# 高等代数学习指导

主　编　赵云河　王　林
副主编　王　刚　马招丽

科学出版社

# 高等代数学习指导

主　编　赵云河　王　林
副主编　王　刚　马招丽



科 学 出 版 社
北　京

## 内 容 简 介

本书是作者结合长期从事高等代数教学的经验和体会，并注重借鉴和吸收国内外优秀教材的习题优点编写而成的，旨在为读者提供丰富的基础题、概念题，从而加深对基本概念、基本理论的理解，提高逻辑推理能力和解题的技能、技巧. 全书由基本概念、多项式、行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、线性变换、欧氏空间和酉空间、二次型等 9 章组成，每章包括知识概要、重点与难点、学习目标、练习(A)（计算、证明题）、练习(B)（单项选择题），书后有练习参考答案，并在书末附有两套测试题及解答. 练习部分注重习题类型的合理搭配及难易梯度，以满足不同学习目标的学生的需求.

本书可作为张禾瑞、郝鈵新编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等代数(第五版)》及其他相应教材的学习参考书，也可作为硕士研究生入学考试的复习资料.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等代数学习指导/赵云河，王林主编. —北京：科学出版社，2017.11
ISBN 978-7-03-054533-6

Ⅰ.①高… Ⅱ. ①赵… ②王… Ⅲ.①高等代数–高等学校--教学参考资料
Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 228862 号

责任编辑：王 静／责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 11 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2018 年 1 月第二次印刷 印张：16 1/2
字数：391 000

**定价：39.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

高等代数是数学专业的一门核心基础课, 同时也是对数学基础有较高要求的金融数学、统计学、计算机科学及应用和某些经济学专业的一门重要基础课, 其对学习者的数学能力的培养、后续专业课程学习至关重要. 高等代数以其内容的高度抽象、体系的严谨、逻辑推理能力要求高等特点, 使得学生在学习中对高等代数中的许多概念、证明感到难以理解和掌握. 突破这一学习难点的有效方法就是多练习, 特别是要注重基础题、概念题的训练.

在数学教育活动中, 无论是学生数学概念的形成、数学命题的理解、数学方法技能的掌握, 还是学生智力的培养和发展, 都离不开 “解题”. 但现行的高等代数教材及辅导书中的基础题、概念题较少, 学生解题时普遍感到抽象, 没有解题的思路, 总结不出一般的思考方法. 为此, 我们根据多年的教学积累及实践, 特别编写这一练习册形式的复习指导书, 为学生提供丰富的基础题和概念题, 旨在加深学生对基本概念、基本理论的理解, 提高逻辑推理能力和解题的技能、技巧.

本书内容包括基本概念、多项式、行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、线性变换、欧氏空间和酉空间、二次型等 9 章, 每章包括知识概要、重点与难点、学习目标、练习 (A)(计算、证明题)、练习 (B)(单项选择题), 书后有练习参考答案, 并在书末附有两套测试题及解答.

本书的主要特点有:

(1) 结合作者长期从事高等代数的教学经验和体会, 并注重借鉴和吸收国内外优秀教材的习题优点, 加强学生对概念的理解, 提高计算能力, 培养学生数学素养, 注重基础题、概念题的选择.

(2) 以张禾瑞、郝钢新编写的普通高等教育 “十一五” 国家级规划教材《高等代数 (第五版)》的体系、结构为蓝本, 设计复习与练习册, 注重保持与该教材的科学性、系统性和完整性的统一.

(3) 注重习题类型的合理搭配及习题的难易梯度, 满足不同学习目标的学生的需求.

参与本书编写的人员是多年从事高等代数教学的教师. 全书由赵云河、王林任主编, 王刚、马招丽任副主编. 本书是在从 2011 年开始在云南财经大学 “经济学创新人才培养基地班” 以及统计学、金融数学等专业反复使用的教学资料的基础上, 几经修改而成的.

在本书的编写过程中, 参考了众多的国内外教材及教学辅导书, 并得到了同事、科学出版社编辑的关心和支持. “经济学创新人才培养基地班”2015 级的同学为本书的录入、校对做了大量工作, 在此一并表示感谢.

在编写中难免存在不妥或可商榷之处, 恳请各位读者指教并提出宝贵意见.

作　者

2017 年 3 月 18 日

# 目　　录

# 第一章　基本概念

## 一、知识概要

1. 把具有某种属性的事物的全体, 或是一些确定对象的汇总称为**集合或集**, 组成集合的事物叫做该集合的**元素**. 常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素. 如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素, 就说 $a$ **属于**$A$, 记作 $a \in A$; 否则, 就说 $a$ **不属于**$A$, 记作 $a \notin A$.

含有有限多个元素的集合称为**有限集合**, 由无限多个元素组成的集合称为**无限集合**, 不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$. 如果一个集合 $A$ 是由一切具有某一性质的元素所组成的, 就用记号 $A = \{x|x具有某一性质\}$ 来表示. 集合的特性: 确定性、互异性、无序性.

设 $A, B$ 是两个集合, 如果集合 $A$ 的每一元素都是集合 $B$ 的元素, 就说 $A$ 是 $B$ 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 约定空集 $\varnothing$ 是任意集合的子集. 如果集合 $A$ 与 $B$ 是由完全相同的元素组成的, 就说 $A$ 与 $B$ **相等**, 记作 $A = B$. 显然 “$A = B$”$\Leftrightarrow$“$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$”.

由集合 $A$ 的一切元素和集合 $B$ 的一切元素所组成的集合叫做 $A$ 与 $B$ 的**并集**, 记作 $A \cup B$; 由集合 $A$ 与 $B$ 的公共元素所组成的集合叫做 $A$ 与 $B$ 的**交集**, 记作 $A \cap B$. 属于集合 $A$ 但不属于集合 $B$ 的元素所组成的集合叫做 $A$ 与 $B$ 的**差**, 记作 $A - B$.

设 $A, B$ 是两个集合, $A \times B = \{(a, b)\,|a \in A, b \in B\}$ 称为 $A$ 与 $B$ 的**笛卡儿积**. $A \times B$ 是由一切元素对 $(a, b)$ 所成的集合, 其中第一个位置的元素 $a$ 取自 $A$, 第二个位置的元素 $b$ 取自 $B$.

我们约定: $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合, $\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合, $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合, $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合, $\mathbf{C}$ 表示全体复数的集合.

2. 设 $A, B$ 是两个非空集合, $A$ 到 $B$ 的一个**映射**指的是一个对应法则, 也就是, 对于集合 $A$ 中每一元素 $x$, 有集合 $B$ 中一个唯一确定的元素 $y$ 与它对应, 常用字母 $f, g, \cdots$ 表示映射. $f: A \to B$ 表示 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射. 如果通过映射 $f$, $B$ 中与 $A$ 中的元素 $x$ 相对应的元素是 $y$, 就写为 $f: x \mapsto y$, $y$ 叫做元素 $x$ 在 $f$ 之下的**像**, 记作 $f(x)$, $x$ 叫做元素 $y$ 在 $f$ 之下的一个**原像**.

若 $f: A \to B$, 那么 $A$ 中一切元素 $x$ 的像就是 $B$ 的一个子集, 用 $f(A)$ 表示, 即 $f(A) = \{f(x)\,|x \in A\} \subseteq B$, 它叫做 **$A$ 在 $f$ 之下的像**, **或映射 $f$ 的像**.

(1) 如果 $f(A) = B$, 就称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个**满射**. $f: A \to B$ 是满射的充分必要条件是对于 $B$ 中的每一个元素 $y$, 都有 $A$ 中元素 $x$ 使得 $f(x) = y$.

(2) 如果对于 $A$ 中任意两个元素 $x_1$ 和 $x_2$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 就称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个**单射**. 等价叙述: “$f$ 是单射”$\Leftrightarrow$“若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$”.

(3) 如果 $f: A \to B$ 既是满射又是单射, 就称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的**双射**. 如果存在集合 $A$ 到 $B$ 的一个双射, 也说在 $A$ 与 $B$ 的元素之间存在着**一一对应**.

设 $f: A \to B$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射, $g: B \to C$ 是 $B$ 到 $C$ 的一个映射, 规定 $g \circ f: A \to C$; 对一切 $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $g \circ f$ 称为 $f$ 与 $g$ 的**合成**.

若给定映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$, 那么 $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ 都是 $A$ 到 $D$ 的映射, 且 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

设 $A$ 是任意一个集合对于每一个 $x \leftarrow A$, 令 $f(x) = x$ 与它对应: $f: x \mapsto x$. 这个映射称为集合 $A$ 的**恒等映射**.

设 $j_A$ 和 $j_B$ 分别是非空集合 $A, B$ 上的**恒等映射**, 令 $f: A \to B$ 是集合 $A$ 到 $B$ 的一个映射, 那么以下两个条件等价:

(1) $f$ 是一个双射;

(2) 存在 $B$ 到 $A$ 的一个映射 $g$, 使得 $g \circ f = j_A$, $f \circ g = j_B$, 并且当条件 (2) 成立时, 映射 $g$ 是由 $f$ 唯一确定的.

满足条件 (2) 的映射 $g: B \to A$ 叫做 $f$ 的**逆映射**, 记作 $f^{-1}$.

设 $A$ 是一个非空集合, 那么 $A \times A$ 到 $A$ 的映射叫做集合 $A$ 的一个**代数运算**.

3. 正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的任意一个非空子集 $S$ 必含有一个最小数, 即存在数 $a \in S$, 对于任意 $c \in S$, 都有 $a \leqslant c$.

**第一数学归纳法原理**　设有一个与正整数 $n$ 有关的命题. 如果① 当 $n = 1$ 时, 命题成立; ② 假设 $n = k$ 时命题成立, 则 $n = k + 1$ 时命题也成立. 那么这个命题对于一切正整数 $n$ 都成立.

**第二数学归纳法原理**　设有一个与正整数 $n$ 有关的命题. 如果① 当 $n = 1$ 时, 命题成立; ② 假定命题对于一切小于 $k$ 的自然数成立, 则命题对于 $k$ 也成立. 那么这个命题对于一切正整数 $n$ 都成立.

4. 设 $a$, $b$ 是两个整数, 如果存在一个整数 $d$, 使得 $b = ad$, 就说 $a$ **整除** $b$(或 $b$ 被 $a$ 整除), 用符号 $a|b$ 表示, 这时 $a$ 叫做 $b$ 的一个**因数**, $b$ 叫做 $a$ 的一个**倍数**. 如果 $a$ 不整除 $b$, 就记作 $a \nmid b$. 注意, 我们知道整数的加、减、乘仍是整数, 而整数的商 (除数不为 0) 不一定是整数, 因而整数的整除性不是整数的运算, 而是整数间的一种关系.

整除的基本性质:

(1) $a|b, b|c \Rightarrow a|c$;

(2) $a|b, a|c \Rightarrow a|(b+c)$;

(3) $a|b$, 而 $c \in \mathbf{Z} \Rightarrow a|bc$;

(4) $a|b_i$, 而 $c_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, 2, \cdots, t \Rightarrow a|(b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_tc_t)$;

(5) 每一个整数都可以被 1 和 $-1$ 整除;

(6) 每一个整数都可以被它自己和它的相反数整除;

(7) $a|b$ 且 $b|a \Rightarrow b = a$ 或 $b = -a$.

(带余除法) 设 $a$, $b$ 是整数且 $a \neq 0$, 那么存在一对整数 $q$ 和 $r$, 使得 $b = aq + r$ 且 $0 \leqslant r < |a|$. 满足以上条件的整数 $q$ 和 $r$ 是唯一确定的, $q$ 和 $r$ 分别称为 $a$ 除 $b$ 所得的**商**和**余数**.

设 $a$, $b$ 是两个整数, 如果存在一个整数 $d$ 满足:

(1) $d|a$ 且 $d|b$(即 $d$ 是 $a$ 和 $b$ 的一个公因数);

(2) 如果 $c \in \mathbf{Z}$, 且 $c|a$, $c|b$, 就有 $c|d$(即 $d$ 能被 $a$ 和 $b$ 的任一公因数整除), 则称 $d$ 为 $a$ 与 $b$ 的一个**最大公因数**. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公因数类似定义. 注意, "最大公因数" 中的 "最大" 的含义非 "公因数中的最大者", 而是能被任一公因数整除的公因数.

任意 $n(n \geqslant 2)$ 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都有最大公因数. 若 $d$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个最大公因数, 那么 $-d$ 也是一个最大公因数; $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的两个最大公因数至多相差一个符号, 非负的那一个记作 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

设 $d$ 是整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个最大公因数, 那么存在整数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n = d$. 但反之不成立.

设 $a, b \in \mathbf{Z}$, 若 $(a, b) = 1$, 则称 $a$, $b$**互素**; 一般地, 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{Z}$, 若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$, 则称这 $n$ 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$**互素**. $n$ 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素的充要条件是存在整数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n = 1$.

一个正整数 $p(p > 1)$ 如果除 $\pm 1$ 和 $\pm p$ 外, 没有其他的因数, 则称 $p$ 为**素数**. 一个素数如果整除两个整数 $a$ 与 $b$ 的乘积, 那么它至少整除 $a$ 与 $b$ 中的一个.

5. 设 $S$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集, 如果对于 $S$ 中任意两个数 $a$, $b$ 来说, $a+b$, $a-b$ 和 $ab$ 都属于 $S$, 那么就称 $S$ 是一个**数环**. 设 $F$ 是一个数环, 如果①$F$含有一个不等于零的数; ②如果 $a$, $b \in F$, 且 $b \neq 0$, 则 $\dfrac{a}{b} \in F$, 那么就称 $F$ 是一个**数域**. 任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

## 二、 重点与难点

集合概念、证明集合相等.

映射的合成, 满射、单射、可逆映射的判断.

数学归纳法自身的理论证明, 数学归纳法应用中的第二步.

整除、最大公因数性质、互素有关的证明.

数环和数域的概念.

## 三、 学 习 目 标

掌握集合概念、运算、证明集合相等的一般方法.

掌握映射的概念, 映射的合成、满射、单射、可逆映射的判断.

理解最小数原理, 掌握第一数学归纳法和第二数学归纳法.

理解和掌握整除及其性质, 掌握最大公因数性质、求法, 理解互素、素数的简单性质.

掌握数环和数域的概念及判断方法.

## 四、 练 习 (A)

1. 写出含有四个元素的集合 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的一切子集.

2. 下列论断哪些是对的, 哪些是错的? 对于错的举出反例, 并把错误的论断改正过来.

(1) $x \in A \cup B$ 且 $x \notin A \Rightarrow x \in B$;　　(2) $x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$;

(3) $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$;　　(4) $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$.

3. 证明下列等式:

(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(2) $A \cap (A \cup B) = A$;

(3) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

4. 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 令 $f: x \mapsto 2^x$, 证明 $f$ 是全体实数 $\mathbf{R}$ 到全体正实数 $\mathbf{R}^+$ 的双射.

5. 设 $f$ 定义如下: $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2x - 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$ 问: $f$ 是不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射, 是不是单射, 是不是满射?

6. 设 $\mathbf{R}^+$ 是全体正实数所构成的集合, 令 $f: x \mapsto x$, $g: x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^+$.

(1) $g$ 是不是 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的双射?

(2) $g$ 是不是 $f$ 的逆映射?

(3) 如果 $g$ 有逆映射, $g$ 的逆映射是什么?

7. 设 $f: A \to B$, $g: B \to C$ 是映射, 又令 $h = g \circ f$, 证明:

(1) 如果 $h$ 是单射, 那么 $f$ 也是单射;

(2) 如果 $h$ 是满射, 那么 $g$ 也是满射;

(3) 如果 $f, g$ 都是双射, 那么 $h$ 也是双射, 并且 $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8. 用数学归纳法证明: 含有 $n$ 个元素的集合的一切子集的个数等于 $2^n$.

9. 对于下列整数 $a$, $b$, 分别求出以 $a$ 除 $b$ 所得的商和余数:

(1) $a = 17$, $b = -235$;

(2) $a = -8$, $b = 2$;

(3) $a = -9$, $b = -5$;

(4) $a=-7, b=-58$.

10. 设 $a, b$ 是整数且不全为零, 而 $a=da_1, b=db_1, d, a_1, b_1 \in \mathbf{Z}$. 证明: $d$ 是 $a$ 与 $b$ 的一个最大公因数必要且只要 $(a_1, b_1)=1$.

11. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是两两互不相同的素数, 而 $a=1+p_1p_2\cdots p_n$.

(1) 证明: $p_i \nmid a (i=1,2,\cdots,n)$;　　(2) 利用 (1) 证明素数有无穷多个.

12. 证明: 如果一个数环 $S \neq \{0\}$, 那么 $S$ 含有无限多个数.

13. 证明: $S=\left\{\dfrac{m}{2^n} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{Z}\right\}$ 是一个数环. $S$ 是不是数域?

14. 证明: 两个数环的交还是一个数环; 两个数域的交还是一个数域. 两个数环的并是不是数环?

## 五、练 习 (B)

一、单项选择题

1. 设 $A$ 是含有 $n$ 个元素的集合, $A$ 中含有 $k$ 个元素的子集共有 (　　) 个.

(A) $n$;　　(B) $k$;　　(C) $\mathrm{P}_n^k$;　　(D) $\mathrm{C}_n^k$.

2. 下列定义的 $f$ 是数集 $A$ 到自身映射的是 (　　).

(A) $A$ 是一切非负实数集的集合, $f: x \mapsto \pm\sqrt{x}$;

(B) $A$ 是一切正整数的集合, $f: x \mapsto x-1$;

(C) $A$ 是前 100 个正整数的集合, $f: x \mapsto |x-50|+1$;

(D) $A$ 是全体实数集的集合, $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

3. 下列描述的映射只是满射的是 (　　).

(A) 设 $\mathbf{Z}$ 是一切正整数的集合, $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f: x \mapsto 2x$;

(B) 设$B$是非负实数的集合, $f: \mathbf{R} \to B$, $f: x \mapsto x^2$;

(C) 设$A$ 是任意一个集合, $f: A \to A$, $f: x \mapsto x$;

(D) 设 $\mathbf{R}$ 是一切实数的集合, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f: x \mapsto 3x+\sin x$.

4. 下列关于映射描述错误的是 (　　).

(A) 设映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$, 则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$;

(B) 设映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$, 则 $h\circ(g\circ f)=h\circ(f\circ g)$;

(C) 映射 $f: A \to B$ 是单射的充要条件是对于 $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1=x_2$;

(D) 如果映射 $f: A \to B$ 是一个双射, 则 $f$ 一定具有逆映射.

5. 下列关于最大公因数的描述正确的是 (　　).

(A) 最大公因数中的“最大”的含义是指“公因数中的最大者”;

(B) 如果 $d$ 是整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个最大公因数, 那么 $-d$ 也是其一个最大公因数;

(C) 若 $a = 0, b \neq 0$, 则 0 是 $a$ 与 $b$ 的最大公因数;

(D) 对于整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $d$, 若存在整数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n = d$, 则 $d$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公因数.

6. 下列关于整数和素数的描述错误的是 (　　).

(A) 对于任意整数 $a$, 若 $a \neq 0, \pm 1$, 则 $a$ 可被某一素数整除;

(B) $n$ 个整数互素, 则两两互素;

(C) 一个素数如果整除两个整数 $a$ 与 $b$ 的乘积, 那么它至少整除 $a$ 与 $b$ 中的一个;

(D) 对于整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 若存在整数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n = 1$, 则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素.

7. 下列集合能构成数域的是 (　　).

(A) $F = \{a + b\mathrm{i} | a, b \in \mathbf{Q}\}$;

(B) $H = \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbf{Z}\right\}$;

(C) 全体偶数;

(D) 全体正实数.

8. 下列关于数域的描述错误的是 (　　).

(A) 实数域与复数域之间不存在其他数域;

(B) 有理数域与实数域之间存在无穷多个数域;

(C) 任何一个数域均包含整数域;

(D) 数域一定包含 0 和 1.

# 第二章　多　项　式

## 一、知识概要

1. 设 $x$ 是一个文字, $R$ 是一个数环, $a_i \in R(i=0,1,2,\cdots,n)$, 形式表达式 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ 称为数环 $R$ 上关于文字 $x$ 的**一元多项式**, 这里 $n$ 是非负整数, $a_0$ 叫做**零次项或常数项**, $a_ix^i$ 叫做 $i$ **次项**, $a_i$ 叫做 $i$ **次项系数**. $a_n \neq 0$ 时, 数环 $R$ 上的系数不全为零的多项式总可唯一地写成这种形式, 且 $a_nx^n$ 叫做该多项式的**最高次项或首项**, 非负整数 $n$ 叫做该**多项式的次数**. 一元多项式常用符号 $f(x), g(x), \cdots$ 表示, 多项式 $f(x)$ 的次数可简记为 $\partial^\circ(f(x))$. 系数全为零的多项式没有次数, 称为**零多项式**. **零次多项式**是一个不为零的常数.

若数环 $R$ 上两个一元多项式 $f(x), g(x)$ 具有完全相同的项, 或者仅差一些系数为 0 的项, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$**相等**, 记作 $f(x)=g(x)$.

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$ 是数环 $R$ 上两个多项式, 且 $m \leqslant n$. 则

(1)$f(x)$ 与 $g(x)$ 的和记为 $f(x)+g(x)$, 指的是多项式 $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots+(a_n+b_n)x^n$, 这里当 $m<n$ 时, 取 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$;

(2)$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积记为 $f(x)g(x)$, 指的是多项式 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{m+n}x^{m+n}$, 其中 $c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0(k=0,1,2,\cdots,m+n)$.

多项式的加法和乘法运算满足**加法交换律**、**加法结合律**, **乘法交换律**、**乘法结合律**、**乘法对加法的分配律**.

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数环 $R$ 上的两个多项式, 并且 $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$, 那么

(1) 当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时, $\partial^\circ(f(x)+g(x)) \leqslant \max(\partial^\circ(f(x)), \partial^\circ(g(x)))$;

(2) $\partial^\circ(f(x)g(x))=\partial^\circ(f(x))+\partial^\circ(g(x))$.

另外, $f(x)\cdot g(x)=0$ 当且仅当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个是零多项式; 若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$, 且 $f(x)\neq 0$, 那么 $g(x)=h(x)$.

以 $R[x]$ 表示数环 $R$ 上关于文字 $x$ 的多项式的全体, 并且把在其中定义了加法和乘法运算的 $R[x]$ 叫做数环 $R$ 上的一个**多项式环**.

2. 设 $F$ 是一个数域, $F[x]$ 是 $F$ 上的一元多项式环. $f(x), g(x)\in F[x]$. 如果存在 $h(x)\in F[x]$, 使 $g(x)=f(x)h(x)$, 就说 $f(x)$ 整除 (能除尽)$g(x)$, 记为 $f(x)|g(x)$, 否则记为 $f(x)\nmid g(x)$. 当 $f(x)|g(x)$ 时, 称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的一个**因式**, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的一个**倍式**.

多项式整除性具有一系列性质.

(1) 如果 $f(x)|g(x)$, $g(x)|h(x)$, 那么 $f(x)|h(x)$.

(2) 如果 $h(x)|f(x)$, $h(x)|g(x)$, 那么 $h(x)|(f(x)\pm g(x))$.

(3) 如果 $h(x)|f(x)$, 那么对于 $F[x]$ 中任意多项式 $g(x)$ 来说, $h(x)|f(x)g(x)$.

(4) 如果 $h(x)|f_i(x), i=1,2,\cdots,t$, 那么对于 $F[x]$ 中任意 $g_i(x), i=1,2,\cdots,t$, 有

$$h(x)|(f_1(x)g_1(x)\pm f_2(x)g_2(x)\pm\cdots\pm f_t(x)g_t(x)).$$

(5) 零次多项式 (即$F$中不等于零的数) 能整除任一多项式. 零多项式只能整除零多项式.

(6) 每一个多项式 $f(x)$ 都能被 $cf(x)$ 整除, 这里 $c$ 是 $F$ 中任一不等于零的数.

(7) 如果 $f(x)|g(x)$, $g(x)|f(x)$, 那么 $f(x)=cg(x)$, 这里 $c$ 是 $F$ 中一个不等于零的数.

设 $g(x)$ 和 $f(x)$ 是 $F[x]$ 的任意两个多项式, 并且 $g(x)\neq 0$, 那么在 $F[x]$ 中可以找到多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$, 使 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$, 这里要么 $r(x)=0$, 要么 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数. 满足以上条件的多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 是唯一的, 也就是说只有一对, 它们分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的**商式**和**余式**, 可以通过带余除法得到. 当且仅当 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式 $r(x)=0$ 时, $g(x)$ 整除 $f(x)$.

设数域 $\bar{F}$ 中含有数域 $F$, 而 $g(x)$ 和 $f(x)$ 是 $F[x]$ 的两个多项式, 如果在 $F[x]$ 中 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 那么在 $\bar{F}[x]$ 中 $g(x)$ 也不能整除 $f(x)$, 也就是说, 两个多项式之间的整除关系不会因为系数域的扩大而改变.

3. 令 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $F[x]$ 的两个多项式. 若 $F[x]$ 的一个多项式 $h(x)$ 同时整除 $f(x)$ 和 $g(x)$, 那么 $h(x)$ 叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**公因式**. 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式, 且能被 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的每一个公因式整除, 那么 $d(x)$ 叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因式.** $F[x]$ 的任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式, 除了零次因式外, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是唯一确定的. 通常约定, 最大公因式指的是最高次项系数是 1 的那一个, 并以符号 $(f(x),g(x))$ 表示, **辗转相除法**是求最大公因式的常用方法.

若 $d(x)$ 是 $F[x]$ 的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 则在 $F[x]$ 中可求得多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使等式

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$$

成立. 其逆命题不成立.

如果 $F[x]$ 的两个多项式除零次多项式外不再有其他的公因式, 则称这两个多项式互素. $F[x]$ 的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是: 在 $F[x]$ 中可求得多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1.$$

多项式互素具有以下性质.

(1) 若多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都与多项式 $h(x)$ 互素, 那么乘积 $f(x)g(x)$ 也与 $h(x)$ 互素.

(2) 若多项式 $h(x)$ 整除多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积, 而 $h(x)$ 与 $f(x)$ 互素, 那么 $h(x)$ 一定整除 $g(x)$.

(3) 若多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$ 都整除多项式 $f(x)$, 而 $g(x)$ 与 $h(x)$ 互素, 那么乘积 $g(x)h(x)$ 也整除 $f(x)$.

4. 令 $f(x)$ 是 $F[x]$ 的一个次数大于零的多项式, 若 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中的因式只有平凡因式 $c(c\neq 0)$ 或 $cf(x)$, 就说 $f(x)$ 在 $F$ 上 (或 $F[x]$ 中)**不可约**. 若 $f(x)$ 的因式中除平凡因式外, 在 $F[x]$ 中还有其他因式, 就说 $f(x)$ 在 $F$ 上 (或在 $F[x]$ 中)**可约**. 如果多项式 $p(x)$ 不可约, 那么 $F$ 中任一不为零的元素 $c$ 与 $p(x)$ 的乘积 $cp(x)$ 也不可约. 而对于任意多项式 $f(x)$, 要么

$p(x)$ 与 $f(x)$ 互素, 要么 $p(x)$ 整除 $f(x)$. 如果多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积能被不可约多项式 $p(x)$ 整除, 那么 $p(x)$ 至少整除其中之一.

$F(x)$ 的每一个 $n(n>0)$ 次多项式 $f(x)$ 都可以分解成 $F[x]$ 的不可约多项式的乘积. 设 $f(x)$ 是 $F[x]$ 的一个次数大于零的多项式, 并且

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),$$

此处 $p_i(x)$ 与 $q_j(x)(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$ 都是 $F[x]$ 上的不可约多项式, 那么 $r=s$, 并且适当调换 $q_j(x)$ 的次序后可使 $q_i(x)=c_ip_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$, 其中 $c_i$ 是$F$ 的不为零的元素. 将多项式 $f(x)$ 写成 $f(x)$ 的首项系数乘以互不相同的首项系数为 1 的不可约因式乘幂之积的形式:

$$f(x)=ap_1^{k1}(x)p_2^{k2}(x)\cdots p_t^{kt}(x)$$

就得到 $f(x)$ 的**典型分解式**(**或标准分解式**), 每个多项式的典型分解式是唯一确定的.

5. 设 $p(x)$ 是数域$F$ 上一个不可约多项式, 如果 $p(x)^k$($k$ 是一个非负整数) 整除$F$ 上多项式 $f(x)$, 但 $p(x)^{k+1}$ 不整除 $f(x)$, 那么 $p(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一个 $k$**重因式**. 一重因式称为**单因式**. 重数大于 1 的因式称为**重因式**. $F$上任意不等于零的数是$F$上任意多项式的**零重因式**.

设 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 $k(k>1)$ 重因式, 那么 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的一个 $k-1$ 重因式. 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充要条件是 $f(x)$ 与它的导数 $f'(x)$ 互素.

6. 给定 $R[x]$ 的一个多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 和一个数 $c\in R$, 以 $c$ 代替 $f(x)$ 中的 $x$ 得到 $R$ 的一个数 $f(c)=a_0+a_1c+\cdots+a_nc^n$, 叫做当 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值, 并且用 $f(c)$ 来表示. 由此得到 $R$ 到 $R$ 的一个映射, 它是由多项式 $f(x)$ 确定的 $R$ 上的**一个多项式函数**.

设 $f(x)\in R[x], c\in R$, 用 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的余式等于当 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值 $f(c)$. 如果 $f(c)=0$, 那么 $c$ 叫做 $f(x)$ 在数环 $R$ 中的一个根. 数 $c$ 是多项式 $f(x)$ 的根的充要条件是 $f(x)$ 能被 $x-c$ 整除. 若 $f(x)$ 的次数 $n\geqslant 1$, 那么 $f(x)$ 在 $R$ 中至多有 $n$ 个不同的根.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $R[x]$ 的两个多项式, 它们的次数都不大于 $n$, 若是以 $R$ 中 $n+1$ 个或更多的不同的数来代替 $x$ 时, 每次所得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值都相等, 那么 $f(x)=g(x)$. $R[x]$ 的两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等, 当且仅当它们所定义的 $R$ 上的多项式函数相等.

给定数环 $R$ 里 $n+1$ 个互不相同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 及任意 $n+1$ 个不全为 0 的数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}$ 后, 至多存在 $R[x]$ 的一个次数不超过 $n$ 的多项式 $f(x)$, 能使 $f(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n+1)$. 如果 $R$ 还是一个数域, 那么这样一个多项式的确存在, 如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})},$$

这个公式叫做**拉格朗日**(Lagrange)**插值公式**.

7. 代数基本定理: 任何 $n(n>0)$ 次多项式在复数域中至少有一个根.

任何 $n(n>0)$ 次多项式在复数域中有 $n$ 个根 (重根按重数计算). 复数域 $\mathbf{C}$ 上任一 $n(n>0)$ 次多项式可以在 $\mathbf{C}[x]$ 中分解为一次因式的乘积, **复数域上任一次数大于1的多项式都是可约的**. 若实系数多项式 $f(x)$ 有一个非实的复数根 $\alpha$, 那么 $\alpha$ 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根, 并且 $\bar{\alpha}$ 与 $\alpha$ 有相同的重数, 即实系数多项式的复数根两两成对出现. **实数域上不可约**