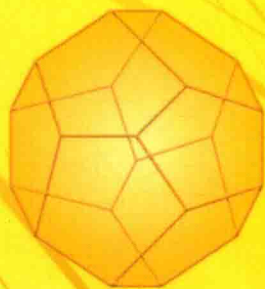


距离正则图及其相关代数

高锁刚 侯波 郭军 著



科学出版社

距离正则图及其相关代数

高锁刚 侯 波 郭 军 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书共十四章,前三章介绍本书必备的基础知识,包括距离正则图及其表示的基本理论和方法、格、一致偏序集、有限辛几何.后十一章是作者及其合作者近年来的研究成果.在距离正则图的结构方面,涉及强闭包子图及其应用,基于几乎二部图的一致偏序集,Johnson图、Grassmann图、二部图的Terwilliger代数;在Terwilliger代数表示方面,涉及带尖的三对角对的迹和仿射变换、经典和正规化的Leonard对、Leonard对的构造、Leonard三元组的分类、Leonard三元组的构造和几种型的代数模的分类.

本书可供高等院校数学与信息专业本科生、研究生、教师等阅读,也可供其他相关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

距离正则图及其相关代数/高锁刚,侯波,郭军著. —北京:科学出版社, 2017.12

ISBN 978-7-03-055739-1

I. ①距… II. ①高… ②侯… ③郭… III. ①正则图-研究 IV. O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第293609号

责任编辑:李静科/责任校对:张凤琴

责任印制:张伟/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年12月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017年12月第一次印刷 印张:20 1/4

字数:408 000

定价:118.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

距离正则图是由 N. Biggs 于 20 世纪 70 年代提出的,它是距离传递图的组合推广,等价于 P 多项式结合方案. E. Bannai, T. Ito 于 1984 年出版的专著 *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes* 和 A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier 于 1989 年出版的专著 *Distance-Regular Graphs* 是关于结合方案和距离正则图的经典著作. 这两部著作包含丰富的结合方案与距离正则图的基本理论,也包含结合方案和距离正则图与有限群论、编码、组合设计及有限几何的联系.

我国结合方案的研究始于 20 世纪 50 年代末,首先是许宝騄教授、张里千教授的著名成果,随后,万哲先教授和他的几位弟子以典型群作用下各种类型的子空间作为处理和区组来构造结合方案和设计,并计算了它们的参数,特别是利用极大全迷向子空间构造的结合方案,即 P 多项式结合方案(或距离正则图). 20 世纪 70 年代末,王仰贤教授、魏洪增教授、沈灏教授、霍元极教授等继续用矩阵方法构造和研究结合方案,并取得了重要研究成果. 目前国内利用矩阵方法构造和研究结合方案的专著有:《有限几何与不完全区组设计的一些研究》(万哲先、戴宗铎、冯绪宁、阳本傅. 1966. 北京: 科学出版社) 和《矩阵结合方案》(王仰贤、霍元极、麻常利. 2006. 北京: 科学出版社). 这两部专著彰显了华罗庚教授、万哲先教授创立的被誉为典型群中国学派的矩阵方法,值得人们去学习、继承和发扬.

随着对距离正则图研究的深入,新的理论和方法不断引入,如 Terwilliger 代数和称为 Terwilliger 代数表示理论的三对角对、Leonard 对、Leonard 三元组等理论. 这些理论揭示了结合方案和距离正则图与李代数、正交多项式、量子群等的联系. 因此,介绍这些理论对研究结合方案和距离正则图无疑是有意义的.

本书是我们及合作者对距离正则图研究工作的系统介绍,涉及强闭包子图,基于几乎二部图的一致偏序集,Johnson 图、Grassmann 图、几乎二部图的 Terwilliger 代数,Leonard 对、Leonard 三元组的构造和 Leonard 三元组的分类等. 这些内容大部分已在国内外刊物上发表或录用. 为了使内容在阐述上系统完整,便于读者阅读,本书首先在前三章介绍了本书必备的基础知识,其中第 1 章介绍了距离正则图的基本理论,包括交叉表、Bose-Mesner 代数和 Terwilliger 代数;第 2 章介绍了三对角对、Leonard 对、Leonard 三元组的基本概念和理论;第 3 章介绍了偏序集、格、一致偏序的概念及其相关性质和有限辛几何的基本知识. 后十一章是相对独立的,读者在阅读了前三章后,可根据兴趣选择阅读后面的章节.

著名代数组合学家 E. Bannai 教授、P. Terwilliger 教授、T. Ito 教授、H. Suzuki

教授对河北师范大学代数组合的研究提供了许多指导和帮助. 河北师范大学王仰贤教授、康庆德教授对本书的写作始终给予了热情的鼓励和支持. 北京师范大学王恺顺教授阅读了全书, 并提出了很好的修改意见. 廊坊师范学院李增提教授、河北师范大学刘稳副教授、河北地质大学康娜副教授, 以及在读博士生王燕、侯利航、张跃忠等在文字校对方面做了大量工作. 科学出版社李静科编辑对本书出版给予了大力支持. 本书是在国家自然科学基金 (11471097, 11271257)、河北师范大学学术出版基金的资助下完成的. 在此一并致谢.

限于作者水平, 书中疏漏之处在所难免, 欢迎读者批评指正.

作 者

2017 年 5 月

一些符号的说明

$\Gamma = (X, \mathcal{R})$	简单有限无向图, X 为其顶点集, $\mathcal{R}$ 为其边集
$V(\Gamma)$	图 Γ 的顶点集
$E(\Gamma)$	图 Γ 的边集
$x \sim y$	图 Γ 中顶点 x, y 邻接
$\Gamma_i(x)$	图 Γ 中与点 x 的距离为 i 的点集
$\text{Spec}(A)$	图 Γ 的谱, A 表示 Γ 的邻接矩阵
$\text{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
R, F, L	图 Γ 的提升矩阵、平坦矩阵和下降矩阵
K_n	n 阶完全图
$H(D, n)$	Hamming 图
$J(n, m)$	Johnson 图
$J_q(n, m)$	Grassmann 图
Γ^c	图 Γ 的补图
$\text{Aut}(\Gamma)$	图 Γ 的自同构群
$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^D)$	类数为 D 的结合方案
p_{ij}^h	图或结合方案的交叉数
q_{ij}^h	图或结合方案的 Krein 参数
$\text{char}(\mathbb{F})$	域 $\mathbb{F}$ 的特征
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{F}[\lambda]$	域 $\mathbb{F}$ 上关于未定元 λ 的多项式
$\deg(v_i)$	多项式 v_i 的次数
$\text{End}(V)$	V 上所有线性变换构成的代数
$\text{diag}(\cdots)$	对角矩阵
$\mathbb{F}_q$	元素个数为 q 的有限域
$\mathbb{F}_q^{(n)}$	域 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维向量空间
J	元素全为 1 的矩阵
$\overline{B}$	矩阵 B 的共轭矩阵
B^T	矩阵 B 的转置矩阵

$\text{tr}(B)$	矩阵 B 的迹
$\det(B)$	矩阵 B 的行列式
$\langle B, C \rangle$	矩阵 B, C 的标准内积, 即 $\text{tr}(B\overline{C}^T)$
$B \otimes C$	矩阵 B, C 的 Kronecker 积
$B \circ C$	矩阵 B, C 的 Hadamard 乘积
$W^\perp$	向量空间 W 的正交补
$\mathcal{M}$	图或结合方案的 Bose-Mesner 代数
$\mathcal{M}^*$	图或结合方案的对偶 Bose-Mesner 代数
T	图或结合方案的 Terwilliger 代数
$\sup(P)$	偏序集中子集 P 的上确界
$\inf(P)$	偏序集中子集 P 的下确界
$a \vee b$	偏序集中元素 a, b 的上确界
$a \wedge b$	偏序集中元素 a, b 的下确界
$a \leq b$	偏序集中元素 a 被 b 覆盖
$\mathbb{T}$	偏序集的关联代数
$Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q, K)$	$\mathbb{F}_q$ 上关于交错矩阵 K 的 2ν 阶辛群
$Sp_{2\nu}(\mathbb{F}_q)$	$\mathbb{F}_q$ 上关于交错矩阵 $K = \begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ -I^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}$ 的 2ν 阶辛群
$\mathcal{M}(m, s; 2\nu)$	辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu)}$ 中全体 (m, s) 型子空间构成的集合
$N(m, s; 2\nu)$	集合 $\mathcal{M}(m, s; 2\nu)$ 的基数
$\mathcal{M}(m_1, s_1; m, s; 2\nu)$	一个给定的 (m, s) 型子空间中所有 (m_1, s_1) 型子空间构成的集合
$N(m_1, s_1; m, s; 2\nu)$	集合 $\mathcal{M}(m_1, s_1; m, s; 2\nu)$ 的基数
$\mathcal{L}(m, s; 2\nu)$	$\mathcal{M}(m, s; 2\nu)$ 中子空间的交构成的集合
$\mathcal{L}_O(m, s; 2\nu)$	集合 $\mathcal{L}(m, s; 2\nu)$ 关于包含关系 $\subseteq$ 形成的偏序集
D_4	四面体群
$U(sl_2)$	sl_2 的泛包络代数
$U_q(sl_2)$	sl_2 的量子代数
$\boxtimes_q$	q -四面体代数
$A(d_0, e_1, e_2)$	Racah 代数
$A(\alpha, \beta, \gamma)$	Bannai/Ito 代数
(A, A^*)	三对角对或 Leonard 对

(A, A^*, A^ε)	Leonard 三元组
$\Phi = (A; \{E_i\}_{i=0}^d; A^*; \{E_i^*\}_{i=0}^d)$	三对角系或 Leonard 系
$\Psi = (A; \{E_i\}_{i=0}^d; A^*; \{E_i^*\}_{i=0}^d; A^\varepsilon; \{E_i^\varepsilon\}_{i=0}^d)$	Leonard 三元系

目 录

前言

一些符号的说明

第 1 章 距离正则图	1
1.1 图的基本知识	1
1.1.1 图的定义	1
1.1.2 完全图、二部图、补图	1
1.1.3 图的同构、子图	2
1.1.4 途径、路、距离	3
1.1.5 图的谱	3
1.1.6 正则图	5
1.2 强正则图	6
1.3 距离正则图的定义和基本性质	10
1.3.1 距离传递和距离正则图	10
1.3.2 基本性质	13
1.4 交叉表	16
1.4.1 交叉表的定义及其性质	16
1.4.2 A.A.Ivanov 界	19
1.5 Bose-Mesner 代数	20
1.5.1 距离正则图的邻接矩阵	20
1.5.2 本原幂等元	23
1.6 Terwilliger 代数	29
1.6.1 Terwilliger 代数	29
1.6.2 T -模的若干性质	39
1.7 结合方案	45
1.7.1 结合方案的定义	45
1.7.2 结合方案的特征值	48
1.7.3 Krein 参数	52
1.7.4 $P(Q)$ 结合方案	55
1.8 本原与非本原性质	58

1.9	注记	59
第 2 章	三对角对、Leonard 对、Leonard 三元组	60
2.1	三对角对	60
2.1.1	三对角对和三对角系	60
2.1.2	三对角系的参数阵列	63
2.1.3	三对角对和三对角系的同构	66
2.2	Leonard 对和 Leonard 系	67
2.2.1	Leonard 对和 Leonard 系的定义和相关知识	67
2.2.2	13 类 Leonard 系的参数阵列	74
2.2.3	Askey-Wilson 关系式	78
2.3	Leonard 三元组和 Leonard 三元系	79
2.4	注记	82
第 3 章	格、一致偏序集、有限辛几何	83
3.1	偏序集和格	83
3.1.1	偏序集	83
3.1.2	格、半模格与几何格	86
3.2	一致偏序集	90
3.3	有限辛几何	94
3.4	注记	98
第 4 章	强闭包子图及其应用	99
4.1	子空间的定义及其性质	99
4.2	子空间的计数定理	100
4.3	由子空间生成的格	106
4.4	认证码	110
4.5	池设计	113
4.6	注记	114
第 5 章	基于几乎二部图的一致偏序集	115
5.1	几乎二部图的定义及其性质	115
5.2	几乎二部图的提升矩阵、平坦矩阵和下降矩阵	118
5.3	R/L 线性结构	119
5.4	几乎二部距离正则图的一致结构	121
5.4.1	$2D+1$ 边形的情形	122
5.4.2	折叠超方体 $H(2D+1, 2)$ 的情形	124
5.4.3	奇图的情形	133

5.5 注记	139
第 6 章 Johnson 图的 Terwilliger 代数	140
6.1 对偶 Hahn 型 Leonard 系的等价定义	140
6.2 泛包络代数 $U(sl_2)$	141
6.3 与给定的对偶 Hahn 型 Leonard 系相关的 $U(sl_2)$ -模结构	143
6.4 Johnson 图的若干性质	147
6.5 标准模的位移分解	149
6.6 标准模 V 上的 $U(sl_2)$ -模结构	150
6.7 Johnson 图的 Terwilliger 代数	152
6.8 注记	152
第 7 章 Grassmann 图的 Terwilliger 代数	153
7.1 对偶 q -Hahn 型 Leonard 系的若干性质	153
7.2 量子代数 $U_q(sl_2)$	155
7.3 q -四面体代数 $\boxtimes_q$	156
7.4 相关的 $U_q(sl_2)$ -模结构和 $\boxtimes_q$ -模结构	157
7.5 Grassmann 图的若干性质	159
7.6 标准模 V 上的 $U_q(sl_2)$ -模结构和 $\boxtimes_q$ -模结构	162
7.7 Grassmann 图的 Terwilliger 代数	166
7.8 注记	166
第 8 章 二部图的 Terwilliger 代数	167
8.1 二部距离正则图的偏序集	167
8.2 $\overline{H}(2D, 2)$ 的情形	168
8.3 一类 $D = 3$ 且 $b_2 = 1$ 的二部距离正则图	175
8.4 一类 $D = 3$ 且 $b_2 > 1$ 的二部距离正则图	176
8.5 $H(D, 2)$ 图的情形	177
8.6 一类含有参数 q, s^* 的二部距离正则图	177
8.7 注记	180
第 9 章 与带尖三对角系相关的迹及带尖三对角对的仿射变换	181
9.1 与带尖三对角系相关的迹	181
9.2 带尖三对角对的仿射变换	185
9.2.1 一些基本事实	185
9.2.2 三对角系的仿射变换和仿射同构	188
9.2.3 带尖的三对角系在仿射同构下的分类	194
9.2.4 三对角对的仿射同构	195

9.3 注记	198
第 10 章 经典和正规化 Leonard 对	199
10.1 量子参数不是单位根的 Leonard 对	199
10.2 经典 Leonard 对和经典 Leonard 系	201
10.3 正规化 Racah 型 Leonard 对及其分类	207
10.4 正规化 Bannai/Ito 型 Leonard 对	212
10.4.1 直径是奇数的情形	212
10.4.2 直径是偶数的情形	214
10.5 注记	215
第 11 章 Leonard 对的构造	216
11.1 有限辛几何上的 Leonard 对	216
11.1.1 分次偏序集 $\mathcal{L}_O(m, s; 2\nu)$ 及其性质	216
11.1.2 子偏序集 $\mathcal{L}'_O(m, s; 2\nu)$	218
11.1.3 $\mathcal{L}'_O(m, s; 2\nu)$ 的强一致性	224
11.1.4 利用 $\mathcal{L}'_O(m, s; 2\nu)$ 构造 Leonard 对	227
11.2 利用量子代数 $U_q(sl_2)$ 构造 Leonard 对	230
11.2.1 LB-TD 型 Leonard 对	230
11.2.2 利用量子代数 $U_q(sl_2)$ 构造 Leonard 对	232
11.3 注记	238
第 12 章 Leonard 三元组的分类	239
12.1 带有非单位根量子参数 Leonard 三元组的类型	239
12.2 经典 Leonard 三元组	243
12.3 经典 Racah 型 Leonard 三元组与 $\mathbb{Z}_3$ -对称 Askey-Wilson 关系式	247
12.4 经典 Krawtchouk 型 Leonard 三元组与 $\mathbb{Z}_3$ -对称 Askey-Wilson 关系式	252
12.5 经典 Racah 型 Leonard 三元组的分类	254
12.6 正规化 Bannai/Ito 型 Leonard 三元组	261
12.6.1 直径是奇数的情形	262
12.6.2 直径是偶数的情形	263
12.7 注记	263
第 13 章 Leonard 三元组的构造	264
13.1 q -Racah 型 Leonard 三元组的构造	264
13.2 经典 Racah 型 Leonard 三元组的构造	267
13.3 经典 Krawtchouk 型 Leonard 三元组的构造	271

13.4	Bannai/Ito 型 Leonard 三元组的构造	274
13.4.1	Bannai/Ito 型 Leonard 对 (A, A^*) 及其正规化	274
13.4.2	正规化的 Leonard 三元组 (B, B^*, B^e)	276
13.4.3	由 (A, A^*) 构造 Leonard 三元组	279
13.5	注记	284
第 14 章	几种型的代数模的分类	285
14.1	Bannai/Ito 代数的有限不可约模的分类	285
14.1.1	Bannai/Ito 代数 $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$	285
14.1.2	Bannai/Ito 代数不可约模的分类	288
14.2	Racah 代数不可约模的分类	298
14.2.1	Racah 代数 $\mathcal{A}(d_0, e_1, e_2)$	298
14.2.2	Racah 代数 $\mathcal{A}(d_0, e_1, e_2)$ 的生成元在不可约模上的作用	300
14.2.3	Racah 代数不可约模的分类	301
14.3	注记	303
参考文献		304

第1章 距离正则图

本章介绍距离正则图和结合方案的基本知识, 包括交叉表、Bose-Mesner 代数和 Terwilliger 代数等.

1.1 图的基本知识

1.1.1 图的定义

定义 1.1 图是一个偶对, 记作 $\Gamma = (X, \mathcal{R})$, 其中 X 是顶点的集合, 也称为点集, $\mathcal{R}$ 是 X 中所有 2-子集 (无序对, 元素可重复) 所组成集合的一个子集, 称为边集. 顶点集和边集也可分别用 $V(\Gamma)$ 和 $E(\Gamma)$ 表示.

如果 X 和 $\mathcal{R}$ 都是有限集合, 则 Γ 称为有限图; 否则, 称为无限图. 没有任何边的图称为空图, 记作 Φ . 只有一个顶点的图称为平凡图. 图中顶点的个数叫做图的阶. 连接两个相同顶点的边的条数, 叫做边的重数.

注记 1 一个图可用一个几何图形来描述. 在保持图的顶点和边的关系不变的情况下, 图形的位置、大小、形状都是无关紧要的.

一条边的端点称为与这条边关联. 反之, 一条边也称为与它的端点关联. 与同一条边关联的两个端点称为邻接, 用 $xy \in \mathcal{R}$ 或 $x \sim y$ 表示顶点 x, y 邻接, 或它们之间有一条边; 用 $x \not\sim y$ 表示顶点 x, y 不邻接. 如果两条边有一个公共的顶点, 则称这两条边邻接. 两个端点重合的边叫做环. 没有环以及没有重数大于 1 的边的图称为简单图.

本书中的图都是指简单有限图.

1.1.2 完全图、二部图、补图

定义 1.2 每一对不同的顶点均有一条边相连的简单图称为完全图. n 阶完全图记作 K_n .

定义 1.3 设 X_1 和 X_2 是图 Γ 的顶点子集, 使 $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, 且 Γ 的每一条边的一个端点在 X_1 中, 另外一个端点在 X_2 中, 则称 Γ 为二部图, 记作 $\Gamma = (X_1, X_2; \mathcal{R})$.

例 1.1 图 1.1 是一个二部图, 这里 $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$.

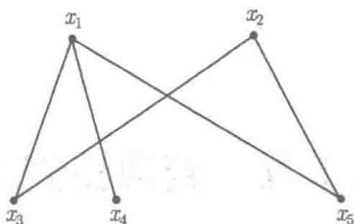
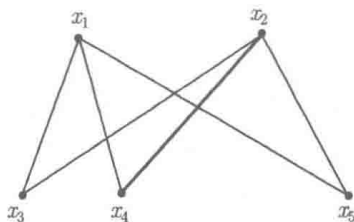


图 1.1

在 $\Gamma = (X_1, X_2, \mathcal{R})$ 中, 如果 X_1 中的顶点与 X_2 中的每个顶点都相连, 则称 $\Gamma = (X_1, X_2, \mathcal{R})$ 为完全二部图. 若 $|X_1| = m$, $|X_2| = n$, 则完全二部图记作 $K_{m,n}$. 图 1.2 即为 $K_{2,3}$.

图 1.2 $K_{2,3}$

定义 1.4 设 Γ 是简单图, H 是一个以 $V(\Gamma)$ 为顶点集的图, 且两个顶点在 H 中邻接当且仅当它们在 Γ 中不邻接, 则称 H 为 Γ 的补图, 记作 $H = \Gamma^c$. 如图 1.3 所示.

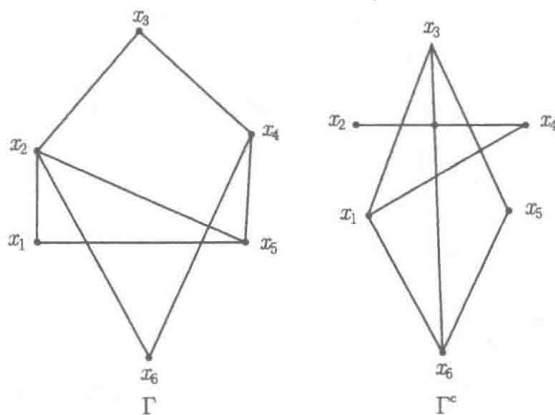


图 1.3

1.1.3 图的同构、子图

定义 1.5 设 $\Gamma = (X, \mathcal{R})$ 和 $\Gamma' = (X', \mathcal{R}')$ 是两个图.

(i) 双射 $\sigma : X \rightarrow X'$ 叫做 Γ 与 Γ' 间的同构映射, 如果 $xy \in \mathcal{R}$ 当且仅当

$\sigma(x)\sigma(y) \in \mathcal{R}'$;

(ii) 若 $\Gamma = \Gamma'$, 则这个同构映射 σ 叫做 Γ 的自同构映射, 简称自同构.

易证 Γ 的全体自同构对映射的合成作成一个群, 叫做 Γ 的自同构群, 记作 $\text{Aut}(\Gamma)$.

定义 1.6 图 $\Gamma_1 = (X_1, \mathcal{R}_1)$ 叫做 $\Gamma = (X, \mathcal{R})$ 的子图, 记作 $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, 如果 $X_1 \subseteq X, \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}$.

定义 1.7 设 X' 是图 $\Gamma = (X, \mathcal{R})$ 的顶点集合 X 的一个非空子集, 以 X' 作为顶点集, 如果对任意的 $x, y \in X'$, 只要 $xy \in \mathcal{R}$, 就有 $xy \in \mathcal{R}'$, 那么称 $(X', \mathcal{R}')$ 为由 X' 诱导出的 Γ 的子图, 记为 $\Gamma[X']$, 也说 $\Gamma[X']$ 是 Γ 的导出子图.

1.1.4 途径、路、距离

定义 1.8 图 Γ 的一个顶点和边的交替序列 $\mu = w_0 e_1 w_1 \cdots w_{l-1} e_l w_l$, 使得对 $1 \leq i \leq l$, 边 e_i 的端点是 w_{i-1} 和 w_i , 则称 μ 是一条连接 w_0 和 w_l 的途径. w_0 和 w_l 分别称为 μ 的起点和终点. μ 中边的数目 l 称为它的长.

若 $w_0 = w_l$, 则称此途径为闭的; 否则, 称为开的. 边均不相同的途径称为链.

定义 1.9 顶点均不同 (从而所有边也均不同) 的途径称为路. 连接不同点 $w_0, w_1, \cdots, w_l$ 的路也可用 $w_0 \sim w_1 \sim w_2 \sim \cdots \sim w_l$ 表示.

定义 1.10 两点 x, y 间的最短路的长度叫做这两点间的距离, 记作 $\partial(x, y)$, 其中 ∂ 为距离函数.

显然, $\partial(x, x) = 0$. 如果点 x, y 间没有路, 则称 x, y 的距离是 ∞ , 记作 $\partial(x, y) = \infty$.

定义 1.11 图 Γ 的直径是 Γ 中所有两点距离的最大值, 记作 $D = D(\Gamma)$.

图 Γ 叫做连通的, 若直径是有限的, 即对 Γ 中任两点 x, y , 总存在由 x 到 y 的路.

显然, 距离函数满足三角不等式:

$$\partial(u, v) \leq \partial(u, w) + \partial(w, v), \quad u, v, w \in X. \quad (1.1)$$

定理 1.1 设 $u, v \in X, \sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$, 则 $\partial(u, v) = \partial(\sigma(u), \sigma(v))$.

证明 设 $\partial(u, v) = k$, 则存在 u 到 v 的最短路 $u \sim u_1 \sim \cdots \sim u_{k-1} \sim v$. 于是 $\sigma(u) \sim \sigma(u_1) \sim \cdots \sim \sigma(u_{k-1}) \sim \sigma(v)$ 是 $\sigma(u)$ 到 $\sigma(v)$ 的长为 k 的路. 故 $\partial(\sigma(u), \sigma(v)) \leq k = \partial(u, v)$. 同理, 可得 $\partial(u, v) \leq \partial(\sigma(u), \sigma(v))$. 故 $\partial(u, v) = \partial(\sigma(u), \sigma(v))$. $\square$

1.1.5 图的谱

一个图也可以用下面的邻接矩阵来刻画. 设 $\Gamma = (X, \mathcal{R})$. 定义 Γ 的邻接矩阵

A 是 $|X|$ 阶的 0-1 矩阵, 它的行与列均用 Γ 的顶点标定, A 的 (x, y) 位置的元素为

$$A_{xy} = \begin{cases} 1, & \partial(x, y) = 1, \\ 0, & \text{不然.} \end{cases}$$

下面介绍图 Γ 的谱.

记 $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, 这里, I_n 是 n 阶单位矩阵, 其中 $n = |X|$. $\chi_A(\lambda)$ 称为 A 的特征多项式. 易知 $\chi_A(\lambda)$ 是关于 A 的 n 次特征多项式.

由高斯定理, 特征方程 $\chi_A(\lambda) = 0$ 有 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 不一定互异, 本书把重集 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 称为方阵 A 的谱, 记为 $\text{Spec}(A)$ 或

$$\text{Spec}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{pmatrix},$$

这里, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 互异, m_i 是 λ_i 的重数 (即 λ_i 是 $\chi_A(\lambda) = 0$ 的 m_i 重根), $\sum_{i=1}^s m_i = n$. 对于每一个特征值 λ_i , m_i 称为 λ_i 的代数重数. 而 λ_i 对应的所有特征向量加上零向量构成一个线性子空间, 称为与 λ_i 相应的根子空间. 它的维数是 $n - \text{rank}(\lambda_i I_n - A)$, 这称为特征值 λ_i 的几何重数.

例如, 完全图 K_4 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

易得 K_4 的谱为

$$\text{Spec}(K_4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A 的特征值也叫做 Γ 的特征值, 并且 A 的特征多项式也叫做 Γ 的特征多项式, 用 $\chi(\Gamma; \lambda)$ 表示.

定义 1.12 由邻接矩阵 A 生成的 $\text{Mat}_X(\mathbb{R})$ 的子代数叫做图 Γ 的邻接代数或 Bose-Mesner 代数, 记作 $\mathcal{M}$.

邻接代数 $\mathcal{M}$ 中的每一个元素都是关于邻接矩阵 A 的多项式. 因此通过研究 A^l 的性质可以得到关于 $\mathcal{M}$ 的一些性质.

引理 1.2 图 Γ 中从顶点 x_i 到 x_j 长为 l 的路的条数等于矩阵 A^l 中 (x_i, x_j) 位置的元素.