国家自然科学基金(50678150、51008250、51308470)
教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-10-0701)
联合资助

车辆-桥梁时变系统随机振动
——理论与工程应用

李小珍 晋智斌 朱 艳 著

科 学 出 版 社

国家自然科学基金(50678150、51008250、51308470)
教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-10-0701)
联合资助

车辆-桥梁时变系统随机振动
——理论与工程应用

李小珍　晋智斌　朱　艳　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是国家自然科学基金资助项目（50678150、51008250、51308470）和教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-10-0701)的研究成果。本书针对车辆-桥梁时变系统随机振动的复杂性，将协方差分析法、摄动法和虚拟激励法引入时变系统的随机振动研究中。

全书共分 8 章，第 1 章总结了随机振动理论的研究现状及车辆-桥梁时变系统随机振动的研究现状，对随机参数结构动力学的研究现状也做了简单回顾；第 2 章扼要介绍随机振动基础知识；第 3、4 章介绍协方差分析法在车辆-桥梁时变系统随机振动研究中的应用；第 5 章将随机摄动法引入车辆-桥梁时变系统随机参数结构振动的研究；第 6 章介绍虚拟激励法的基础知识外；第 7、8 章将虚拟激励法引入车辆-桥梁时变系统的随机振动研究。

本书可供桥梁、车辆等工程领域的大学高年级本科生、研究生、教师及科技人员和工程设计人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

车辆-桥梁时变系统随机振动——理论与工程应用 / 李小珍，晋智斌，朱艳著.— 北京：科学出版社，2017.6

ISBN 978-7-03-045350-1

Ⅰ.①车… Ⅱ.①李… ②晋… ③朱… Ⅲ.①铁路桥-时变系统-振动分析-研究 Ⅳ.①U448.131

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 180258 号

责任编辑：张 展 朱小刚 / 责任校对：葛茂香

责任印制：罗 科 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2017 年 6 月第一次印刷 印张：10 3/4

字数：210 千字

定价：75.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

车辆－桥梁时变系统随机振动研究始于 20 世纪 60 年代移动荷载模型的建立，然而，由于时变系统的复杂性，时至今日，车辆－桥梁时变系统的随机分析理论尚未严格建立。作为系统输入的轨道不平顺、风荷载和地震作用等从本质上说都属于随机过程，传统意义上的车辆－桥梁时变系统动力分析得到的结果仅仅是一组或若干组的样本值，难以反映时变系统的振动规律。

除荷载的随机性外，工程结构中还广泛存在另一类不确定因素－－参数结构的随机性。参数结构的随机性可能会引起动力响应的大幅变动，因而随机参数结构动力分析日益受到重视。

针对车辆－桥梁时变系统随机振动的复杂性，本书将协方差分析法、摄动法和虚拟激励法引入时变系统的随机振动研究中，是介绍车辆－桥梁时变系统随机振动研究的专著，全书共分 8 章。第 1 章总结了随机振动理论的研究现状及车辆－桥梁时变系统随机振动的研究现状，对随机参数结构动力学的研究现状也做了简单回顾；第 2 章扼要介绍了随机振动基础知识；第 3、4 章介绍协方差分析法在车辆－桥梁时变系统随机振动研究中的应用；第 5 章将随机摄动法引入车辆－桥梁时变系统随机参数结构振动的研究；第 6 章介绍了虚拟激励法的基础知识；第 7、8 章将虚拟激励法引入了车辆－桥梁时变系统随机振动的研究。

本书在编写过程中参考了西南交通大学桥梁结构动力学研究团队的大量研究成果，特向团队成员致以谢意。为了本书的出版，编辑、校对付出了辛勤劳动，在此表示衷心感谢。同时，本书的出版得到了国家自然科学基金资助项目(50678150、51008250、51308470)和教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET－10－0701)的资助，作者在此一并表示由衷的感谢。

由于书中许多内容是最近的研究成果，恐尚欠锤炼，加之作者水平有限，书中难免有疏漏和不足之处，恳请专家和读者批评指正。

李小珍

目　　录

第1章 绪　论

1.1　随机振动理论的研究现状

作为机械振动或结构动力学与概率论及其分支相结合的产物，随机振动是关于机械或结构系统对随机激励的稳定性、响应及可靠性的一整套理论的总称，是现代应用力学的一个分支。

20世纪50年代中期，为解决航空与宇航工程中所面临的激励的随机性，将统计力学、通信噪声及湍流理论中已有的方法移植到机械振动中来，初步形成了随机振动这门学科[1]。

1958年在美国麻省理工学院举办的随机振动暑期讨论班及该讨论班文集的出版可认为是随机振动作为一门学科诞生的标准[2]。此后，随机振动在环境测量、数学理论、振动引起的损伤、系统的识别与诊断、试验技术及结构在随机荷载下的响应分析与可靠性研究等方面都有了很大的发展[3-16]。

时不变线性振动理论很快就趋于成熟，从20世纪60年代起，随机动力学的研究主要转向非线性系统。美国声学学会在1962年举办的一次讨论会有效地促进了非线性随机振动理论的研究，随后国际上出版了许多随机动力学的教科书、专著及文集[17-21]。朱位秋[22]在其专著中详细地介绍了直到20世纪90年代初，有关线性与非线性随机振动各分支的理论与应用的研究成果。许多预测非线性系统响应，判定其稳定性与分岔、估计可靠性的方法也相继被各国学者提出。在随机振动测试技术方面，1965年Cooley与Kukey发明的快速傅里叶变换算法与计算机技术的发展，使得数字式设备从20世纪70年代以来得到越来越普遍的采用。在此基础上，系统识别与诊断及随机振动试验技术也有了很大的发展。1997年，张森文等学者就我国随机振动研究近十年来的进展做了全面总结，对非线性随机振动、非平稳随机振动、时域直接积分的数值方法、随机分岔和随机混沌、参数随机振动系统、测试技术与分析软件及随机有限元等领域的显著进展做了介绍，并结合摄动法动力方程分离和时间离散的时域直接积分，具体介绍了时域有限元和空间有限元相结合的动力随机有限元的一些进展[23]。Lin在2000年对结构随机振动理论研究做了总结与展望[24]。近十年来以浙江大学朱位秋为首的研究小组通过将随机激励耗散多自由度系统的研究转化为随机激励耗散哈密顿系

统，利用相应哈密顿系统的可积性与共振性，将哈密顿系统分为不可积、完全可积非共性、完全可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五类，提出了预测随机激励耗散五类哈密顿系统的响应、判定稳定性与分岔、估计可靠性及非线性随机最优控制理论方法，形成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系框架[25−28]。从密度演化的基本思想出发，2002 年以来，李杰和陈建兵建立了广义密度演化方程，发展了密度演化分析理论，并在随机结构的线性与非线性动力响应分析中取得了较为成功的研究进展[29−33]。

近年来，随机振动的研究主要集中在如下几个方面。

(1)非线性随机振动。20 世纪 60 年代初，非线性随机振动即受到极大关注。将扩散过程和随机微分方程引入随机振动中，经 Fokker、Plank、Kolmogorov 等改进得到了求解非线性随机振动的 FPK 方法，而后 Ito 建立了 FPK 方法的严密数学基础。对于非线性系统而言，FPK 方法也仅能求得单自由度系统在白噪声激励下的精确平稳解。由于非线性随机振动问题的求解困难，因此发展了多种近似方法，如随机平均法、矩法、统计线性化方法等。朱位秋于 1985 年[34]和 1994 年[35]分别综述了非线性随机振动的研究进展，在专著[25]中提出了高斯白噪声激励下耗散哈密顿系统等效非线性系统法、拟哈密顿系统随机平均法，构成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论体系框架。

(2)非平稳随机振动及随机振动的时域解法。地震、阵风等显然不符合平稳性假设，此类荷载作用下的结构振动为非平稳随机振动。Priestley[36]提出一类特殊的非平稳过程——调制随机过程，Hammond[37]给出了此类非平稳激励下演变响应谱的频域解法。一般而言，非平稳响应采用系统的状态空间动力方程及复模态分析法更为有效，即在时域中求解系统协方差矩阵所满足的李雅普诺夫矩阵方程得到响应矩，德国在车辆随机振动研究方面多采用此种方法。

(3)复杂激励形式下大型结构随机振动问题。多自由度体系往往受到多点激励，且各点激励之间具有一定的时间、空间相关性，因此多点激励随机振动研究受到极大关注，如 Kiureghian 等[38]、Ernesto 等[39]对受多点地震激励的结构随机振动进行了研究；刘天云等[40]针对地震激励的时—空相关特性，采用两步相关谱展开，通过结构振型分解法直接求得结构随机响应。李杰等[41]提出了多点激励作用下线性系统随机地震反应分析的均值反应谱方法。传统上，多自由度结构的随机振动分析首先做振型分解，得出各振型的传递函数，对模态随机响应遍历求和，方可得到结构的响应谱(CQC 法)，此求和过程计算量巨大。工程上常采用忽略振型耦合项的 SRSS 方法，但对于参振频率分布密集的大型结构而言，此种近似会带来较大误差。为解决多自由度体系随机振动分析求和效率低下的问题，近年来林家浩等发展了一种虚拟激励法，改变 CQC 法中的求和与乘积运算次序(快速 CQC 法)，使得计算效率提高了 2～4 个数量级[42]。此法可求解多点

完全或部分相干激励、均匀或非均匀调制的非平稳激励下多自由度体系的随机振动问题，该法在实际工程结构中已有了一些应用[43]。车辆－桥梁随机振动分析方法与经典随机振动有较大差别，下面将介绍各国研究者处理车辆－桥梁随机振动的主要方法。

1.2　车辆－桥梁时变系统随机振动的研究现状

车辆－桥梁时变系统随机振动分析始于 20 世纪 60 年代对移动荷载模型的研究，由于时变系统的复杂性，至今，车辆－桥梁时变系统振动的随机分析理论尚未严格建立。下面对系统激励形式和研究方法两个方面对车辆－桥梁随机振动的研究现状进行阐述。

1.2.1　激励形式

1. 移动荷载模型

忽略车辆与桥梁的相互作用，将车辆简化为移动的单个或多个集中力，将这些移动荷载看做随机过程来模拟，采用随机振动理论进行研究。

从 20 世纪 60 年代起，各国的学者就开始使用随机荷载模型进车辆－桥梁时变系统随机振动分析。Fryba 将荷载假设为白噪声过程，研究了单个随机移动荷载和分布移动荷载作用下梁的随机响应问题[44]。80 年代，Sinady 将车辆荷载假设为一系列具有随机幅值和速度的随机变量，车辆到达桥梁的时间是随机的，由此得到了桥梁挠度均值和方差的显式解[45]。90 年代，丁建华等给出了车流对桥梁作用的随机分布力模型，导出了相应的空间—时间相关函数及空间相关功率谱密度函数，针对简支型桥梁，推导出随机车流作用下桥梁挠度响应的数字特征函数[46]。孙璐和邓学钧在文献［47］中给出车辆随机荷载的统计描述，获得了梁的随机动挠度理论表达式及随机响应几种重要统计量的计算公式。Wang 和 Lin 将荷载作为平稳过程，将荷载速度、统计特征、梁跨总数等因素对梁的挠度、弯矩均值和方差的影响做了讨论[48]。Zibdeh 和 Juma 研究了随机移动荷载通过外贴复合材料的梁的随机振动，考虑移动荷载加速、减速和匀速三种情况下梁响应方差的闭合解，讨论了速度、贴层厚度、方向对随机振动特性的影响[49]。Abu-Hilal 研究了各种边界条件下的梁在随机移动荷载下的振动，模型中的荷载均值不变，得到挠度方差的闭合解，讨论了加速、减速和匀速三种情况下，对阻尼、速度的影响[50]。DiPaola 等将移动荷载作为随机变量，到达时间作为泊松过程，

基于 Ito 微分方程的扩展，提出了一种考虑输入非正态性的分析桥梁振动的一般方法，并将得到的各阶矩和累计量的方程与抽样法进行了比较[51]。卜艳春根据弹性体的基本理论和连续体的随机振动理论，得到在外加随机荷载作用下桥梁的随机振动方程，导出了随机振动函数，得到桥梁振动能量受随机荷载频率影响的分布规律[52]。林海等将车辆荷载作用力理想化为一系列简谐力的叠加，分析了连续梁结构在汽车荷载作用下的动态性能，讨论了不同车速、车型、载重情况下桥梁动态响应的变化，由此得到影响结构动态性能的主要因素[53]。

2. 轨道不平顺

轨道不平顺是指用来支承和引导车轮的轨道接触面沿轨道长度方向与理论平顺轨道面之间的偏差[54]。实际线路上的各种轨道不平顺是由不同波长、不同相位及不同幅值的随机不平顺波叠加而成的，是与线路有关的复杂随机过程。就无限长的轨道来说，它是一个近似各态历经的弱平稳过程，但对局部不平顺来说，它是一个非平稳过程。通常的轨道不平顺是无法用一个具有确定的幅值、波长和相位的数学关系式来明确表示的，而必须用随机振动理论中的统计参数来描述。目前对于轨道不平顺随机特性的统计包括幅值统计和功率谱统计两个方面。

1)轨道不平顺的幅值统计

轨道不平顺的幅值特性通常采用均方值、方差或标准差来描述。轨道不平顺幅值的均方值表示其随机数据的强度。对于长度为 $0\sim X$ 的轨道不平顺随机样本函数 $\eta(x)$，其均方值 φ_η^2 是其平方值的算术平均值，即

$$\varphi_\eta^2 = \frac{1}{X}\int_0^X \eta^2(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

均方值反映了有限长度 $0\sim X$ 区段内的轨道不平顺程度。

轨道不平顺的方差 σ_η^2 反映了不平顺随机变化的幅值对其平均值 μ_η 的偏离程度。方差的表达式为

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{X}\int_0^X [\eta(x)-\mu_\eta]^2\mathrm{d}x = \frac{1}{X}\int_0^X \eta^2(x)\mathrm{d}x - \mu_\eta^2 \tag{1.2}$$

2)轨道不平顺的功率谱统计

20 世纪 70～80 年代，Corbin、Hamid 等提出了用功率谱统计来描述近似平稳随机过程的轨道不平顺的概念及各种轨道不平顺功率谱密度函数（power spectrum density，PSD）。70 年代末，我国铁道科学研究院的罗林[55]系统地阐述了轨道不平顺的平稳和非平稳特性、轨道不平顺功率谱的物理意义和应用价值，提出了可用于车辆—轨道动力相互作用分析和轨道不平顺控制的实测轨道不平顺功率谱，以及用功率谱密度来描述和评定轨道不平顺的方法。

轨道不平顺功率谱密度函数又称为均方谱密度函数，是用均方值的谱密度对随机数据频率结构的描述。对于长度为 $0\sim X$ 的轨道不平顺随机样本函数 $\eta(x)$，

其功率谱密度函数 $S_\eta(f)$ 定义为

$$S_\eta(f) = \lim_{\Delta f \to \infty} \frac{1}{\Delta f}\left[\lim_{x \to \infty} \frac{1}{X}\int_0^X \eta^2(x, f, \Delta f)\mathrm{d}x\right] \tag{1.3}$$

式中，$\eta(x, f, \Delta f)$表示轨道不平顺 $\eta(x)$在$(f \sim f + \Delta f)$的带宽 Δf 频率范围内的那部分值，也可以理解为经过窄带滤波器后的不平顺量。

英、日、德、美、俄罗斯、印度、捷克等国家都确定了各自轨道不平顺的谱密度或相关函数，文献[56]给出了德国高速谱和中国干线轨道谱形式。

目前国内外常用的轨道不平顺数值模拟方法主要有二次滤波法、三角级数法、白噪声滤波法和傅里叶逆变换法[57]。

(1)二次滤波法。在对不同形式的轨道功率谱进行数值模拟时，二次滤波法需要设计出不同的滤波器。滤波器的设计与功率谱密度函数的形式有关，对于给定的功率谱密度函数，其设计的滤波器是确定的。方法原理如下。

①将里程为 L 的一段被模拟的轨道划分成 N 等份，每等份的长度为 $\Delta L = L/N$ 产生一个均匀分布于(0，1)区间的随机数列u_i(i =1，2，…，N −1)。

②用 Box-Muller 方法改变每两个(u_i，u_{i+1})随机数成为两个高斯分布随机变量：

$$\begin{cases} n_i = \sigma\sqrt{-2\ln u_i}\cos(2\pi u_{i+1}) \\ n_{i+1} = \sigma\sqrt{-2\ln u_i}\sin(2\pi u_{i+1}) \end{cases} \tag{1.4}$$

③经过两次滤波，可将均匀分布于(0，1)区间的随机数列u_i转化为相对应的轨道谱在时域内的随机样本序列 x_k(k =2，3，…，N)，则有

$$\begin{cases} x_1 = (1-\alpha)n_1 \\ x_k = (\alpha+\beta)x_{k-1} - \alpha\beta x_{k-1} + (1-\alpha)n_k \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\alpha = \exp(-\Delta L\omega_c)$$

$$\beta = \exp(-\Delta L\omega_s)$$

式中，w_c、w_s 均为时间域截断频率，rad/s；N 为总的取样点数。

(2)三角级数法。将轨道不平顺看做零均值的平稳遍历的高斯过程，则可以用不同形式的三角级数进行模拟。以余弦波为例，轨道不平顺时域样本可以模拟为

$$x(t) = \sum a_k\cos(\omega_k t + \varphi_k) \tag{1.6}$$

式中，$x(t)$为轨道不平顺时域样本序列；k 为取样点；ω_k为采用的频率；φ_k为在[0，2π]上均匀分布的相互独立的随机变量；a_k为均值为零、标准方差为σ_k^2的正态随机变量。

(3)白噪声滤波法。将轨道不平顺这一随机过程抽象为满足一定条件的白噪声，然后经某一假定系统进行适当变换而拟合出轨道不平顺时域样本函数。不同形式的功率谱密度函数需要设计不同的滤波器，轨道功率谱密度函数可以采用以

下滤波方程作为随机过程的时域数学模型：

$$\dot{x}_i(t)+\alpha v x_i(t)=\xi_i(t) \tag{1.7}$$

$$E[\xi_i(t)\xi_i(\tau)]=2\alpha v\beta^2\delta(t-\tau) \tag{1.8}$$

式中，$x(t)$为过滤生成的轨道不平顺样本函数的时间序列；α 为与轨道等级相关的常数；v 为运行速度，m/s；$\xi(t)$为零均值白噪声输入随机信号；β 为轨道不平顺程度常数；$\delta(t)$为 Dirac 广义函数。

(4)傅里叶逆变换法。该方法由 Cebon 首次提出，陈果[56]在其博士论文中基于功率谱密度离散的傅里叶逆变换模拟了轨道不平顺。傅里叶逆变换是通过时间序列估计功率谱密度的 Blackman-Turkey 周期图法，反推离散后的 PDS 与时间序列的关系式为

$$S_{xx}(k)=\frac{1}{N^2}\left|\mathrm{DFT}[x_s]\right|^2=\frac{1}{N^2}[X^*(k)X(k)] \tag{1.9}$$

式中，N 为总的采用点数；$S_{xx}(k)$为离散化的功率谱密度；$\mathrm{DFT}[x_s]$为对时间序列 x_s取离散傅里叶变换；$X(k)$为时间序列 x_s的傅里叶频谱；$X^*(k)$为 $X(k)$的复共轭。

若已知功率谱密度，由式(1.9)反推随机过程的傅里叶频谱值，进而通过对复序列 $X(k)$进行傅里叶逆变换，可以得到序列化的时域模型为

$$\begin{aligned}&x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}X(k)\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi kn}{N}\right),n=0,1,\cdots,N-1\\&X(k)=N\xi_k\sqrt{S_n(k\Delta f)\Delta f},k=0,1,\cdots,N/2\\&\xi_k=\exp(\mathrm{i}\varphi_k)\end{aligned} \tag{1.10}$$

式中，ξ_k为独立相位序列；φ_k服从 $0\sim2\pi$ 均匀分布。

3)构架蛇行波

车辆沿直线轨道运行时，当轮对中心偏移线路中心时，由于车轮踏面具有斜率，轮缘与钢轨侧面之间有间隙，同一车轴上的左右两个车轮将以不同的滚动圆直径沿轨道滚动，使两车轮所行经的距离不同。同时两轮对滚动行程的不相同又使轮对轴线偏移，偏向另一侧。因此，轮对在前进的同时，在水平面内做横摆运动及摇头运动，其运行轨迹成为一条正弦曲线，这种现象称为轮对的蛇行运动。

曹雪琴和陈晓应用随机振动理论分析桁架桥在列车通过时的横向振动，采用模拟随机变量、两次滤波及逐次推进求解随机振动方程，并由计算结果认为蛇行是引起横向振动的主要因素，轨道不平顺是次要因素[58]。

随着行车速度的不断提高，剧烈的蛇行运动使车轮轮缘与钢轨相撞，形成车轮与轨道之间的相互作用力，进一步成为车辆－桥梁系统横向振动的自激激励源。在车辆－桥梁系统动力分析中，轮轨之间的蛇行运动可以表示为

$$y_s(x)=A_s\sin\left(\frac{2\pi V}{L_s}t+\varphi_s\right) \tag{1.11}$$

式中，L_s为蛇行运动的波长。

文献[54]指出，L_s的确定应考虑轮缘磨耗程度的影响：当新车轮轮缘踏面斜率为$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{20}$时，相当于$L_s=15.7\text{m}$，当轮缘磨耗至极限时，相当于$L_s=6.65\text{m}$。因为一列车中各车轮踏面的磨耗程度是任意的，一般可按均匀分布的随机变量处理，即$L_s \sim R(6.65, 15.7)$，单位为 m。φ_s为任一轮对的初相位，假定其为在$0\sim2\pi$范围均匀分布的随机变量，即$\varphi_s \sim R(0, 2\pi)$，单位为 rad。$A_s$表示轮对蛇行运动的振幅值，假设一个轮对$A_s \sim R(2.5, 4)$，单位为 mm。

部分学者认为轮轨关系过于复杂，无法描述清楚，因而直接将转向架构架的实测波形或人工蛇行波作为车桥系统的激励源。由于人为地假定转向架的振动波形为已知，因此可求解车辆－桥梁系统响应。

曾庆元等[59]提出以构架蛇行波作为车辆－桥梁时变系统横向振动激励源的思想，向俊从数学、力学的角度对此思想进行了论证[60]。曾庆元和朱汉华提出了车辆－桥梁时变系统振动能量随机分析方法，参考人工地震波，建立车辆构架蛇行波，以此人工波作为激励源，计算车辆－桥梁时变系统具有要求概率水平的振动响应[61]。文献[62]认为，采用构架蛇形波作为输入源，表面上看避开了复杂的轮轨关系，但是无法考虑在不同桥梁上、不同车型以不同速度在不同线路上运行时车辆转向架构架振动波形的差别。

1.2.2　研究方法

1. 随机模拟法

随机模拟(random simulation)法又称 Monte-Carlo(MC)法，有时也称为随机抽样(random sampling)技术或统计试验(statistical testing)法。其基本思想是，首先建立一个概率模型或随机过程，使它的参数等于问题的解，然后通过对模型或过程的观察或抽样试验来计算所求参数的统计特性，最后给出所求解的近似值。解的精确度可用估计值的标准误差来表示。

假设所要求的量为随机变量 η 的数学期望 $E(\eta)$，那么近似确定 x 的方法是对 η 进行 N 次重复抽样，产生相互独立的 η 值的序列η_1，η_2，…，η_N，并计算其算术平均值，即

$$\bar{\eta}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\eta_N \tag{1.12}$$

根据柯尔莫哥洛夫强大数定理有

$$P\left(\lim_{N\to\infty}\bar{\eta}_N=x\right)=1 \tag{1.13}$$

因此当 N 充分大时，

$$\bar{\eta}_N = E(\eta) = x \tag{1.14}$$

成立的概率为 1，即可用 $\bar{\eta}_N$ 作为所求量 x 的估计值。

根据随机模拟法的原理解决实际问题的步骤如下：

(1)对待求问题建立简单而又便于实现的概率统计模型，使所求的解恰好是建立模型的概率分布或数学期望等概率特征量。

(2)根据概率统计模型的特征和计算方法的需要，改进模型以提高效率、降低计算费用。

(3)建立对随机变量的抽样方法，其中包括建立产生伪随机数的方法和特征概率分布，产生相应随机变量的随机抽样方法。

(4)给出获得所需求解的统计估计及方差或标准差的方法。

随机模拟法实际上是利用计算机进行试验，由于试验次数不可能无限大，因而本质上是一种通过试验求近似解的方法。此方法的精度依赖于：

(1)建立模型是否正确。

(2)输入随机数的质量，如谱密度近似程度和产生随机数的算法。

(3)分析例子的数目。

随机模拟法的缺点是对结果精度难以估计，对某些问题难以应用取样加速收敛技术，而且计算工作量大，难以应用于复杂的工程结构，因而只作为检验其他近似数值方法的可行性尺度在随机结构动力分析中使用。然而随着计算机技术的不断发展，随机模拟法的这个缺点将越来越小[63,64]。

曾庆元等采用对各行车速度下实测构架蛇行波进行统计分析，得到样本的标准差，用随机模拟法模拟出各种车速的蛇行波，输入车辆－桥梁系统中进行确定性分析[59]。夏禾等根据实测，由时间序列自回归模型生成随机激励作为系统的输入，对列车通过桥梁的轮对加速度的全过程进行了计算机模拟，得到桥梁的动力响应，并对计算结构进行了统计分析[65]。王媛等根据秦沈客运专线高速列车构架蛇行波的现场测试资料和试验结果，采用三角级数模型及随机模拟法随机模拟出高速列车在 160～300km/h 范围内的构架人工蛇形波，解决了车辆－桥梁(轨道)时变系统横向振动随机分析的激励源问题[66]。曾庆元等采用国内现行列车速度构架振动的实测资料，根据能量振动理论，用能量方差σ^2作为控制条件，随机模拟出高速列车构架人工蛇行波[67]。

2. 协方差分析法

对系统或元件的协方差分析，就是在已知的随机输入(控制、干扰或参数变化)下，研究该已知系统输出过程的统计特性，即均值与协方差等一、二阶矩(含相关函数、频谱密度、方差等)[68]。

非平稳随机扰动 $\eta(t)$下，时变线性系统的状态 $x(t)$的均值与协方差矩阵微

分方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{\eta}(t) \tag{1.15}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{F}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{G}(t)\bar{\boldsymbol{\eta}}(t) \tag{1.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{xx}(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{P}_{xx}(t) + \boldsymbol{P}_{xx}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t) + \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(t) \tag{1.17}$$

式中，T 表示矩阵的转置；$\boldsymbol{Q}(t)$为 $\boldsymbol{\eta}(t)$的谱密度矩阵。

已知线性系统(1.15)与扰动 $\boldsymbol{Q}(t)$时，由式(1.16)和式(1.17)的解可得各状态 $x(t)$的均值和协方差。对于非线性系统需先进行线性化。线性化法的选择主要取决于输入的类型与大小、非线性函数的特性与强弱。非线性与随机性都很弱的非周期输入及函数连续可微时可采用直接线性化法，但因未考虑到输入的方差而带片面性。纯周期输入下可用谐波线性化法。统计线性化法考虑了输入的均值与方差，较为全面。各种线性化方法可参考文献[68]。

线性化协方差分析法在系统分析、非线性估计与滤波及非线性控制等方面都得到广泛的应用。文献[69]认为协方差分析法同一般传统的频域分析法相比具有的优点在于：可以求解李雅普诺夫矩阵方程，直接得出有关重要参数的方差值，适用于非线性时变系统的分析。陈泽深等在车辆动力学的基础上引入激励成型滤波器和感觉成型滤波器，将“路—车—人”三者耦合成为一个整体动力学系统，建立完整的理论计算模型，对轨道不平顺、线性及非线性车辆模型及振动对人作用产生的感觉进行综合分析，将轨道不平顺视为平稳的正态分布和各态历经的随机变量，用多刚体系统动力学推导运动方程，以协方差分析法在时域内进行理论建模分析，引入感觉成型滤波器产生输出信号以评定振动对人体反应程度，通过求解李雅普诺夫方程直接得出有关重要参数的方差值[69]。德国的 Wedig 等以车辆动力学和结构动力学为背景研究随机振动问题，在非线性随机振动研究中比较多地应用了时域内的协方差分析法[70]。文献[71]提出了车辆－桥梁随机振动的协方差分析法，由白噪声通过成型滤波器得到给定谱密度函数的轨道不平顺输入，利用白噪声过程的性质，得到非定常系统响应协方差分析的递推方法。

3. 演变随机响应的统一解法

演变随机过程是指平稳随机过程按某种确定性演化规律得来的一类非平稳随机过程。演变随机激励可分为两类[72]：一类是由平稳随机过程通过一个时变线性滤波器后得到的；另一类是由平稳随机过程通过自变量的非线性变换得到的。

对于第一类演变随机激励，设有一均值为零的平稳随机过程 $f(t)$，将其作为输入，通过时变线性滤波器 α，输出 $F(t)$可表示为

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t,\tau) f(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.18}$$

式中，$\alpha(t,\tau)$表示在 $t-\tau$ 时刻单位脉冲作用下滤波器 α 在 t 时刻的输出，它具有系统脉冲响应函数的特点。由于输入为零均值，所以输出也为零均值。此时输