

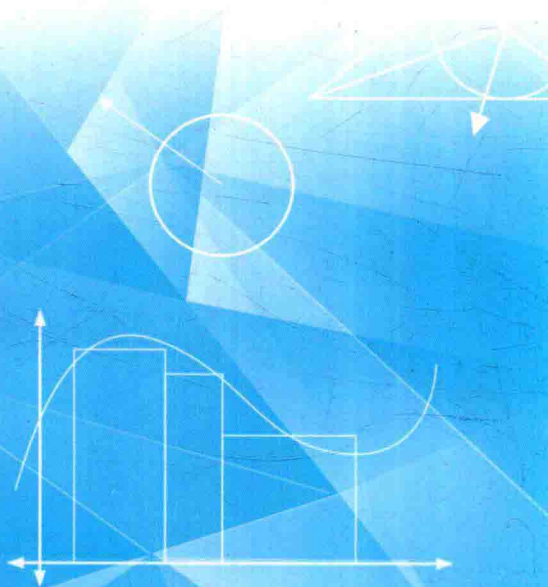
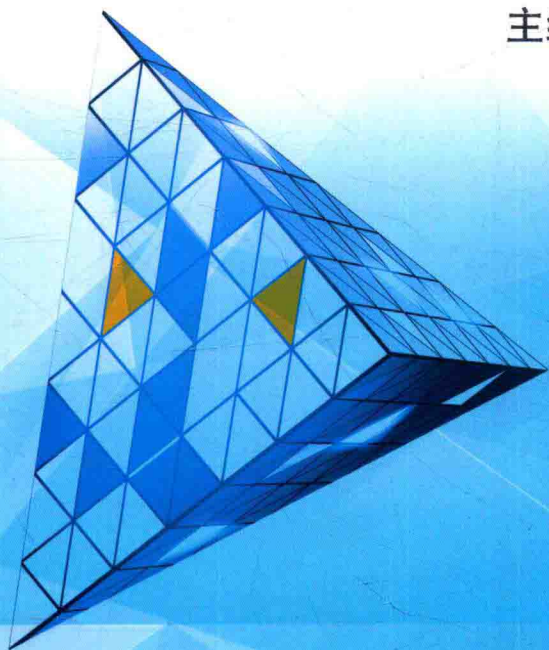
普通高等教育精品教材

高等数学

习题集

GAODENG SHUXUE XITIJI

主编 曹治清



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育精品教材

高等数学习题集

主 编 曹治清

副主编 李 青 刘 敏 徐 永

参 编 申慧容 林 薇 李 凌



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是与《高等数学》配套的习题集，书中汇集了一元函数微积分学（极限、导数、不定积分、定积分）这一基础模块中的基本练习，还精选了常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分这三个应用模块的相关练习。

本书适用于应用型高等院校所有专业的学生使用。

图书在版编目（C I P）数据

高等数学习题集 / 曹治清主编. — 上海：上海交通大学出版社，2017

ISBN 978-7-313-17457-4

I. ①高… II. ①曹… III. ①高等数学—习题集
IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 162721 号

高等数学习题集

主 编：曹治清

出版发行：上海交通大学出版社

邮政编码：200030

出 版 人：郑益慧

印 制：北京市科星印刷有限责任公司

开 本：787mm×1092mm 1/16

版 次：2017 年 7 月第 1 版

书 号：ISBN 978-7-313-17457-4/O

定 价：24.80 元

地 址：上海市番禺路 951 号

电 话：021-64071208

经 销：全国新华书店

印 张：8 字 数：167 千字

印 次：2017 年 7 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者：如发现本书有印装质量问题请与发行部联系

联系电话：010-62137141



高等数学是一门重要的基础课，它内容丰富，应用面广。经过多年的教学，使我们深刻体会到高校非数学专业的教育，应注重培养学生的现代数学意识和将数学应用于实际意识，与此同时高等数学在培养学生的逻辑推理能力、分析问题和解决问题的能力、自主学习能力和创新能力方面也具有非常重要的作用。

高等数学习题集是《高等数学》的配套教材，主要为了解决学生课后学习资源缺乏、课后练习不足的问题而编写的。特点如下：

(1) 考虑当下高等数学课时不足，力求适用。这套习题集包括了一元和多元微积分、常微分方程和空间解析几何的习题。

(2) 每章内容开始，通过知识结构图、知识要点简明扼要地归纳了本章的重要知识。这一部分帮助学生对本章内容进行清晰全面的概括总结，也可以当作一个高效的期末复习资料使用。

(3) 习题集以练习和复习题形式编写，内容包括了常见的单项选择题、填空题、计算题、综合应用题基本题型，题量丰富、难度由易到难。

(4) 书后附有参考答案，帮助学生课后练习中遇到的困难。

编写本书的过程中，我们参考了大量的相关资料和教材，在此对这些资料和教材的作者表示衷心的感谢！

限于我们的认知水平，对于书中存在的不妥之处，恳请各界同仁不吝指正。

编 者

2017年6月



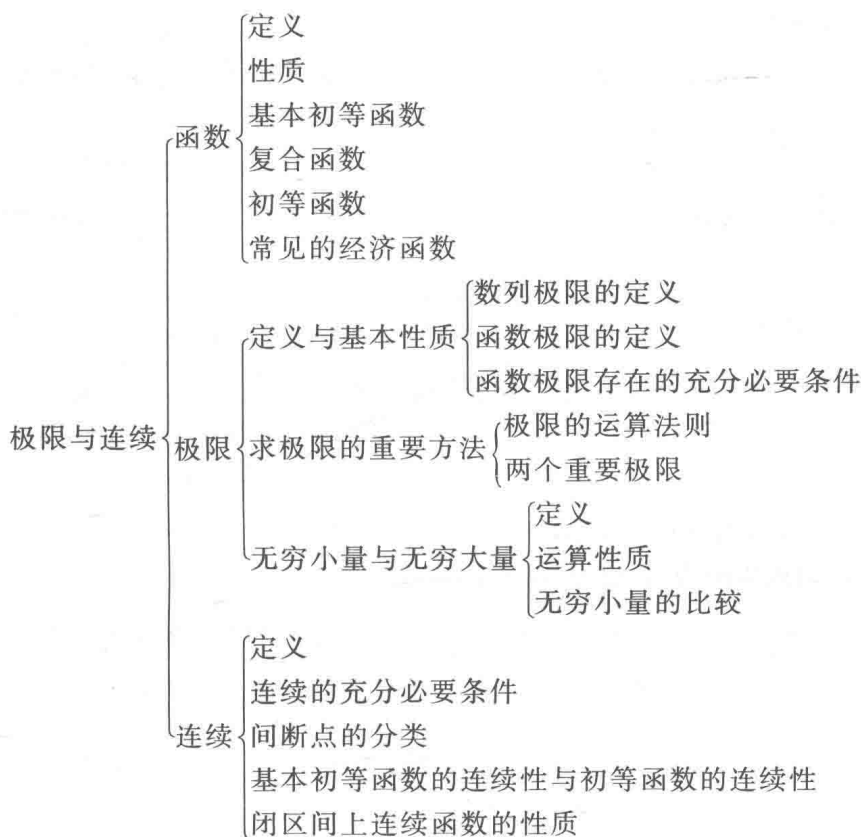
第 1 章 极限与连续性	1
【本章知识结构图】.....	1
【知识要点】.....	1
练习一.....	3
练习二.....	5
练习三.....	7
练习四.....	9
练习五	11
复习题	14
第 2 章 导数与微分	16
【本章知识结构图】	16
【知识要点】	16
练习一	17
练习二	19
复习题	22
第 3 章 导数的应用	25
【本章知识结构图】	25
【知识要点】	25
练习一	27
练习二	29
练习三	31
复习题	33
第 4 章 不定积分	36
【本章知识结构图】	36
【知识要点】	36
练习一	38
练习二	40
练习三	42

练习四	43
复习题	45
第 5 章 定积分及应用	48
【本章知识结构图】	48
【知识要点】	48
练习一	52
练习二	55
练习三	57
复习题	60
第 6 章 微分方程	62
【本章知识结构图】	62
【知识要点】	62
练习一	63
练习二	64
练习三	66
练习四	68
复习题	69
第 7 章 空间解析几何	72
【本章知识结构图】	72
【知识要点】	72
练习一	74
练习二	76
练习三	78
复习题	80
第 8 章 多元函数微积分	83
【本章知识结构图】	83
【知识要点】	83
练习一	86
练习二	88
练习三	90
练习四	92
练习五	95
练习六	97
练习七	99
复习题	101

参考答案	104
第 1 章 极限与连续性	104
第 2 章 导数与微分	105
第 3 章 导数的应用	107
第 4 章 不定积分	108
第 5 章 定积分及其应用	110
第 6 章 微分方程	111
第 7 章 空间解析几何	113
第 8 章 多元函数微积分	114
参考文献	118

第 1 章 极限与连续性

【本章知识结构图】



【知识要点】

一、函数

1. 函数的概念

函数的概念包括五个要素: 自变量 x , 定义域 D , 因变量 y , 对应法则 f , 值域 M . 在这五个要素中, 确定一个函数的关键是对应法则 f 和定义域 D . 如果两个函数的对应法则 f 和定义域 D 都相同, 则称这两个函数是相同的.

2. 函数的性质

函数的性质有: 奇偶性、单调性、有界性、周期性. 可以用这些特性来揭示函数的性态.



3. 复合函数和反函数

(1) 两个函数的复合,关键在于第二个函数的值域是否包含在第一个函数的定义域中,故有时候复合函数的定义域要缩小一些.

(2) 对于函数 $y = f(x)$,其反函数是否存在,取决于对应法则是否为一一对应.

4. 基本初等函数和初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

初等函数是由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合而得到的并用一个式子表示的函数.

5. 经济学中的常用函数

经济学中的常用函数本章只介绍了需求函数、供给函数、收益函数、成本函数、利润函数五种.

二、极限

1. 极限的概念

本章在极限的描述定义的基础上,主要介绍了函数极限的精确定义.

数列极限:对数列 $\{x_n\}$, $\forall \epsilon > 0$, 若 $\exists$ 正整数 N , 使 $n > N$ 时 $|x_n - A| < \epsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时, 极限为 A 或收敛于 A , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

函数极限: (1) 对函数 $f(x)$, 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$, 使 $x > M$ 时 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时极限为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

(2) 对函数 $f(x)$, 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

注意: (1) 定义中的两个不等式之间的关系, 以 $x \rightarrow x_0$ 时的函数极限为例, 对于 $\forall \epsilon > 0$, 如果总能找到保证不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立的不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$, 就可以说函数 $f(x)$ 的极限为 A .

(2) 定义中的两个正数 ϵ 和 δ 的关系, δ 不是任意的, 它由给定的 ϵ 来确定.

(3) 在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, x 是可以不取 x_0 的, 这反映在 $|x - x_0| > 0$ 中, 说明函数在一点有无定义与函数在该点有无极限没有必然的联系.

2. 无穷大量与无穷小量的概念

(1) 若 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限为零, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 简称无穷小.

(2) 对函数 $f(x)$, 若 $\forall E > 0$, $\exists \delta > 0$, 使 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| > E$, 则称函数 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 简称无穷大.

注意: (1) 无穷小量表示自变量在某种趋势下, 极限为零的量, 说明极限是存在的; 而无穷大量表示自变量在某种趋势下, $|f(x)|$ 为无限增大, 极限是不存在的.

(2) 无穷小量的性质很重要, 但要注意条件.

(3) 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小量; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小量, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.



3. 无穷小量的比较

三、函数的连续性

1. 函数连续的概念

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义, 若双侧极限等于函数值或 Δy 极限为 0, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 则称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

2. 函数的间断点

第一间断点、第二类间断点.

3. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义域内都连续. 在确定初等函数定义区间时, 只需考察函数的定义域. 对于分段函数, 由于每一段上都是初等函数的形式, 因此只需考察在分段点处的连续性.

4. 闭区间上连续函数的性质

最值定理, 介值定理. 介值定理的特别情况, 若 $f(a), f(b)$ 异号, 则 $\exists c \in (a, b)$ 使 $f(c) = 0$, 也称为零点定理.

四、计算函数极限的方法归纳

(1) 利用函数极限的分析定义验证某常数是已知函数的极限.

(2) 利用极限的四则运算法则.

(3) 用无穷小量与无穷大量的关系.

(4) 利用两个重要极限公式.

(5) 利用初等函数的连续性.

(6) 利用左极限和右极限来确定分段函数在分段点处的极限.

在运用极限的运算法则等求解函数极限, 要注意法则成立的条件, 当条件不满足时, 就不能直接用, 常常需要对函数通过适当的恒等变换后, 再利用有关的方法计算极限.

练习一

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域是_____.

2. 函数 $y = \lg(4-x^2) + \arccos \frac{x-1}{3}$ 的定义域是_____.

3. 已知 $f(2x) = x^2 + x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(0) =$ _____.

5. 曲线 $f(x) = x^2 \sin x$ 关于_____对称.

二、单项选择题(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 下列各函数对中, () 中的两个函数相等.

A. $f(x) = \frac{x^2}{x}, g(x) = x$

B. $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$



- C. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$ D. $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$, $g(x) = \csc^2 x - \cot^2 x$
2. 设函数 $f(x) = x^4 + 2^x - 1$, 则该函数是().
- A. 奇函数 B. 偶函数
C. 非奇非偶函数 D. 既奇又偶函数
3. 设 $f(x+1) = x^2 - 1$, 则 $f(x) = ($).
- A. $x(x+1)$ B. x^2 C. $x(x-2)$ D. $(x+2)(x-1)$
4. 函数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的图形关于()对称.
- A. x 轴 B. y 轴 C. 原点 D. $y = x$
5. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-3, 0] \\ -x^3, & x \in (0, 2] \end{cases}$ 是().
- A. 有界函数 B. 奇函数 C. 偶函数 D. 周期函数

三、分解下列各复合函数(每小题 6 分, 共 30 分)

1. $f(x) = \ln \sqrt{\cos x}$; 2. $f(x) = e^{(x+1)^2}$;

3. $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{2}$; 4. $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$;

5. $f(x) = \lg[\tan(x^2 + 1)^2]$.



四、应用题(每小题 15 分,共 30 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & |x| \leq 1 \\ x^2 + 1, & |x| > 1 \end{cases}$.

- (1) 作出函数 $f(x)$ 的图形;
- (2) 求函数的值域;
- (3) 求 $f(0), f(-2), f(2), f(-1), f(1)$.

2. 一位患者躺在医院的病床上打点滴. 圆柱形的滴流瓶底面半径为 4cm, 高为 15cm, 在导管调节器的控制下, 瓶中的药液面以 $\frac{1}{6}$ cm 每分钟的速度下降.

- (1) 计算当瓶中液面高度为 h cm 时, 进入病人静脉的药液体积 V ;
- (2) 求从给病人打点滴开始 t min 后瓶中的液面高度 h ;
- (3) 写出瓶中药液体积 V 作为时间 t 的函数表示式;
- (4) 瓶中药液全部进入病人静脉需要多少时间?

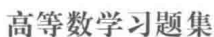
练习二

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = \underline{\hspace{2cm}}.$



5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \underline{\hspace{2cm}}.$

1. 左右极限都存在是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限的().

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \leq 0 \\ x^2-2, & x > 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (\quad)$.

- A. 2 B. -2 C. -1 D. 0

A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. ∞

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. ∞ D. 0

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. ∞

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 3x + 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x-2};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right);$



5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 1}.$

四、解答题(每小题 15 分,共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$

2. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ 存在,求 a 及其极限值.

练习三

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{\cot x}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{2x} = e$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$



5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{2-x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 下列各式中正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = (\quad).$

A. $\frac{5}{3}$

B. 0

C. $\frac{3}{5}$

D. ∞

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot 2x = (\quad).$

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. 2

D. ∞

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{x}} = (\quad).$

A. e^{-4}

B. e^4

C. $e^{\frac{1}{4}}$

D. $e^{-\frac{1}{4}}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx+d} = (\quad).$

A. e

B. e^b

C. e^{ab}

D. e^d

三、求下列极限(每小题 6 分,共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \sin \frac{1}{x^3};$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2};$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)^{x^2};$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}.$



四、解答题(每小题 15 分,共 30 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-C} \right)^x = 2$, 求 C .

2. (细菌繁殖问题)由实验知,某种细菌繁殖的速度在培养基充足等条件满足时与当时已有的数量 A_0 成正比,即 $v = kA_0$ ($k > 0$),问经过时间 t 以后细菌的数量是多少?

(提示:把时间间隔 $[0, t]$ 分成 n 等分,在很短一段时间内细菌数量变化很小,繁殖速度可近似看成不变)

练习四

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 当 $x \rightarrow$ _____ 时 $f(x)$ 是无穷小量;

当 $x \rightarrow$ _____ 时 $f(x)$ 是无穷大量.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 5}{x^2 + 2} =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{10}}{(x+1)^2(2x-3)^8} =$ _____.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} =$ _____.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan x} =$ _____.



二、单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,下列变量为无穷小量的是().

- A. $\ln x$ B. $\frac{\sin x}{x}$ C. $x \sin \frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, 下列极限成立的是().

- A. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$ B. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$
C. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$ D. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

3. 下列变量在自变量给定的变化过程中不是无穷大的是().

- A. $\frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} (x \rightarrow +\infty)$ B. $\ln x (x \rightarrow +\infty)$
C. $e^{\frac{1}{x}} (x \rightarrow 0^-)$ D. $\ln x (x \rightarrow 0^+)$

4. 下列变量在自变量给定的变化过程中不是无穷小的是().

- A. $2^{-x} - 1 (x \rightarrow 0)$ B. $\frac{x}{\sqrt{x^3 - 2x + 1}} (x \rightarrow +\infty)$
C. $x^2 (3 - \sin \frac{1}{x}) (x \rightarrow 0)$ D. $e^{\frac{1}{x}} (x \rightarrow 0^+)$

5. 当 $x \rightarrow 1$ 时,无穷小 $1 - x$ 和 $\frac{1}{2}(1 - x^2)$ 的关系是().

- A. 高阶 B. 同阶 C. 等价 D. 以上都不是

三、求下列极限(每小题 6 分,共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2};$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 3x}{x^3};$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{\arcsin x};$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3};$