为工学门类中对数学要求较低的学科或专业的考生而编写

针对考试大纲对典型试题进行考点分析，详细解答，方法点击

结合阅卷经验着重分析考试中出现的典型错误

考研数学试题

典型错误辨析

数学二

张天德 张德瑜 吕洪波 张焕玲 编著

清华大学出版社

考研数学试题

典型错误辨析

数学二

张天德 张德瑜 吕洪波 张焕玲 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书结合作者数十年的阅卷经验，归纳、分析了在近十多年全国硕士研究生入学统一考试数学试题的解答过程中，考生所出现的典型错误，以帮助备考的考生有意识地发现自己在对知识点的理解和考点的表现方式方面所存在的缺陷. 此书是针对工学门类中对数学要求较低的学科或专业的考生（选择数学二试卷）而编写的，共安排两个部分：高等数学、线性代数. 为了便于考生与自己的解答相对照并且能够达到知其所以然的目的，对于所选择的真题，在给出题目后，首先进行"考点分析"，然后给出详细解答，再通过"方法点击"加以提炼，最后列出"典型错误"并给出出错的原因分析.

图书在版编目（CIP）数据

考研数学试题典型错误辨析. 数学二/张天德等编著. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-47289-6

Ⅰ. ①考…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 122656 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：9.75　　**字　　数**：238 千字
版　　次：2017 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：32.00 元

产品编号：075082-01

前言

FOREWORD

为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练把握考研数学的命题方式和解题规律，全面提高解题能力和应考能力，在最短的时间内轻松夺取考研数学高分，我们严格依据教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，邀请到众多有着丰富命题、阅卷和辅导经验的一线名师精心编写了这本《考研数学试题典型错误辨析》.

历年的考研真题完全反映了考研命题的指导思想、基本原则和出题趋势，是教育部考试中心一届又一届命题组老师们精挑细选出极具典型性和代表性的题目. 历年来，研究生入学考试数学各学科知识点没有太大的变化，而且各学科考查的重点、难点比较稳定，在以往考试中会反复考查. 通过反复研究真题，考生可以从中发现规律，归纳出考查的重点、难点及常考题型，准确把脉定位自己的薄弱环节，进一步明确复习方向. 而辨析以往试卷中的典型错误，能够最有效地暴露自己的不足和复习时的误区，提供更有效的复习思路和策略. 本书包含十几年的考研真题，答案解析扼要翔实，方法指导高屋建瓴，考点总结提纲挈领，典型错误辨析全面，能极大地提高考生的解题技巧和思维方式，全面提升考生的数学素养和能力.

本书主要特点是：

1. 全面归纳总结：既有对考点分布的汇总和常考知识点的归纳，也有对重要题型的解题思路、解题方法和答题技巧的深层次总结. 据此考生不仅可以从全局上对考试要点有整体性的把握，更可以纲举目张，系统地把握数学知识的内在逻辑性.

2. 互动能力提升：每套试卷的每个题目，从知识点到思路再到方法都给出了翔实的点拨，部分难题、大题给出了多种解法，真正把每一个题目研究透. 通过对本书真题的研习，考生可以切实掌握考研数学的重点、难点以及深度，真正吃透题目解法，达到考试时胸有成竹的境界.

3. 深入剖析错误：根据编者多年的研究生入学考试数学阅卷经验，本书将各种典型错误解法放在相应的题目解答后面，培养思考错题、分析错题、善待错题的态度和习惯. 这样考生可避免再犯同类的错误，杜绝失分现象，有效减少失分.

4. 栏目实用生动：每道题目分为【考点分析】【解】【方法点击】【典型错误】几个特色板块：

【考点分析】从命题人的角度给出了想要考查的知识点，让考生掌握考研

数学应该复习的重点内容.从解题思路层面解析每一个题目,使考生不仅会做题目,而且会分析题目并会做同样类型的题目;

【解】全面翔实的解题过程;

【方法点击】就试题解答中所采用的方法进行总结,从解题的角度串起不同的知识点,使考生在潜移默化中培养数学思维模式.

【典型错误】研习错误解法也是一种重要的学习方法.编者根据多年的考研阅卷工作的经验,总结了考试时往年考生常见的错误,研习他人和自己可能犯的错误,就能进一步明辨是非,不再重蹈覆辙.

阅读本书时,应先自己动手做题,再将自己的结果与本书中的解法相比较.考生从平时就要加强对自己计算能力的训练,同时尽量按步骤把每一个题目的解答过程写下来,一来避免出错,二来养成卷面整洁的习惯.另外我们建议考生把本书的全部试题做 2～3 遍,通过反复练习,把不明白的地方真正弄明白,达到看到类似的题目就能想到解题思路的地步,才可以在最后的考试中做到胸有成竹.

本书由张天德、张德瑜、吕洪波、张焕玲编著.衷心希望我们的这本《考研数学试题典型错误辨析》能对您有所裨益.祝愿所有备考硕士研究生入学考试的学子们获取高分,心想事成!

作者

2017 年 4 月

目录

CONTENTS

第一部分

高等数学

一、极限与连续

1.1 数列极限

判断数列极限是否存在及求数列极限是考研数学的重要考点.

夹逼准则和单调有界准则是常用的判别极限是否存在的方法. 求数列极限的方法有利用定积分定义、夹逼准则、化为函数极限等.

例 1(2012 年) (Ⅰ)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(Ⅱ)记(Ⅰ)中的实根为 x_n,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

【考点分析】 本题考查连续函数的零点存在定理及极限存在准则(单调有界数列必有极限).

【解】 (Ⅰ)令 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$,则 $f_n(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续,且

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-1=0,$$

又 $f_n(1)=n-1>0$,即 $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$ 与 $f_n(1)$ 异号,于是由连续函数的零点存在性定理知,$f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内至少存在一个零点. 又

$$f'_n(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0,\quad x\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

故知 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调增加,所以 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内最多有一个零点,综上得 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有唯一零点,也即方程:$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且只有 1 个实根.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内存在唯一的零点,记为 x_n,则 $x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 记

$$f_{n+1}(x)=x^{n+1}+x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1=x^{n+1}+f_n(x).$$

又

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+\frac{1}{2}-1=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-1=0,$$

$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}+f_n(x_n)=x_n^{n+1}>0$(因为 x_n 是 $f_n(x)$ 的一个零点),故 $f_{n+1}(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},x_n\right)$ 内必存在唯一的零点 x_{n+1},即

$$\frac{1}{2} < x_{n+1} < x_n,$$

由此可见，数列$\{x_n\}$单调减少且有界$\left(由(\text{I})知\frac{1}{2}<x_n<1\right)$，故必存在极限(收敛). 不妨将$\{x_n\}$的极限记为$a$，则$a\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. 又因为

$$f_n(x_n) = x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n - 1 = 0, \quad 即 \quad x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故有$\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$(等比数列前$n$项和公式). 两端取极限有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1-x_n} = \frac{a-0}{1-a} = 1, \quad 解得\ a = \frac{1}{2},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

【方法点击】 (1) 在实根存在性问题上，经常会用到连续函数的零点存在性定理，即：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，又$f(a)$和$f(b)$异号，则存在$c\in(a,b)$，使得

$$f(c) = 0, \quad c\ 为\ f(x)\ 的零点.$$

本题思路是构造函数$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，将讨论已知方程根的问题转化为讨论$f_n(x)$零点的问题.

(2) 当没有x_n的具体表达式时，可考虑利用递归数列求极限，其基本方法是先证明递归数列$\{x_n\}$收敛(常用单调有界数列必收敛的定理)，再设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对递归方程取极限后，解出$A$即可. 也可先求出$A$，再证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

【典型错误】 大部分考生没有做对第(Ⅱ)问，主要原因是不能很好地利用第(Ⅰ)问的结论且不会运用极限存在准则. 2011年(19)题、2013年(20)题和本题类似，这也是近年来命题的特点，请考生关注. 部分考生第(Ⅰ)问时没有验证$f_n(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调增加，则在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内最多有一个零点，导致失分.

例 2(2006年) 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限.

(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【考点分析】 本题考查极限的存在准则及极限的求法.

【解】 (Ⅰ) 因为$0<x_1<\pi$，则$0<x_2=\sin x_1\leqslant 1<\pi$.

可推得$0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant 1<\pi$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{x_n\}$有界.

又有$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sin x_n}{x_n}<1$(因当$x>0$时，$\sin x<x$)，则有$x_{n+1}<x_n$，可见数列$\{x_n\}$单调减少，故由单调减少有下界数列必有极限知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在$x_{n+1}=\sin x_n$两边令$n\to\infty$，得$l=\sin l$，解得$l=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$(因$f(x)=x-\sin x$在$(-\infty,+\infty)$单调上升，有唯一零点$x=0$).

(Ⅱ) **解法一** 因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，由(Ⅰ)知该极限为"$1^\infty$"型，令$t=x_n$，则

$n\to\infty$时，$t\to 0$，而

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\sin t}{t}-1}}\right]^{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{1}}.$$

又

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}=-\frac{1}{6}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

解法二 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}.$$

又由（Ⅰ）知，当$n\to\infty$时，$x_n\to 0$，故考虑函数极限：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right).$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\xlongequal{\text{等价无穷小量代换}}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

【方法点击】 本题中用到了求数列极限的两种非常重要的方法.

(1) 在（Ⅰ）问中，对于有递推关系的数列极限的证明问题，利用单调有界数列必有极限准则来证明. 此类题型在以往的考研试题中经常出现.

(2) 在（Ⅱ）问中，关键一步是将离散的数列极限转化为连续的函数极限求解，其中出现的未定式极限求法多样，也可以利用$\sin x$的麦克劳林展开式进行计算.

【典型错误】 有的考生在数列极限存在的证明过程中，没有用数学归纳法证明，因而证明不完整，另一个常见错误是直接用洛必达法则计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)}{x_n^2}$，这是不允许的，即对数列不能直接用洛必达法则. 还有一些考生在求解方程$l=\sin l$时遇到困难，导致丢分.

例 3(2016 年) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

【考点分析】 本题考查数列的极限，定积分的定义，定积分的分部积分法.

【解】 由定积分的定义知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x\\&=-\cos1+\sin x\Big|_0^1=\sin1-\cos1.\end{aligned}$$

【方法点击】 设 $x_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$,求$\lim_{n\to\infty}x_n$ 常用下列方法:

(1) 根据数列特点,先求数列的和再求极限.

(2) 利用定积分定义.

若 $x_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ 可以表示为 $x_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i$,而 $b_i=f\left(\frac{i}{n}\right)$或 $f\left(\frac{i-1}{n}\right)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 利用夹逼准则.

【典型错误】 本题利用定积分的定义把数列的极限表示为定积分,再应用定积分的分部积分法计算定积分,题中加项的项数随 n 变动,不能用加法求极限法则. 另有部分考生在将积分$\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x$ 化为 $-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x$ 时, 丢掉负号,导致结果错误.

1.2 函数极限

求函数的极限是考研数学的必考题目. 方法有利用极限的四则运算法则、等价无穷小代换、洛必达法则、重要极限、泰勒公式等.

例 4(2016 年) 求$\lim_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

【考点分析】 本题考查未定式的极限.

【解】 因为$\lim_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}}$,且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos2x+2x\sin x}\cdot\frac{-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{4\sin2x-3\sin x-x\cos x}{12x}\\&=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以$\lim_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

【方法点击】 求极限的方法:

(1) 利用极限的四则运算法则.

(2) 利用极限存在准则.

(3) 利用关于无穷小的定理(如有界函数乘以无穷小量仍为无穷小量等).

(4) 利用极限存在的充要条件 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

(5) 利用等价无穷小代换定理.

(6) 利用函数的连续性.

(7) 利用恒等变形.

(8) 利用两个重要极限及一些常用的极限.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$;

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$;

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n,\\ 0, & \text{当 } m<n,\\ \infty, & \text{当 } m>n;\end{cases}$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$;

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(9) 利用洛必达法则求极限.

① 在极限式子中,如果出现有非零的极限因子,则用极限的乘法把它分离出去,然后使用洛必达法则,可使计算变得简单.

② 在“$\dfrac{0}{0}$”未定型中,若能用简单的等价无穷小替换,则先替换,然后应用洛必达法则,可使求导计算简单.

(10) 利用导数定义.

(11) 利用定积分定义.

(12) 利用泰勒公式.

【典型错误】 在第一次洛必达法则后,再用乘法极限法则先求出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x+2x\sin x}=1$,有的考生没有注意到这一点,直接用洛必达法则求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3(\cos 2x+2x\sin x)}$,由于太烦琐,最后没有得出正确结果.

例 5(2005 年) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}.$$

【考点分析】 本题将未定式极限与积分上限函数求导结合在一起考查,属于常见的命题方式.

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$$
$$\xlongequal{\text{设 } x-t=u}\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{-x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$
$$\xlongequal[\text{(}\xi\text{ 在 0 和 }x\text{ 之间)}]{\text{积分中值定理}}\lim_{\substack{x\to0\\(\xi\to0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

【方法点击】 此类未定式极限的典型方法是用洛必达法则，但本题中因为分子、分母所含的变上限定积分形式特殊（上限与被积函数都有 x），故分子、分母求导前应先变形，利用换元法将 x 转化到定积分外面.

【典型错误】 本题容易出现的错误是：在利用一次洛必达法则后，继续用洛必达法则
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}=\frac{1}{2}.$$
错误的原因：$f(x)$未必可导，即 $f'(x)$未必存在.

1.3 无穷小比较

无穷小的比较在研究生入学考试中是近几年数学一、数学二常考内容，虽然占分不多（一般为选择题或填空题），但此部分内容考到的概率很高，所以复习时应引起重视.

例 6(2012 年) 已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

（Ⅰ）求 a 的值.

（Ⅱ）若 $x\to0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

【考点分析】 本题考查极限求法；无穷小的比较.

【解】 （Ⅰ）
$$a=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x-\sin x}{x^2}\right)=1+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}$$
$$=1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=1+0=1,$$
故 $a=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $a=1$，则 $f(x)-a=\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}-1=\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$.

由于 $f(x)-a\sim\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^2}(x\to0)$，令 $g(x)=\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^2}$，故只需

求解 $x\to 0$，$g(x)$是 x^k 的同阶无穷小时，k 的取值.

解法一 待定系数法.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(x-\sin x)}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(k+2)x^{k+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2(k+2)}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k+1}}=C,\quad \text{其中 } C \text{ 为常数，且 } C\neq 0;$$

故 $k+1=2$，即 $k=1$ 时，$g(x)$与 x^k 是同阶无穷小，也即 $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，也即 $f(x)-a$ 与 x 是同阶无穷小.

解法二 泰勒公式法.

由于 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^k}=\frac{x^2+x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-x^2+o(x^3)}{x^{k+2}}=\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^{k+2}}$$

可知当 $k+2=3$ 时，$g(x)$是 x 的同阶无穷小，故 $k=1$.

【方法点击】 (1) 判断无穷小 $f(x)$，$g(x)(x\to a)$是同阶、等价或高阶的最基本方法是求$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} l\neq 0,l\neq 1, & \text{同阶而不等价,}\\ 1, & \text{等价,}\\ 0, & f(x)\text{ 比 } g(x)\text{ 高阶,}\\ \infty, & f(x)\text{ 比 } g(x)\text{ 低阶.}\end{cases}$$

(2) 应该熟练掌握一些基本初等函数的泰勒公式，如：

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x),\quad \text{其中 } R_n(x)=o(x^n),(x\to 0);$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n}(x),\quad \text{其中 } R_{2n}(x)=o(x^{2n}),(x\to 0);$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+1}(x),\quad \text{其中 } R_{2n+1}(x)=o(x^{2n+1}),(x\to 0);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_n(x),$$

其中，$R_n(x)=o(x^n)$，$x\to 0$；

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+R_n(x),\text{其中 } R_n(x)=o(x^n),(x\to 0).$$

(3) 等价无穷小代换定理. 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A$，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A.$$

常见的等价无穷小. 设 $\alpha(x)\to 0$,则:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad \tan\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad \arctan\alpha(x)\sim\alpha(x);$$
$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);\quad \ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x);$$
$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}[\alpha(x)]^2;\quad [1+\alpha(x)]^k-1\sim k\alpha(x),k\neq 0.$$

【典型错误】 本题的主要出错点在于将分子中的 $\sin x$ 用等价无穷小代换. 要特别注意的是:$\sin x$ 作为因子出现时,可以用等价无穷小代换,否则不可以直接代换,但是可以如解法二作泰勒展开. 另有一些考生将 $\sin x$ 的泰勒展开式:$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$记错,导致最后结论错误.

例 7(2006 年) 试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

【考点分析】 本题考查无穷小的比较,题设方程右边为关于 x 的多项式,要联想到 e^x 的泰勒展开式,比较 x 的同次项的系数,可得 A,B,C 的值.

【解】 将 e^x 的泰勒展开式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$代入题设等式得

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right](1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

整理得

$$1+(B+1)x+\left(B+C+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=1+Ax+o(x^3),$$

比较两边同次幂系数得

$$\begin{cases}B+1=A,\\ B+C+\frac{1}{2}=0,\\ \frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}=0,\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}A=\frac{1}{3},\\ B=-\frac{2}{3},\\ C=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

【方法点击】 题设条件中含有高阶无穷小形式的条件时,要想到用泰勒公式求解. 考生需熟练掌握常用函数的泰勒公式.

【典型错误】 许多考生看到高阶无穷小,就想到根据无穷小比较的定义,利用极限来确定 A,B,C 的值,这种方式对本题不太适用,易出现错误的结论.

1.4 连续

函数的连续性的讨论在近几年的考研试题中经常出现,虽然连续不如极限考得频繁,但它是常考的内容. 连续的题目在考题中即使没有直接出现,也会在讨论函数可导性时用到它的定义.

例 8(2003 年) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0.\end{cases}$$

问 a 为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处连续，a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点？

【考点分析】 本题主要考查分段函数在分界点处的连续性.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\lim_{x\to0^-}\sqrt{1-x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{6ax}{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=-6a;$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2\lim_{x\to0^+}(a^2e^{ax}+2)=2a^2+4.$$

令 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，有 $-6a=2a^2+4$，得

$$a=-1,\quad 或\quad a=-2.$$

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$，即 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点.

【方法点击】 函数 $f(x)$在点 x_0 处连续应满足 3 个条件：

(1) 在 $x=x_0$ 处有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

【典型错误】 部分考生求左、右极限错误，另有部分考生没有求出 $f(x)$在 $x=0$ 处为可去间断点的 a 的范围. 考生应注意在利用洛必达法则求左、右极限时，等价无穷小代换的应用及析出非零的极限因子.

例 9(2008 年) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$有(　　).

(A) 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　(B) 1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C) 2 个跳跃间断点　　(D) 2 个无穷间断点

【考点分析】 本题考查函数的间断点及其类型.

【解】 当 $x=0$ 时，$f(x)$无定义，当 $x=1$ 时，分母$|x-1|=0$，因此 $f(x)$有 2 个间断点 $x=0,x=1$. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\csc x\cot x}$$