}}$$

1－5　计算下列矢量场的散度

(a) $\boldsymbol{F}=yz\hat{x}+zy\hat{y}+xz\hat{z}$

(b) $\boldsymbol{F}=\hat{\rho}+\rho\hat{\varphi}$

(c) $\boldsymbol{F}=2\hat{r}+r\cos\theta\hat{\theta}+r\hat{\varphi}$

解　(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial F_x}{\partial x}+\dfrac{\partial F_y}{\partial y}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}=z+x$

(b) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}=\dfrac{1}{\rho}$

(c) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}=\dfrac{4}{r}-\sin\theta+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

1－6 在圆球坐标系中，矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r^2}\hat{r}$，证明矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 为无旋场。

证明 因为

$$\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\nabla\times(\frac{1}{r^2}\hat{r})=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{1}{r^2} & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

所以 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 为无旋场。

1－7 求矢量场 $\boldsymbol{F}=\rho\hat{\rho}+\hat{\varphi}+z\hat{z}$ 穿过由 $\rho\leqslant1$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant z\leqslant1$ 确定的区域的封闭面的通量。

解 可以利用高斯定理来求解。因为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=2+1=3$$

利用高斯定理

$$\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\iiint_V3\mathrm{d}V=3\pi/2$$

1－8 证明任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 均满足如下等式

$$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=-\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中，S 为包围体积 V 的闭合表面，此式又称为矢量斯托克斯定理。

证 设 $\boldsymbol{C}$ 为任一常矢量，则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

那么对于任一体积 V，得

$$\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=-\boldsymbol{C}\cdot\int_V\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

根据高斯定理，上式等号左端应为

$$\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_S(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以得

$$-\boldsymbol{C}\cdot\int_V\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\boldsymbol{C}\cdot\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由常矢量 $\boldsymbol{C}$ 的任意性，可得

$$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=-\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1－9 已知 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$，$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，计算 $\boldsymbol{F}$。

解 根据亥姆霍兹定理

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

其中

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

由于$\nabla \times \boldsymbol{F}=0$,因此 $\boldsymbol{A}=0$。对于$\nabla \cdot \boldsymbol{F}=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$,有

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\delta(x')\delta(y')\delta(z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2}$$

1-10　已知$\nabla \cdot \boldsymbol{F}=0$, $\nabla \times \boldsymbol{F}=\hat{z}\delta(x)\delta(y)\delta(z)$,计算 $\boldsymbol{F}$。

解　根据亥姆霍兹定理

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

其中

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

由于$\nabla \cdot \boldsymbol{F}=0$,因此 $\Phi=0$。对于$\nabla \times \boldsymbol{F}=\hat{z}\delta(x)\delta(y)\delta(z)$,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\hat{z}\delta(x')\delta(y')\delta(z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \\ &= \hat{z}\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi r}(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{\hat{\varphi}}{r}\left(r\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) = \frac{\sin\theta}{4\pi r^2}\hat{\varphi}$$

五、课后习题答案

1.1　(a)$A=3.74$;$B=2.45$

(b)$\hat{a}=0.535\hat{x}+0.802\hat{y}-0.267\hat{z}$; $\hat{b}=0.408\hat{x}+0.408\hat{y}-0.816\hat{z}$

(c)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=7$

(d) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-5\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z}$

(e) $\alpha=40.19°$

(f) $\boldsymbol{A}\cdot\hat{b}=2.86$

1.4 $\alpha=-5$

1.5 三角形的面积为 $\Delta=10.6$

1.6 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_Q-\boldsymbol{r}_P=-3\hat{x}-15\hat{y}$;$R=15.3$

1.7 $\hat{C}=0.169\hat{x}+0.507\hat{y}+0.845\hat{z}$

1.8 $\hat{x}=\cos\varphi\hat{\rho}-\sin\varphi\hat{\varphi}=\sin\theta\cos\varphi\hat{r}+\cos\theta\cos\varphi\hat{\theta}-\sin\varphi\hat{\varphi}$

$\hat{y}=\sin\varphi\hat{\rho}+\cos\varphi\hat{\varphi}=\sin\theta\sin\varphi\hat{r}+\cos\theta\sin\varphi\hat{\theta}+\cos\varphi\hat{\varphi}$

1.9 $2\hat{\rho}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\hat{x}+y\hat{y})$;$3\hat{\varphi}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\hat{y}-y\hat{x})$

1.10 $5\hat{r}=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})$

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}[-\hat{z}(x^2+y^2)+xz\hat{x}+yz\hat{y}]$$

1.11 $d=3.56$

1.12 (a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=5\hat{\rho}+9\hat{\varphi}-\hat{z}$

(b)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=31\hat{\rho}-17\hat{\varphi}+2\hat{z}$

(c)$\hat{a}=\dfrac{3\hat{\rho}+5\hat{\varphi}-4\hat{z}}{\sqrt{50}}$;$\hat{b}=\dfrac{1}{5.385}(2\hat{\rho}+4\hat{\varphi}+3\hat{z})$

(d)$\theta=68.4^\circ$

(e)$A=7.071$;$B=5.385$

(f) $\boldsymbol{A}\cdot\hat{b}=2.6$

1.13 (a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=12\hat{y}$

(b)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=11$

(c)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角 $\theta=5.17^\circ$

1.14 $d=10.87$,$\boldsymbol{d}=-5.535\hat{x}-6.122\hat{y}-7.07\hat{z}$

1.15 (a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=5\hat{r}+9\hat{\varphi}$

(b)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=25$

(c)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{r}+\hat{\theta}+5\hat{\varphi}),\quad \hat{b}=\frac{1}{\sqrt{21}}(2\hat{r}-\hat{\theta}+4\hat{\varphi})$$

(d)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角 $\theta=22.75^\circ$

(e)$A=5.92$; $B=4.58$

(f)$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的投影 $\boldsymbol{A}\cdot\hat{b}=5.455$

1.16 $\nabla f=3x^2y^2z\hat{x}+2x^3yz\hat{y}+x^3y^2\hat{z}$

1.17 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

1.19 $\nabla f=\hat{\rho}\cos\varphi-\hat{\varphi}\sin\varphi$

1.21 $\nabla f=\hat{r}2r\sin\theta\cos\varphi+\hat{\theta}r\cos\theta\cos\varphi-\hat{\varphi}r\sin\varphi$

1.22 $\nabla\rho=\hat{\rho}$; $\nabla r=\hat{r}$; $\nabla \mathrm{e}^{kr}=\hat{r}k\mathrm{e}^{kr}$

1.27 (a) $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = z + x$

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \dfrac{1}{\rho}$

(c) $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \dfrac{4}{r} - \sin\theta + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

1.28 $\nabla \cdot (\rho\hat{\rho}) = 2$; $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$; $\nabla \cdot (\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = k^2\mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

1.30 (a) $\nabla^2 f = 2z$

(b) $\nabla^2 f = \dfrac{1}{\rho}$

(c) $\nabla^2 f = \dfrac{2}{r}$

1.31 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 3\pi/2$

1.33 $\nabla \times \boldsymbol{F} = -2y\hat{x} - x\hat{z}$

1.34 $\nabla \times \boldsymbol{\rho} = 0$; $\nabla \times (z\hat{\rho}) = \hat{\varphi}$; $\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$; $\nabla \times \hat{\varphi} = \hat{r}\,\dfrac{\cos\theta}{r\sin\theta} - \hat{\theta}\,\dfrac{1}{r}$

1.35 $\boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$

1.39 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\hat{r}}{4\pi r^2}$

1.40 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\sin\theta}{4\pi r^2}\hat{\varphi}$