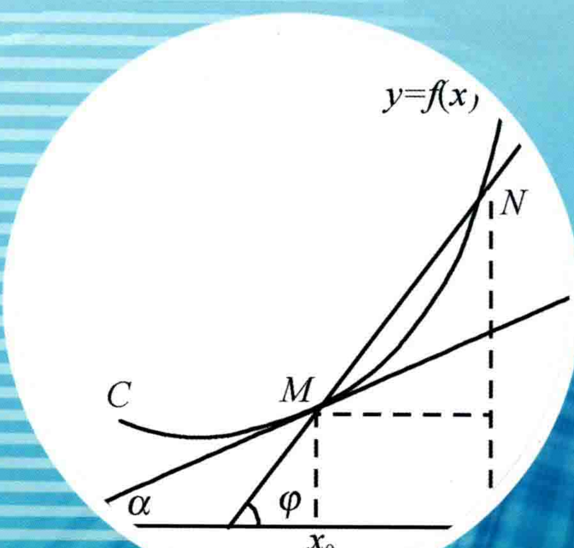
中国科学院教材建设专家委员会规划教材

全国高等医药院校规划教材

医学高等数学

第3版

◎ 主编　张世强



科学出版社

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等医药院校规划教材

医学高等数学

第 3 版

主　编　张世强
副主编　刘国兴
编　委　（按章节顺序）
王开发　第三军医大学
罗亚玲　重庆医科大学
刘国兴　山东万杰医学院
王培承　潍坊医学院
唐秋云　山东万杰医学院
梁　波　重庆医科大学
兰景涛　山东万杰医学院
张世强　重庆医科大学

科学出版社
北京

内　容　简　介

本书按照函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程基础、多元函数微积分、无穷级数、概率论基础、线性代数基础的脉络编写。为方便学生学习和教师教学，各章的内容经过细心的斟酌与润色，通俗易懂；例题经过精心的挑选与编排，清晰易懂；在每章后附有习题详细解答，这是本书独有的特点。

本书适合作为医学院校各专业本科及专科学生教材，也可供从事医学、药学及卫生工作的人员作学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学 / 张世强主编 . —3 版 . —北京:科学出版社,2014. 8
中国科学院教材建设专家委员会规划教材·全国高等医药院校规划教材
ISBN 978-7-03-041642-1

Ⅰ. 医… Ⅱ. 张… Ⅲ. 医用数学-医学院校-教材Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 190278 号

责任编辑:李　植 / 责任校对:蒋　萍
责任印制:赵　博 / 封面设计:陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司　印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2001 年 8 月第　一　版　　开本:787×1092　1/16
2016 年 8 月第　三　版　　印张:17
2016 年 8 月第十五次印刷　　字数:405 000

定价: 49. 80 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第 3 版前言

我国从 1999 年开始扩大招生规模至今，高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡。面对学生规模扩张带来的大班教学、一校两区（多区）等新情况，从实施医学教育认证的角度看，需要进一步拓宽医科学生的知识面和培养医科学生的创新思维能力，提高医科学生的数学素养。为此，新版教材在结构上大胆创新，进行了精选、优化组合及浓缩。结合国情及医学教育认证的要求，编书的指导思想是：起点低、跨度大。前者是指着重内容的实用性，适当兼顾理论体系。重点放在基本概念和主要方法上，不过分强调数学推导和证明，在选择题材和叙述重点上都把实用性放在首位，篇幅不长，但保持了数学理论自身的系统性。跨度大是指尽量覆盖医药学领域中常常涉及的数学知识，按照函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程基础、多元函数微积分、无穷级数、概率论基础、线性代数基础的脉络，着眼于理解概念，掌握方法、学会运用，让读者能在较少的时间内获得尽可能多的信息量，能举一反三。在处理方法上，重视“形象化”的描述与严格的数学定义相结合，做到相互映照，便于初学者领悟。各章都有与现代医学有关的实例，反映数学在医学应用中的新进展。

新版教材具有起点低、跨度大的体系与风格，具有概念易懂、脉络清晰、简明实用、方便学生学习和教师教学（每章后附习题详解）等特点，使得新版教材更适应医科院校教学的需要。

在教材修订过程中，我们参考了大量同类书刊，使用过本教材的医学院校的教师为本书的再版提出了不少中肯的意见和有益的建议，并且我们也得到了科学出版社及主编单位（重庆医科大学）的热情支持，谨致谢忱。编者愿新版教材会让读者开卷有益，亦真诚且虚心地期待着读者的悉心指教。

编　者

2014 年 2 月

第 2 版前言

本教材第 2 版是在第 1 版的基础上，按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“医科类本科数学基础课程教学基本要求”（讨论稿），并根据九年来的教学改革实践，全面修订而成。在修订过程中，保留了原教材起点低、跨度大的体系与风格，继承并发扬了原教材概念准确、脉络清晰、简明实用和方便教学等特点，同时亦吸收了一些优秀教材的改革成果，使得新版教材更适应医科院校教学改革的需要。

新版教材增补了部分内容，如微分中值定理的证明，拉格朗日中值定理的推论，积分上限函数，二阶线性微分方程解的结构，n 维向量等。新版教材也按照“医科类本科数学基础课程教学基本要求”（讨论稿）精简了部分内容，同时对初版教材中存在的个别问题进行了修订。

在本次的教材修订过程中，参考了一些优秀教材，使用过教材的医科院校的教师提出了不少中肯的意见和有益的建议，在此表示诚挚的谢意。但愿新版教材仍然会让读者开卷有益。编者亦真诚且虚心地期待着读者的悉心指教。

编　者

2009 年 2 月

目　录

第1章　函数与极限

医学高等数学的主要内容是微积分学,函数是微积分学的主要研究对象,极限是微积分学的理论基础和研究方法．函数与极限的初步知识在中学的数学课本里已经学过,本章将进行必要的复习与增补．

1.1　函　　数

1.1.1　区间与邻域

如下区间均是**有限区间**(bounded interval):

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b,x\in\mathbf{R}\};\quad [a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$$

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\};\quad (a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$$

其中 a 和 b 为实常数,且 $a<b$.

如下区间均是**无穷区间**(infinite interval):

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a,x\in\mathbf{R}\};\quad (-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a,x\in\mathbf{R}\};\quad (-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$$

其中$+\infty$(读作正无穷大)与$-\infty$(读作负无穷大)是引进的记号,不是数．

设 δ 是一非常小的正实数,以点 a 为中心、δ 为半径的开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点 a 的 **δ 邻域**(neighborhood)(图 1.1).

习惯上,把开区间$(a-\delta,a)$称为点 a 的**左 δ 邻域**;开区间$(a,a+\delta)$称为点 a 的**右 δ 邻域**．

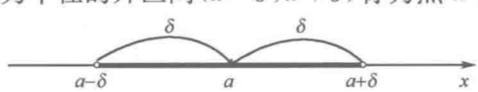


图 1.1

1.1.2　函数的概念

定义 1.1　设 x,y 是同一变化过程中的两个变量,若对于变量 x 在其变化范围内的每一个值,变量 y 依照一定的规则都有确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**(function). 记为

$$y=f(x)$$

其中,变量 x 称为**自变量**(independent variable),变量 y 称为**因变量**(dependent variable). 变量 x 的变化范围称为函数的**定义域**(domain of definition). 变量 y 相应的取值范围称为函数的**值域**(domain of functional value).

一般地,函数的定义域由数学上函数有无意义来确定;当函数关系由实际问题给出时,定义域应由实际问题本身来确定．医学生尤其应该注意到这一点．

例 1.1　先求下列各对函数的定义域、值域,然后判断 $f(x)$与 $g(x)$是否相同．

(1) $f(x)=\dfrac{8x}{x}$,$g(x)=8$;　　　　(2) $f(x)=\ln x^8$,$g(x)=8\ln x$;

(3) $f(x)=8x, g(x)=8\sqrt{x^2}$；　　　(4) $f(x)=8|x|, g(x)=8\sqrt{x^2}$.

解　(1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为$\{8\}$;$g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{8\}$. 故$f(x)$与$g(x)$不相同.

(2) $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$;$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 故$f(x)$与$g(x)$不相同.

(3) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$;$g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$. 故$f(x)$与$g(x)$不相同.

(4) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$;$g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$. 对于定义域内任意的自变量x,均有$f(x)=g(x)$. 故$f(x)$与$g(x)$相同.

例 1.2　静脉注射G钠盐100 000单位后,血清中的药物浓度C为时间t的函数$C(t)$:

$$C(t)=\begin{cases}14.5t, & 0\leqslant t<0.25\\ 4.66-4.26t, & 0.25\leqslant t<1\\ 0.6-0.2t, & 1\leqslant t\leqslant 3\end{cases}$$

其中,时间t的单位为小时(h),$C(t)$的单位为单位每毫升(单位/ml). 试求$C(t)$的定义域并计算$t=0.5$h及$t=2$h时的血药浓度.

解　$C(t)$的定义域为$[0,3]$;

$C(0.5)=4.66-4.26\times0.5=2.53$(单位/ml);

$C(2)=0.6-0.2\times2=0.2$(单位/ml).

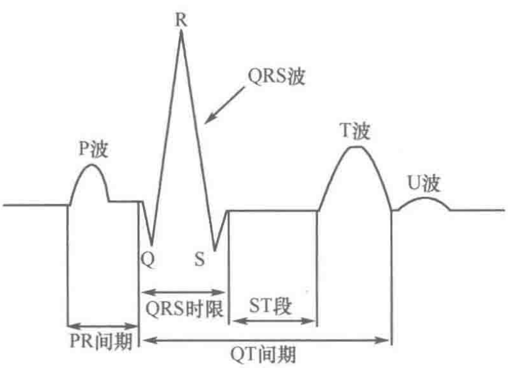


图 1.2

例 1.3　图1.2是一段心电图,它描述了电流活动随时间的变化情况. 这是用图形表示函数的一个医学实例.

例 1.4　表1.1是静脉注射某药物后,一实验动物体内血药浓度$C(t)$随时间t的变化情况的监测数据. 这是用表格表示函数的一个医学实例.

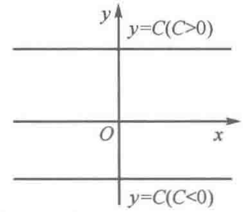
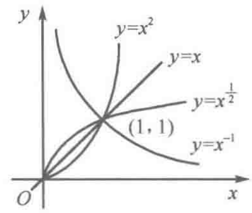
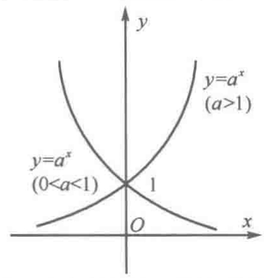
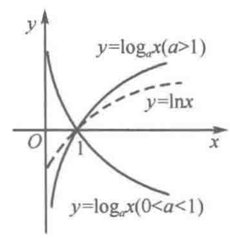
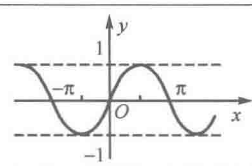
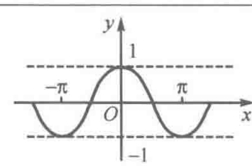
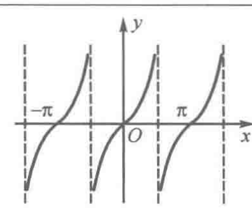
表 1.1

t(h)	0	0.25	0.5	1	2	4	6
$C(t)$(μg/ml)	12.23	2.53	2.68	2.38	1.99	1.20	0.78

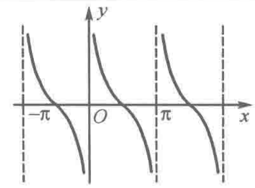
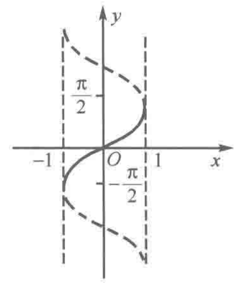
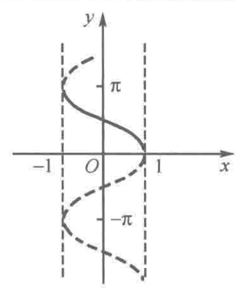
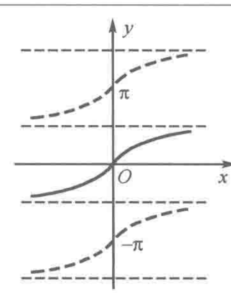
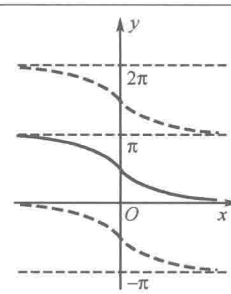
1.1.3　基本初等函数

中学里学习过的六类函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)称为**基本初等函数**(basic elementary function). 列于表1.2以便查阅.

表 1.2　基本初等函数

函数名称	表达式	定义域和值域	特性	图形
常量函数	$y=C$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$\{C\}$	偶函数； 不存在最小正周期的周期函数	
幂函数	$y=x^{\alpha}$ （α 为非零实数）	定义域和值域视 α 的取值而定.	奇偶性视 α 的取值而定. 图像过(1,1)点	
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$(0,+\infty)$	$a>1$ 时，图像单调递增； $0<a<1$ 时，图像单调递减. 图像过(0,1)点	
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	定义域：$(0,+\infty)$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	$a>1$ 时，图像单调递增； $0<a<1$ 时，图像单调递减. 图像过(1,0)点	
三角函数　正弦函数	$y=\sin x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[-1,1]$	奇函数； 有界函数； 周期函数（周期为 $2k\pi$）	
三角函数　余弦函数	$y=\cos x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 值域：$[-1,1]$	偶函数； 有界函数； 周期函数（周期为 $2k\pi$）	
三角函数　正切函数	$y=\tan x$	定义域：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	奇函数； 周期函数（周期为 $k\pi$）	

续表

函数名称		表达式	定义域和值域	特性	图形
三角函数	余切函数	$y=\cot x$	定义域： $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	奇函数； 周期函数（周期为 $k\pi$）	
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$ 或 $y=\mathrm{Arcsin}x$	定义域： $[-1,1]$ 主值域： $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	主值（实线）范围 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调递增	
	反余弦函数	$y=\arccos x$ 或 $y=\mathrm{Arccos}x$	定义域： $[-1,1]$ 主值域： $[0,\pi]$	主值（实践）范围 $[0,\pi]$ 内单调递减	
	反正切函数	$y=\arctan x$ 或 $y=\mathrm{Arctan}x$	定义域： $(-\infty,+\infty)$ 主值域： $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	主值（实践）范围 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增	
	反余切函数	$y=\mathrm{arccot}x$ 或 $y=\mathrm{Arccot}x$	定义域： $(-\infty,+\infty)$ 主值域： $(0,\pi)$	主值（实践）范围 $(0,\pi)$ 内单调递减	

1.1.4 复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 如果当 x 在定义域内变化时，由 $u=\varphi(x)$ 所确定的值 u 的部分或全部使得函数 $y=f(u)$ 有定义，这时称 y

为 x 的**复合函数**(compound function). 称 u 为**中间变量**(intermediate variable).

分清复合函数的结构是复合函数求导、换元积分的重要基础,也是学好《医学高等数学》的基本功之一.

例 1.5 分析下列函数的复合结构:

(1) $y=\ln\cos(x^8+\sqrt{x})$; (2) $y=\log_a \sin e^{x^2+1}$;

(3) $y=8\sqrt{[8+\tan(8+\cos 8\sqrt{x})]^3}$.

解 (1) $y=\ln u, u=\cos v, v=x^8+\sqrt{x}$;

(2) $y=\log_a u, u=\sin v, v=e^t, t=x^2+1$;

(3) $y=8\sqrt{u^3}=8u^{\frac{3}{2}}, u=8+\tan v, v=8+\cos t, t=8\sqrt{x}$.

1.1.5 初等函数

定义 1.3 由基本初等函数经过有限次四则运算以及函数复合所构成的仅用一个解析式表达的函数,称为**初等函数**(elementary function).

如 $\sin 2x, \arcsin 8x+\dfrac{\arctan x}{x}, \cos 8x\ln(1+\sqrt{1+x^2})$等都是初等函数.

《医学高等数学》教材所研究的函数,主要是初等函数. 对于不是初等函数的函数,统称为非初等函数,例如,**分段函数**(piecewise function)

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

不能用一个解析式表示,是非初等函数.

1.1.6 函数的几种特性

(1) 单调性:设 x_1, x_2 是函数 $f(x)$在定义区间 I 内的任意两个数,且 $x_1<x_2$. 若 $f(x_1)<f(x_2)$则称 $f(x)$在区间 I 内是**单调递增**的;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 内是**单调递减**的.

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增的,在区间$(-\infty,0]$上是单调递减的,但在区间$(-\infty,+\infty)$内却不是单调的.

(2) 奇偶性:若对于函数 $f(x)$定义域内的任意点 x,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$是**偶函数**;若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$是**奇函数**.

例如,函数 $y=x$ 是奇函数,函数 $y=x^2$ 是偶函数. 但函数 $y=x+x^2$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的,而奇函数的图形是关于原点对称的.

(3) 有界性:设函数 $f(x)$在区间 I 内有定义,如果存在一个正数 K,使得对所有 $x\in I$,恒有

$$|f(x)|<K$$

则称函数 $f(x)$在 I 内是有界的,否则称函数 $f(x)$在 I 内是无界的.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是无界的.

(4) 周期性:对于函数 $f(x)$,若存在一个正数 T,使得 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,并称 T 为 $f(x)$ 的周期.

例如,函数 $y=\sin x$ 是周期函数,其周期为 $2k\pi, k\in \mathbf{Z}^+$.

1.2 极　　限

微积分学研究的主要对象是函数,研究的重要工具之一是极限. 通过极限微观上可以探讨函数的精细结构,宏观上可以了解函数通往无穷远的趋势,从而深化对客观世界的认识.

公元 263 年,刘徽借鉴极限的思想,用割圆术计算圆的面积,同时得出最早的 π 的近似值 3.14. 春秋战国时期的哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》中的一段话"一尺之棰,日取其半,万世不竭"是最早也是最经典的极限案例.

1.2.1 极限的概念

极限是描述在自变量的某个变化过程中,函数值的变化趋势的概念. 自变量的变化有两种情况:一是自变量趋向于一个有限数 x_0,二是自变量趋向于无穷大.

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义(在 x_0 点可以无定义),若当自变量 x 趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**(limit). 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

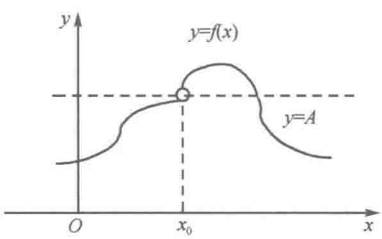


图 1.3

观察图 1.3,极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 表示 x 趋近于 x_0 时,曲线 $y=f(x)$ 上的点与直线 $y=A$ 上的对应点的距离 $|f(x)-A|$ 趋于零.

例 1.6 考察当 $x\to 1$ 时,函数 $f(x)=2(x+1)$ 的极限.

解 因为当 $x\to 1$ 时,$|2(x+1)-4|=2|x-1|\to 0$,所以

$$\lim_{x\to 1} 2(x+1)=4$$

例 1.7 考察当 $x\to 1$ 时,函数 $g(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$ 的极限.

解 函数图形如图 1.4 所示. 函数在 $x=1$ 处无定义,但 $x\to 1$ 时 x 永远不会等于 1,故在求极限时,可以约去不等于零的因子 $x-1$,得 $g(x)=2(x+1)$. 据例 1.6 可知

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} 2(x+1)=4$$

例 1.8 考察当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限.

解 函数图形如图 1.5 所示. 因为当 $x\to 0$ 时,对应的函数值在 −1 与 1 之间摆动,不趋向于任何固定的数,称 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限不存在.

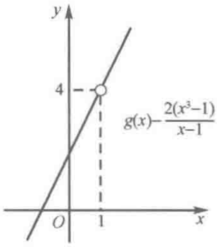


图 1.4

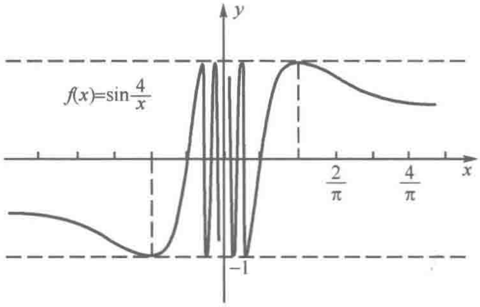


图 1.5

定义 1.5　若$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限**．记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

观察图 1.6，极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 表示 $x\to\infty$时，曲线 $y=f(x)$上的点与直线 $y=A$ 上的对应点的距离$|f(x)-A|$趋于零．

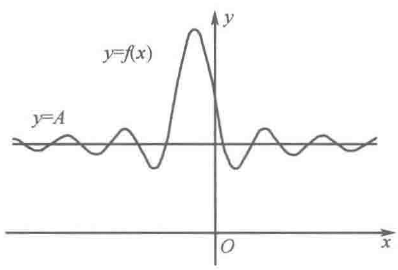


图 1.6

类似地，可以定义函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 以及函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$．

例 1.9　考察下列函数当自变量 $x\to\infty$时的极限：

(1) 正态分布密度函数 $f(x)=e^{-x^2}$．如图 1.7 所示，由函数的图形可知

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$$

(2) 反正切函数 $f(x)=\arctan x$．如图 1.8 所示，由函数的图形可知

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

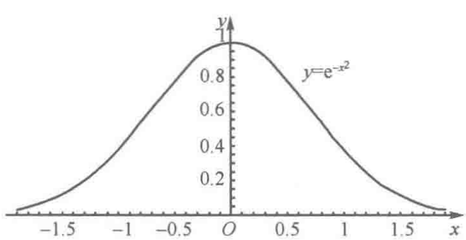


图 1.7

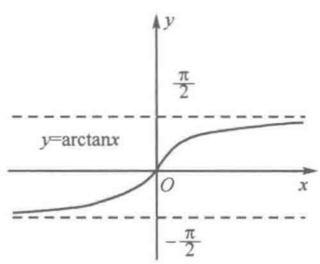


图 1.8

(3) 正弦函数 $f(x)=\sin x$．当 $x\to\infty$时，$\sin x$ 对应的函数值在-1与 1 之间摆动，不趋向于任何固定的数，称 $f(x)=\sin x$ 当 $x\to\infty$时的极限不存在．

定义 1.6　设函数 $f(x)$在$(x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$内有定义，若当自变量 x 从 x_0 右侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$当 $x\to x_0^+$ 时的右极限**．记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^+)$$

类似地,可定义函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限.

定理 1.1 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左极限和右极限同时存在并且相等,即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

由定理 1.1 可知,如果函数在点 $x=x_0$ 处的左右极限至少一个不存在,或者都存在但不相等,则函数在点 $x=x_0$ 处的极限不存在. 定理 1.1 常用于证明分段函数在分段点处的极限是否存在.

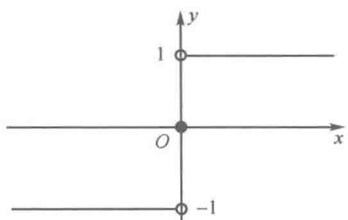


图 1.9

例 1.10 证明如下的符号函数(图 1.9)在点 $x=0$ 处的极限不存在.

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

证 在点 $x=0$ 处,左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$,右极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to 0+}1=1$. 左极限和右极限同时存在但不相等,由定理 1.1 可知,$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

1.2.2 极限的运算法则

根据极限的定义或直观判断只能确定比较简单的函数的极限,为了能够计算比较复杂的函数的极限,下面引进极限的运算法则.

定理 1.2(四则运算法则) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\ (\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0)$.

定理 1.3(复合运算法则) 若 $y=f(\varphi(x))$ 是由 $y=f(u)$ 及其在 x_0 点附近单调的 $u=\varphi(x)$ 复合而成的,$f(\varphi(x))$ 在 x_0 点附近有定义(在 x_0 点可以无定义),如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

例 1.11 求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-1}{x+9}$; (2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$; (4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

解 (1) 由于分母 $\lim\limits_{x\to 2}(x+9)=11\neq 0$,直接利用极限四则运算法则得

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x-1}{x+9}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+9)}=\frac{2^3+2\times 2-1}{2+9}=1$$

(2) $x\to -1$ 时，如果用极限四则运算法则，出现$\frac{\infty}{\infty}$的结果，故不能直接利用极限四则运算法则，分解因式后约分得

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-2)=-1-2=-3$$

(3) $x\to -1$ 时，如果用极限四则运算法则，出现$\infty-\infty$的结果，故不能直接利用极限四则运算法则，通分后约分得

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}x-2}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)}=\frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1}=-1$$

(4) $x\to +\infty$时，如果用极限四则运算法则，出现$\infty-\infty$的结果，故不能直接利用极限四则运算法则，有理化后得

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$$

1.2.3　两个重要极限

有些比较特殊的函数的极限，根据极限的定义和四则运算法则，无法计算出极限，必须借助于两个重要极限公式．下面不加证明地给出这两个重要极限公式．读者可借助图 1.10 和图 1.11 来体会．

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (x 为**弧度数**).

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

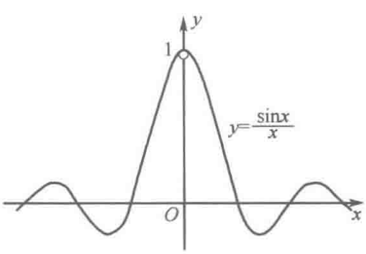


图 1.10

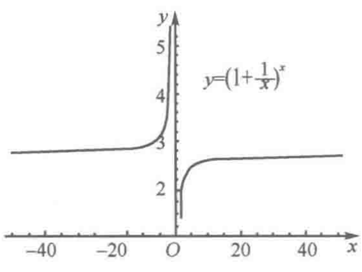


图 1.11

例 1.12　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}(\beta\neq 0)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^x(k\neq 0)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$.

(2) 令 $\pi-x=t$，则 $\sin x=\sin(\pi-t)=\sin t$，且 $x\to\pi$ 时，$t\to 0$，故

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(3) 令$-\frac{k}{x}=t$,则 $x\to\infty$时,$t\to 0$,故

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}\cdot k}=\lim_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-k}=[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-k}=e^{-k}$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\alpha x}\ln(1+\alpha x)=\alpha\lim_{x\to 0}\ln(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}$$

$$=\alpha\ln[\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}]=\alpha\ln e=\alpha$$

1.3 无穷小量与无穷大量

通过极限微观上可以探讨函数的精细结构,宏观上可以了解函数通往无穷远的趋势,本节将借助极限去认识微分学中两类非常重要的变量:无穷小量与无穷大量,为学习微积分学做好铺垫.

1.3.1 无穷小量

定义 1.7 若 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)=0$,则称函数 $f(x)$是 $x\to x_0(\infty)$时的**无穷小量**,简称**无穷小**(infinitesimal).

例如,$\sin 2x, x, x^2, x^3, \cdots, x^n$ 均是 $x\to 0$ 时的无穷小,又如 $\sin(x-a)$是 $x\to a$ 时的无穷小,再如 e^{-x^2}是 $x\to\infty$时的无穷小.

无穷小不是一个很小的数,而是以零为极限的函数或变量.

注意 函数 $f(x)=0$ 是 $x\to x_0(\infty)$时的特殊的无穷小.

根据无穷小的定义及极限的四则运算法则,可以证明无穷小有如下性质:

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

例 1.13 求极限$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在,不能用极限四则运算法则求该极限. 注意到$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,故 $\sin\frac{1}{x}$为有界函数,而 x^2 为 $x\to 0$ 时的无穷小. 由性质 2 知 $x^2\sin\frac{1}{x}$仍为 $x\to 0$ 时的无穷小,故有$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

无穷小与函数的极限存在极为密切的联系.

定理 1.4 在自变量 x 的某个变化过程中,$\lim f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$是无穷小.

1.3.2 无穷小量的阶

无穷小是以零为极限的变量,但收敛于零的速度有快有慢. 为了判断两个无穷小收敛