



**国家出版基金资助项目**

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

FOURIER EXPANSION

# Fourier 展式

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

FOURIER EXPANSION

# Fourier 展式

刘培杰数学工作室 编译

## 内 容 简 介

本书全面深刻地叙述了傅里叶展式的理论,针对傅里叶展式给出了相关的定义、使用范围以及推广等.本书包括:傅里叶三角级数,正交系,傅里叶三角级数的收敛性,系数递减的三角级数、某些级数求和法,三角函数系的完整性、傅里叶级数的运算,傅里叶三角级数定和法,二重三角级数、傅里叶积分,贝塞尔函数,贝塞尔函数作成的傅里叶级数,解决若干数学物理问题的特征函数法,应用等.

本书适合高等学校师生研读.

### 图书在版编目(CIP)数据

Fourier 展式/刘培杰数学工作室编译.——哈尔滨:  
哈尔滨工业大学出版社,2017.6

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6488-9

I. ①F… II. ①刘…… III. ①傅里叶级数

IV ①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 042295 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 王勇钢

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 42 字数 450 千字

版 次 2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6488-9

定 价 158.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎  
代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

### 潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的的机会。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

### 抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

### 始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

### 抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

### 始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

### 丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”.

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”.唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多



的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

### 读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全对吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎  
目  
录

第 0 章	引言	// 1
第 1 章	傅里叶三角级数	// 45
§ 1	周期函数	// 45
§ 2	谐波量	// 47
§ 3	三角多项式和三角级数	// 51
§ 4	术语的明确说明、可积性、函数项级数	// 54
§ 5	基本三角函数系、正弦余弦的正交性、函数系	// 59
§ 6	周期是 $2\pi$ 的函数的傅里叶级数	// 61
§ 7	在长度为 $2\pi$ 的区间上给出的函数的傅里叶级数	// 65
§ 8	函数在一点处的左右极限、第一种间断点	// 67
§ 9	滑溜函数和逐段滑溜函数	// 69
§ 10	傅里叶级数收敛准则	// 71
§ 11	奇函数和偶函数	// 73
§ 12	余弦级数和正弦级数	// 75
§ 13	展成傅里叶级数的例子	// 78

§ 14 傅里叶级数的复数形式 //87

§ 15 周期是  $2l$  的函数 //90

第 1 章思考题 //95

## 第 2 章 正交系 //100

§ 1 定义、标准系 //100

§ 2 按已知正交族展开的傅里叶级数 //102

§ 3 最简单正交系的例子 //103

§ 4 平方可积函数、布尼雅柯夫斯基不等式 //112

§ 5 平方偏差、它的最小值 //114

§ 6 贝塞尔不等式和它的推论 //117

§ 7 完备系、在均值意义下的收敛性 //118

§ 8 完备系最重要的性质 //121

§ 9 完备系的判别准则 //123

§ 10 与矢量类比 //126

## 第 3 章 傅里叶三角级数的收敛性 //130

§ 1 贝塞尔不等式和它的推论 //130

§ 2 三角积分  $\int_a^b f(x) \cos nx dx$  和  $\int_a^b f(x) \sin nx dx$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时的极限 //131

§ 3 余弦和式的公式、辅助积分 //137

§ 4 傅里叶级数部分和的积分公式 //139

§ 5 左右导数 //140

§ 6 在函数连续点处傅里叶级数收敛的充分条件 //143

§ 7 在函数间断点处傅里叶级数收敛的充分条件 //145

§ 8 在 § 6, § 7 建立的充分条件的推广 //147

§ 9 逐段滑溜(连续或不连续)函数的傅里叶级数的收敛 //148

§ 10 周期是  $2\pi$  的连续逐段滑溜函数的傅里叶级数的绝对收敛性和均匀收敛性 //149

§ 11	周期是 $2\pi$ 而具有绝对可积导数的连续函数的 傅里叶级数的均匀收敛性	//153
§ 12	§ 11 结果的推广	//157
§ 13	局部性原理	//161
§ 14	无界函数展成傅里叶级数的例子	//164
§ 15	关于周期是 $2l$ 的函数的附注	//169
<b>第 4 章</b>	<b>系数递减的三角级数、某些级数求和法</b>	<b>//170</b>
§ 1	阿贝尔预备定理	//170
§ 2	正弦和式的公式、辅助不等式	//172
§ 3	系数单调递减的三角级数的收敛性	//174
§ 4	§ 3 定理的一些推论	//177
§ 5	复变函数对于一些三角级数求和法的应用	//181
§ 6	§ 5 结果的严格讨论	//185
	第 4 章思考题	//190
<b>第 5 章</b>	<b>三角函数系的完备性、傅里叶级数的 运算</b>	<b>//195</b>
§ 1	用三角多项式近似表示函数	//195
§ 2	三角函数系的完备性	//198
§ 3	李雅普诺夫公式、三角函数系完备性的重要 推论	//200
§ 4	用多项式逼近函数	//202
§ 5	傅里叶级数的加减法、它与数字的乘法	//204
§ 6	傅里叶级数乘法	//205
§ 7	傅里叶级数的积分法	//208
§ 8	傅里叶级数的微分法、周期是 $2\pi$ 的连续函数的 情形	//213
§ 9	傅里叶级数的微分法、函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上	

	给出时的情形	//216
§ 10	傅里叶级数的微分法、函数在区间 $[0, \pi]$ 上给出时的情形	//223
§ 11	傅里叶级数收敛性的改善	//231
§ 12	三角函数展式表	//237
§ 13	傅里叶级数的近似计算	//241
第5章思考题		//244
<b>第6章 傅里叶三角级数定和法</b> //250		
§ 1	问题的提出	//250
§ 2	算术均值法	//251
§ 3	傅里叶级数部分和的算术均值的积分公式	//253
§ 4	傅里叶级数用算术均值法定和	//254
§ 5	幂因子法	//260
§ 6	泊松核	//261
§ 7	幂因子法在傅里叶级数定和时的应用	//262
第6章思考题		//269
<b>第7章 二重三角级数、傅里叶积分</b> //272		
§ 1	双变量正交系、傅里叶级数	//272
§ 2	双变量的基本三角函数系、二重傅里叶级数	//274
§ 3	二重傅里叶三角级数部分和的积分公式、收敛准则	//279
§ 4	对 $x$ 和对 $y$ 具有不同周期的函数的二重傅里叶级数	//282
§ 5	傅里叶积分作为傅里叶级数的极限	//283
§ 6	依赖于参数的广义积分	//286
§ 7	两个预备定理	//289
§ 8	傅里叶积分公式的证明	//293

§ 9 傅里叶积分的各种形式 //294

§ 10 傅里叶变换 //296

## 第 8 章 贝塞尔函数 //301

§ 1 欧拉-贝塞尔方程 //301

§ 2 具非负指标的第一种贝塞尔函数 //302

§ 3 关于  $\Gamma$ -函数 //307

§ 4 具负指标的第一种贝塞尔函数 //308

§ 5 欧拉-贝塞尔方程的一般积分 //310

§ 6 第二种贝塞尔函数 //311

§ 7 相异指标的贝塞尔函数间的关系 //313

§ 8 具有形如  $p = \frac{2n+1}{2}$  ( $n$  是整数) 指标的第一种贝塞尔函数 //315

§ 9 贝塞尔函数的渐近公式 //317

§ 10 贝塞尔函数和有关函数的根 //323

§ 11 带参数的欧拉-贝塞尔方程 //326

§ 12 函数  $J_p(\lambda x)$  的正交性 //327

§ 13 积分  $\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx$  的计算 //330

§ 14 积分  $\int_0^1 x J_p^2(\lambda x) dx$  的估计 //332

第 8 章思考题 //333

## 第 9 章 贝塞尔函数作成的傅里叶级数 //335

§ 1 傅里叶-贝塞尔级数 //335

§ 2 傅里叶-贝塞尔级数的判断准则 //337

§ 3 贝塞尔不等式和它的推论 //339

§ 4 保证傅里叶-贝塞尔级数均匀收敛的系数的阶 //342

- § 5 二次可微函数的傅里叶—贝塞尔系数的阶 //346
- § 6 多次可微函数的傅里叶—贝塞尔系数的阶 //350
- § 7 傅里叶—贝塞尔级数的逐项微分 //353
- § 8 第二类的傅里叶—贝塞尔级数 //358
- § 9 § 3~§ 7 的结果在第二类傅里叶—贝塞尔级数的推广 //361
- § 10 区间 $[0, l]$ 上给出的函数的傅里叶—贝塞尔级数展式 //364
- 第 9 章思考题 //366

## 第 10 章 解决若干数学物理问题的特征函数法 //368

- § 1 方法的实质 //368
- § 2 边界问题通常的提法 //374
- § 3 关于特征值的存在问题 //375
- § 4 特征函数, 它们的正交性 //376
- § 5 关于特征值的正负号 //379
- § 6 按特征函数展开的傅里叶级数 //380
- § 7 特征函数的方法实际上一定可以引向问题的解决吗? //385
- § 8 广义解 //389
- § 9 非齐次问题 //393
- § 10 总结 //396

## 第 11 章 应用 //399

- § 1 弦振动方程 //399
- § 2 弦的自由振动 //401
- § 3 弦的强迫振动 //406
- § 4 枢轴纵振动方程 //409
- § 5 枢轴的自由振动 //411



- § 6 枢轴的强迫振动 //415
- § 7 矩形膜振动 //417
- § 8 圆形膜沿半径的振动 //424
- § 9 圆形膜的振动(一般情形) //428
- § 10 枢轴上热扩散方程 //434
- § 11 枢轴两端保持温度为零时热的扩散 //437
- § 12 枢轴两端保持常温时热的扩散 //439
- § 13 枢轴两端为已知变化温度时热的扩散 //441
- § 14 在枢轴两端与周围介质有自由交流发生时热的扩散 //442
- § 15 无界枢轴热的扩散 //447
- § 16 圆柱面上的热扩散,表面绝热的情况 //453
- § 17 圆柱面内部的热扩散,在表面与外界介质有热交流的情况 //455
- § 18 圆柱内的热扩散,温度稳定的情况 //456
- 
- 附录 I 三角多项式的实根个数 //460
- 附录 II 利用傅里叶级数计算积分 //463
- 附录 III 傅里叶级数与一致分布 //468
- 附录 IV 傅里叶级数与傅里叶积分的一致收敛 //474
- 附录 V 塞萨罗意义下的求和,模 1 的一致分布 //478
- 附录 VI 傅里叶级数与亚纯函数 //484
- 附录 VII 酉辛群上的调和分析——傅里叶级数的球求和 //491
- 附录 VIII 一些函数项级数的收敛性改进法 //496
- 附录 IX 利用傅里叶分析进行近似计算 //518
- 附录 X 傅里叶分析中的实函数方法 //534