



高等数学教学与思维能力培养研究

Gaodeng Shuxue Jiaoxue yu Siwei Nengli Peiyang Yanjiu

朱光艳 著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教学与思维能力培养研究 / 朱光艳著. —
西安: 西安交通大学出版社, 2017.6 (2017.9重印)
ISBN 978-7-5605-9812-3

I. ①高… II. ①朱… III. ①高等数学—教学研究—
高等学校 IV. ①013-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 154844 号

书 名 高等数学教学与思维能力培养研究
著 者 朱光艳
责任编辑 侯君英 张 明

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029) 82668357 82667874 (发行中心)
(029) 82668315 (总编办)

传 真 (029) 82668280
装帧设计 河北腾博广告有限公司
印 刷 虎彩印艺股份有限公司

开 本 700mm×1000mm 1/16 印张 13.75 字数 270 千字
版次印次 2017 年 6 月第 1 版 2017 年 9 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-9812-3
定 价 68.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题, 请与本社发行中心联系、调换。

订购热线: (029) 82668851 (029) 82668852

投稿热线: (029) 82665370

读者信箱: qsfs2010@sina.com

版权所有 侵权必究

前 言

17 世纪, 人们对天体力学等学科的研究过程, 催生了微积分学的创立。自英国的牛顿和德国的莱布尼茨创立独立于古典几何和代数之外的微积分学这一新的数学分支伊始, 它就是与力学、物理学以及几何紧密相连的。正因为如此, 微积分随即被广泛地运用于各个科学领域中。直至 19 世纪初, 法国数学家柯西, 在牛顿·莱布尼茨奠定的微积分学的重要思想方法的基础上, 对其中的一些重要概念给予了精确的数学描述, 构建了比较完备的理论体系, 从此微积分学成为推动包括数学学科自身和自然科学、工程技术以及社会科学在内的一切领域发展的强大动力。微积分学的发展历史启示我们, 学习微积分, 在牢固掌握基本概念、基本理论和基本运算方法的同时, 既要注重联系实际, 了解建立数学概念和方法的实际背景, 又要注意掌握其分析和推理的思想方法, 培养严谨的数学思维的能力, 以便为学习后续的数学课程和相关知识打下坚实的数学基础, 并且提高利用数学工具分析和解决实际问题的能力。

建立数学概念, 应由产生概念的现实背景引入, 并且应使一些重要概念的形成或定义的过程成为分析、认识、推理的过程, 这样才能使读者理解这一概念的深层含义。比如, “微分形式”和微元法是数学分析及其应用的核心内容, 所以本书在建立微分及全微分的概念和介绍微元法时, 是着重遵循这一思路进行讲述的。本书本着同样的原则, 引出泰勒公式和建立梯度、散度、旋度的概念, 而不是以这个数量或向量的计算公式来定义这个量, 以便使读者通过这个概念的产生背景和建立过程, 理解这一概念的深刻含义, 从而不仅会计算, 也会用来分析解决实际问题。

本书共 7 章约 27 万字, 由湖北民族学院朱光艳撰写。作者在汲取和借鉴国内外传统教材的优点的基础上, 结合作者长期教学实践的点滴经验, 撰写了本书。不足之处, 谨望广大读者给予指正, 以便再版时加以修正和补充。

目 录

第一章 数学与数学教育	1
第一节 发展简史及未来趋势	2
第二节 数学对人类文明的贡献	11
第三节 数学教育的本质与发展趋势	14
第四节 数学教育的提升——教育教学	27
第二章 高等数学教育思想与哲学	32
第一节 数学教育的地位和作用	32
第二节 数学教育观念的哲学思考	40
第三节 华罗庚科学教育思想	48
第三章 高等数学教学与数学能力培养	55
第一节 教学概念及其教学	55
第二节 命题与推理的教学	63
第三节 数学中的矛盾概念与反例	69
第四节 教学思维与教学思想方法	72
第五节 数学能力的培养与发展	79
第四章 极限思想与方法	90
第一节 极限的概念与极限思想	91
第二节 极限理论的主要问题	100
第三节 极限的统一形式	113

第五章 微分学思想与方法	116
第一节 微分学的产生与基本思想	116
第二节 导数与微分的概念	129
第三节 微分中值定理	137
第四节 多元复合函数的微分法	144
第六章 积分学思想与方法	147
第一节 积分学的产生与黎曼积分	147
第二节 定积分的概念与基本理论	154
第三节 定积分的元素法思想及其应用	160
第四节 积分的统一形式及基本积分方法	164
第七章 在高等数学中培养创造性能力	173
第一节 创造性思维的形式	173
第二节 创造性思维品质与创造性人才的自我设计	180
第三节 创造性思维能力的培养	185
第四节 解决数学问题与培养创造能力	198
参考文献	214

第一章 数学与数学教育

在公元 6 世纪，我国古算家已完成了《算经十书》的伟大著作，并成为长达近两千年流传于世的算学教材，在我国古代的数学教育中起着巨大的作用，直到清末算学教育也仍以此为鉴。

我国早期的数学教育基本来自田园、作坊、家庭，靠父教子、师带徒式的个别传授。后来逐渐发展为私塾、家馆及学社式教学，这可称之为数学教育的萌芽时期。随着社会的发展和人类文明的进步，我国的学校教育逐步走上正轨，并发展壮大。特别是近年来，教育事业更是得到快速发展，呈现出蒸蒸日上的喜人景象。伴随着整个教育事业的发展和世界数学教育改革运动的推进，我国的数学教育也进行了多次改革。摒弃传统数学教育的不足，引进现代教育理念，采用多媒体等现代教育技术，极大地提高了数学教育的质量。

数学教育界的有识之士，在数学教育的理论与实践方面开展了全方位、多层次的研究和探索，取得了一系列丰硕的成果。数学教育的理论与实践探索，使数学教育初步形成系统化，日益走向科学化。教育数学的兴起，倡导教师们“与时俱进”地进行数学教育改革。把数学的学术形态化为教育形态，是所有数学教师的责任。教育形态和原始形态虽然有相

同的地方——火热的思考，但不同的是思考要有高效率，使学生们容易接受。师范院校和其他大学一样，要做科学研究，更应该做好教学研究，注重教学改革。

第一节 发展简史及未来趋势

19 世纪法国杰出的数学家庞加莱 (J.H.Poincare, 1854—1912) 说过这样一段发人深省的话：“如果我们要想预见数学的未来，适当的途径就是研究这门科学的历史和现状。”他敏锐地指出了数学史在数学发展中的重要作用。对于数学的概念和理论，如果知道它的来龙去脉，了解它的现实模型和实际应用，就会对它有更深刻的认识。总之，研究数学发展史，可以总结历史上数学兴衰的经验教训，掌握数学发展的规律，继而预测数学未来的进程。

数学的发展史大致可以划分为四个时期。

第一个时期即数学形成时期，这是人类建立最基本的数学概念的时期。早在公元前十几世纪，铁器的出现大大促进了生产力的发展。社会财富快速增长，商业贸易随之迅速发展。由于生活、生产和社会经济的需要，人们不断地需要计算产品的数量、劳动时间的长短和分配物品的多少；需要丈量土地的面积，测定建筑物的形状和大小；需要进行天文、气象的观测等。人们在围绕着数与形这两个概念的研究中，使数学逐渐地发展起来。人类从数数开始逐渐建立了自然数的概念，简单的算法，并认识了最简单的几何形式，逐步地形成了理论与证明之间的逻辑关系的“纯粹”数学。当时算术与几何还没有分开，彼此紧密地交错着。

第二个时期称为初等数学，即常量数学的时期。这个时期从公元前 5 世纪或更早一些开始，直到 17 世纪，大约持续了两千余年。在这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支：算术、几何、代数、三角。

按照历史进程和地域的不同,可以把初等数学史分为三个不同的阶段:希腊时期阶段、东方时期阶段和欧洲文艺复兴时期阶段。

希腊时期正好与希腊文化普遍繁荣的时代一致。到公元前3世纪,在最伟大的古代几何学家欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯的时代达到了顶峰,而终止于公元6世纪。当时最光辉的著作是欧几里得的《几何原本》。尽管这部书是两千多年前写成的,但是它的一般内容和叙述的特征,却与我们现在通用的几何教科书非常相近。

希腊人不仅发展了初等几何,并把它导向完整的体系,得到了许多非常重要的结果。例如,他们研究了圆锥曲线:椭圆、双曲线、抛物线;证明了某些属于射影几何的定理;以天文学的需要为指南建立了球面几何以及三角学的原理,并计算出最初的正弦表;确定了许多复杂图形的面积和体积。

在算术与代数方面,希腊人也做了不少工作。他们奠定了数论的基础,并研究丢番图方程,发现了无理数,找到了求平方根、立方根的方法,知道算术级数与几何级数的性质;在几何方面希腊人已接近“高等数学”。阿基米德在计算面积与体积时已接近积分运算,阿波罗尼奥斯关于圆锥曲线的研究接近于解析几何。

“希腊七贤”之首泰勒斯最早提出“论证数学”的思想,被后人传说为世界第一位数学家和几何证明的创始人。其传人毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前580—公元前500,希腊)创立的学派盛极一时,该学派在数学上信奉“万物皆数”,最早发现勾股定理等。但是毕达哥拉斯的弟子希帕苏斯在考虑边长为1的正方形的对角线的长度时,发现这个长度不能用已知的数来表示,便动摇了“万物皆数”的信条,他因此遭到该学派的谴责,并被抛进大海而葬身鱼腹。虽然如此,希帕苏斯的发现还是引发了第一次数学危机,也促成了后来无理数的发现。

应该指出,当时我国的算术和代数也已经达到了很高的水平。在公

公元前 2 世纪到 1 世纪已有了三元一次联立方程组的解法。同时在历史上第一次利用负数,并且叙述了对负数进行运算的规则,也找到了求平方根与立方根的方法。

随着希腊科学的终结,在欧洲出现了科学萧条时期,数学发展的中心移到了印度、中亚细亚和阿拉伯国家。在这些地方从 5 世纪到 15 世纪的一千余年间,数学由于计算的需要,特别是由于天文学的需要而得到发展。印度人发明了现代计数法,引进了负数,并把正数与负数的对立和财产与债务的对立及直线上两个方向的对立联系了起来。他们开始像运用有理数一样运用无理数,并给出了表示各种代数运算包括求根运算的符号,由于他们没有对无理数与有理数的区别感到困惑,从而为代数打开了真正的发展道路。

“代数”这个词本身起源于 9 世纪的数学家和天文学家穆罕默德·花拉子米。花拉子米的著作基本上建立了解方程的方法。从那时起,求方程的解作为代数的基本特征被长期保持了下来,他的代数著作在数学史上起了重大作用,后来被翻译成拉丁语,曾长期作为欧洲主要的教科书。

中亚细亚的数学家们找到了求根和一系列方程的近似解的方法,找到了“牛顿二项式定理”的普遍公式,他们有力地推进了三角学,把它建成一个系统,并造出非常准确的正弦表。这时中国科学的成就开始传入邻国。约在公元 6 世纪我国已经会解简单的不定式方程,知道几何中的近似计算以及三次方程的近似解法。

到 16 世纪,所缺少的主要是对数及虚数,还缺乏字母符号系统。正像在远古时代,为了运用整数,应该制订表示它们的符号一样,现在为了运用任意数并对它们给出一般运算规则,就应该制订类似的符号。这个任务从希腊时代就开始而直到 17 世纪才完成,在笛卡儿和其他人的工作中最终形成了现代的符号系统。

在科学复兴时期,欧洲人向阿拉伯人学习,并且根据阿拉伯文的翻译

熟识了希腊科学。从阿拉伯沿袭过来的印度计数法逐渐在欧洲确定了下来。

只是到了16世纪，欧洲科学终于超越了先人的成就。例如，意大利人塔尔塔利亚和费拉里在一般形式上解决了三次方程与四次方程解的问题；在这个时期开始运用虚数；现代的代数符号也出现了，其中出现了表示未知数和表示已知数的字母符号，这是韦达在1501年提出的。

最后，英国的纳皮尔发明了供天文学做参考的对数，并在1614年发表。布利格算出第一批十进对数表是在1624年。

当时在欧洲也出现了“组合论”和“牛顿二项式定理”的普遍公式；级数出现得更早，所以初等代数的建立是完成了，以后则是向高等数学即变量数学的过渡。但是初等数学仍在发展，仍有很多新的成果出现。

第三个时期是变量数学的时代。到16世纪，封建制度消亡，资本主义开始发展并兴盛起来。在这一时期中，家庭手工业、手工业作坊逐渐被工场手工业所取代，并进而转化为以使用机器为主的大工业。因此，对数学提出了新的要求。这时，对运动的探究变成了自然科学的中心问题。实践的需要和各部门科学本身的发展使自然科学转向对运动的研究，对各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究。

17世纪开始了人类的科学时代。由于人们掌握了科学方法，自然科学在各方面都呈现出一派突飞猛进的大好形势。其中由牛顿一手奠定基础的物理科学两大支柱：力学和数学，尤其起了带头和主力军的作用。这时，“运动”成为自然科学研究的中心课题，进而迫使数学建立相应的概念和理论。17世纪上半叶，变量的概念随之而生。伟大的数学家笛卡儿(R.Descartes, 1596—1650, 法国)以力学的要求为背景，把几何内容与代数形式结合起来，引进了笛卡儿“变数”，他把过去对立着的两个研究对象“数”和“形”统一起来，于1637年建立了解析几何学，完成了数学史上一项划时代的变革；从此，开始了变量数学的新纪元。恩格斯对笛卡儿的变量思想给予了极高的评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变数。

有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发明的。”

变化着的量的一般性质和它们之间依赖关系的反映，在数学中产生了变量和函数的概念。数学对象的这种根本扩展决定了数学向新的阶段，即向变量数学时期的过渡。

数学中专门研究函数的领域叫作数学分析，或者叫无穷小分析。这后一名词的来源是无穷小量的概念。它是研究函数的重要工具。所以，从17世纪开始的数学的新时期——变量数学时期可以定义为数学分析出现与发展的时期。

变量数学建立的第二个决定性标志出现在1637年笛卡儿的著作《几何学》。这本书奠了解析几何的基础，给出了字母符号的代数和解析几何原理，即引进坐标系和利用坐标方法把具有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线。解析几何给出了回答如下问题的可能：

- (1) 通过计算来解决作图问题；
- (2) 求由某种几何性质给定的曲线的方程；
- (3) 利用代数方法证明新的几何定理；
- (4) 反过来，从几何方面来看代数方程。

解析几何是这样一个数学门类，即在采用坐标法的同时，用代数方法研究几何对象。在笛卡儿之前，数学中起优势作用的是几何学。笛卡儿把数学引向这一途径，就使代数获得更重大的意义。

变量数学发展的第二个决定性标志是牛顿和莱布尼兹在17世纪后半叶建立的微积分。事实上牛顿和莱布尼兹只是把许多数学家都参加过的巨大准备工作完成了，它的萌芽却要溯源于古代希腊人所创造的求面积和体积的方法。

微积分的起源主要来自三个方面的问题：一是力学的一些新问题，如

已知路程对时间的关系求速度及已知速度对时间的关系求路程；二是几何学中一些相当古老的问题，如作曲线的切线和确定面积与体积等问题；还有一个是函数的极值问题。

除了变量与函数概念以外，后来形成的极限概念也是微积分以及相关学科进一步发展的基础。同微积分一起，还产生了数学分析的另外部分：级数理论、微分方程论、微分几何。所有这些理论都是因为力学、物理学和技术问题的需要而产生并向前发展的。

当时尽管微积分学得到了广泛的应用，但是逻辑上却存在着一些不严密之处，尤其是在无穷小概念上的混乱，曾引起过不少科学家的批评。1734年，英国哲学家、牧师伯·克莱（George Berkeley，1685—1753）发表了在科学史上引起轩然大波的小册子《分析学家，或致一位不信神的数学家》，矛头直指牛顿的流数方法和莱布尼兹的微积分，立即引发了历史上耸人听闻的第二次数学危机。从而激发18、19世纪的众多数学家为微积分的完善做了大量出色的工作，促使微积分日臻完善，化解了第二次数学危机，也发展了一些后续学科。诸如微分方程、微分几何、复变函数等。

数学分析蓬勃地发展，不仅成为数学的中心和主要部分，而且还渗入到数学中较古老的一些领域，如代数、几何与数论。通过分析及其变量、函数和极限等概念，运动、变化等思想，使辩证法渗入进全部数学。同样地，基本上通过分析，数学才在自然科学和技术的发展中。成为精确表述它们的规律和解决它们问题的得力工具。

在希腊人那里，数学基本上就是几何；在牛顿以后，数学基本上就是分析了。因而可以说，微积分的创立在科学史上具有决定性的意义。

当然，分析不能包括数学的全部。在几何、代数和数论中都保留着它们特有的问题和方法。比如，在17世纪，与解析几何同时还产生了射影几何，而纯粹几何方法在射影几何中占统治地位。

同时期还产生了另一个重要的数学门类——概率论。它研究大量“随

机”现象的规律问题，给出了研究出现于偶然性中的必然性的数学方法。

在希腊几何的历史上，欧几里得所做的严格和系统的叙述结束了以前发展的漫长道路。和这种情况相似，随着分析的发展必然引起更好地论证理论、使理论系统化、批判地审查理论的基础等这样一些任务，这些任务是 19 世纪中叶赋予的，这些重要而困难的工作由于许多杰出学者的努力而胜利完成，特别是获得了实数、变量、函数、极限、连续等基础性概念的严格定义。

变量数学的长足发展，促使许多新兴的数学学科蓬勃向前，其内容和方法不断地充实、深入和扩大。到 19 世纪初，业已枝繁叶茂，硕果累累，似乎数学的宝藏已挖掘殆尽，无多大发展的余地了。数学这块鏖战的阵地上出现了胜利后的暂时宁静。这种宁静——孕育着新的激战前的宁静，预示着巨大革命潮流的到来。随着自然科学及工程技术的迅猛发展，19 世纪 20 年代，数学革命的狂飙终于再次来临了。

理论原则的建立是其发展的总结，但不是它的终结，相反的，正是新理论的起点。分析的情形也是这样，由于它的基础的准确化产生了新的数学理论，这就是 19 世纪 70 年代德国数学家康托尔所建立的集合论。在此基础上又产生了分析的一个新分支——实变函数论。同时集合论的一般思想渗入到数学的所有分支。这种“集合论观点”与数学发展的新阶段不可分割地联系在一起。

正当人们欢呼喝彩时，“罗素悖论”好似一颗重磅炸弹，震撼了数学界，号称天衣无缝、绝对正确的精确数学居然也出现了自相矛盾。这一悖论使数学家们惶恐不安，许多人努力设法去消除这个怪物，于是引起了一场涉及数学基础的大论战。它刺激着大批数学家去奋力探索如何进一步建立严格的数学基础。比如希尔伯特形式化公理方法及罗素对数理逻辑的探讨，都对数学发展有着十分重要的影响。由于这些崭新的数学领域的出现，使得数学又迈进了一个新的历史时期——现代数学时期。

第四个时期为现代数学时期。这一时期的特征是数学的研究对象急剧拓广，一切可能的和更为一般的量及其关系，都成为数学的研究对象。现代数学的另一个特征是新的概括性概念的建立，富有新的更高的抽象程度。

还在 19 世纪上半叶，罗巴切夫斯基和波尔约就已经建立了新的非欧几何学，它的思想是别开生面的和出乎意外的。正是从这个时候起，开始了几何学的原则上的新发展，改变了几何学是什么的本来理解。它的研究对象与使用范围迅速扩大。1854 年著名的德国数学家黎曼继罗巴切夫斯基之后在这个方向上完成了最重要的工作。他提出了几何学家能够研究的“空间”的种类有无限多的一般思想，并指出这种空间的可能的现实意义。如果说，以前几何学只研究物质世界的空间形式，那么现在；现实世界的某些其他形式，由于它们与空间形式类似，也成了几何学的研究对象，可采用几何学的各种方法对它们进行研究。因此，“空间”这一术语在数学中获得了新的更广泛的，也是更专门的意义，同时几何学方法本身也大大地丰富和多样化了。欧几里得几何本身也发生了很大的变化。现在可研究更为复杂的图形，乃至任意点集的性质。同时也出现了研究图形本身的崭新的方法，在这些研究的基础上，产生了各种新而又新的“空间”和它们的“几何”：罗巴切夫斯基空间、射影空间、各种不同维数的欧氏空间、黎曼空间、拓扑空间等，所有这些概念都找到了自己的应用。

在 19 世纪，代数也出现了质的变化。以往的代数是关于数字的算术运算的学说。这种算术运算是脱离了给定的具体数字在一般形态上形式地加以考察的。也就是说，在代数中，凡量都以字母来表示，按照一定的法则对这些字母进行运算：现代代数在保持这种基础的同时，又把它大大地推广了。它还考察比数具有更普遍得多的性质的“量”，并且研究对这些量的运算，这些运算在某种程度上按其形式的性质来说与加、减、乘、除等普通算术运算是类似的。向量是最简单的例子，我们知道，向量按照平行四边形法则相加。在现代代数中进行的推广达到这样的程度，以致

“量”这个术语本身也常常失去意义，而一般的是讨论“对象”了，对这种“对象”可以进行与普通代数运算相似的运算。例如，两个相继进行的运动相当于某一个总的运动，一个公式的两种代数变换相当于一个总的变换等。与此相应就可讨论运动与变换所特有的“加法”。现代代数在一般抽象形式上研究所有这种类似的运算。

现代代数理论是 19 世纪前半叶从许多数学家的研究中形成的，其中尤以法国数学家伽罗瓦的工作著名。现代代数的概念、方法和结果在分析、几何、物理以及结晶学中都有重大应用。群论与线性代数是现代代数中内容丰富的两个分支，并在自己的发展中得到很广的应用。

与此同时分析也发生了深刻的变化。首先，它的基础得到了精确化，特别是形成了它的基本概念：函数、极限、微分、积分，最后是变量概念本身的精确和普遍定义，实数的严格定义也给出了。这些工作是由一批杰出的数学家完成的，其中有捷克数学家波尔查诺、法国数学家柯西、德国数学家魏尔斯特拉斯和戴德金等。在分析中发展出一系列新的分支，如实变函数论、函数逼近论、微分方程定性理论、积分方程论、泛函分析。在分析和数学物理发展的基础上同几何与代数新思想相结合产生的泛函分析在现代数学中起着特殊重要的作用。

此外，我们还必须提到德国数学家康托尔的集合论。它促进了数学的其他许多新分支的发展，对数学发展的一般进程产生了深刻的影响。集合论还导致了数学领域的另一分支——数理逻辑的发展。一方面，数理逻辑溯源于数学的起源和基础，另一方面它又和计算技术的最新课题紧密相连。数理逻辑得到了许多深刻的结果。这些结果从一般认识论的观点来看也十分重要。

但是，一则好似笑话的罗素悖论，弄得天才数学家康托尔的集合论不能自圆其说，惹起第三次数学危机，直到朴素集合论蜕变为公理集合论时，才平息了轰动一时的第三次数学危机。

从以上数学发展的轨迹中可以预测, 数学的现代发展趋势不仅表现在现代数学的新领域和高层次中。而且还表现在数学向一切学科与社会部门的渗透和应用中, 其主要表现有以下几个方面。

- (1) 从单变量到多变量, 从低维到高维。
- (2) 从线性到非线性。
- (3) 从局部到整体, 从简单到复杂。
- (4) 从连续到间断, 从稳定到分岔。
- (5) 从精确到模糊。
- (6) 数学与计算机的结合。

第二节 数学对人类文明的贡献

数学产生于人类的实际需要, 而成为一门最早发展起来的科学。数学历来是人类文化的一个重要组成部分。科学家培根提出: “知识就是力量。” 并且指出: “数学是打开科学大门的钥匙, ……轻视数学必将造成对一切知识的损害。因为轻视数学的人不可能掌握其他科学和理解万物。” 回顾科学发展和人类进步的历史, 事实确是如此。以下列举历史上几个对人类文明具有重大影响的例子作为佐证。

(1) 万有引力定律。基于哥白尼的日心说和开普勒行星运动的三大定律, 牛顿发现了万有引力定律, 这是人类对宇宙认识的一次伟大革命。牛顿把他最重要的著作命名为《自然哲学之数学原理》, 是因为他发现新宇宙的思维方式是数学的思维方式。

(2) 相对论。爱因斯坦的相对论是宇宙观的另一次伟大革命, 其核心内容是时空观的改变。牛顿力学的时空观认为时间与空间不相干, 伽利略变换式是这种数学模型的基本表现形式。爱因斯坦的时空观却认为时间和空间是相互联系的, 四维空间的洛伦兹变换是这种数学模型的表现形