21 世纪高等学校重点课程辅导教材

GAODENG SHUXUE JIAOXUE
TONGBU ZHIDAO YU XUNLIAN

高等数学教学同步指导与训练

喻德生 主编

下

化学工业出版社

21世纪高等学校重点课程辅导教材

GAODENG SHUXUE JIAOXUE
TONGBU ZHIDAO YU XUNLIAN

高等数学教学同步指导与训练

喻德生 主编

下

化学工业出版社
·北京·

《高等数学教学同步指导与训练》（下）参照同济大学数学系编《高等数学》（下册）（第七版）的基本内容，以每节两学时的篇幅对高等数学进行教学设计，全书共计 46 节 92 学时. 除习题课外，每节均由教学目标、考点题型、例题分析组成. 教学目标根据高等数学教学大纲的基本要求编写，目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性；考点题型分两级列出考点，并以求解、证明等字眼指出考查考点常见的题型；例题分析选择、构造一些比较典型的题目，从不同侧面阐述解题的思路、方法和技巧，每个题均按照“例题＋分析＋解或证明＋思考”的模式编写，运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质，从而把“师生对话”的机制融入解题的过程中，使“教、学、思”融于一体，使举一反三成为可能，进而提高学生分析问题和解决问题的能力；每章末课后作业以每次课配置一次作业的原则进行编写. 每次作业均包含 3 种题型 7 个题目，其中填空题 2 个，选择题 2 个，解答、证明题 3 个. 各题后均留有空白处，用于书写解答的过程. 每次作业均印刷在一页的正、反面上，完成作业后即可将其撕下上交，方便使用.

《高等数学教学同步指导与训练》（下）是高等数学教学的同步教材，对高等数学每堂课的教学都具有较强的指导性、针对性和即时性，可作为理工科高等数学教学的指导书和练习册，供教师和学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教学同步指导与训练. 下/喻德生主编. —北京：化学工业出版社，2018.3
21 世纪高等学校重点课程辅导教材
ISBN 978-7-122-31483-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①喻…　Ⅲ.①高等数学-高等学校教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 020411 号

责任编辑：郝英华　唐旭华　尉迟梦迪　　　装帧设计：史利平
责任校对：王　静

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：三河市双峰印刷装订有限公司
787mm×1092mm　1/16　印张 $14\frac{3}{4}$　字数 389 千字　2018 年 3 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.80 元

前　言

本书根据高等学校理工科高等数学课程教学的基本要求，结合当前高等数学教学改革和学生学习的实际需要，组织教学经验比较丰富的教师编写．本书是高等数学教学的同步教材，对高等数学教学具有较强的指导性、针对性和即时性，可作为理工科高等数学教学的指导书和练习册，供教师和学生使用．

本书根据本科院校高等数学课程教学的基本要求和教学时数，参照同济大学数学系编《高等数学》（下册）（第七版）的基本内容，合理地分割每次课（2 学时）的教学内容，并以每次课配置一次作业的原则进行编写．除习题课外，每节均包括教学目标、考点题型、例题分析，每章末配套课后作业．各部分编写说明如下．

① 教学目标　根据高等数学教学大纲的基本要求，以知道、了解、理解或掌握、熟练掌握、会求等分层次进行编写．目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性．

② 考点题型　分两级列出考点，其中打“＊”号的表示一级考点，否则为二级考点；并以求解、证明等字眼指出考查考点常见的题型．

③ 例题分析　围绕每次课教学内容的重点、难点，按每次课 6 个或 8 个例题的幅度选择一些比较典型的例题，从不同侧面阐述解题的思路、方法与技巧．每个题均按照“例题＋分析＋解或证明＋思考”的模式编写，广泛运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质．从而在解题的过程中，运用“师生对话”的机制，使“教、学、思”融于一体，使举一反三成为可能，提高学生分析问题和解决问题的能力．

④ 课后作业　每次作业均包含 3 种题型 7 个题目，其中填空题 2 个，选择题 2 个，解答、证明题 3 个．各题后均留有空白处，用于书写解答的过程．每次作业均印刷在同一页的正、反面上，完成作业后即可将其撕下上交，方便使用．

本书是在我校近 20 年以来编写使用的教学指导书和练习册的基础上编写而成的．本书的编写得到了我校教务处和数学与信息科学学院以及化学工业出版社的大力支持，在此表示衷心感谢！

本书由喻德生教授主编，参加本书及练习册答案部分内容编写的老师有：李昆、邹群、明万元、黄香蕉、王卫东、程筠、杨就意、胡结梅、徐伟、陈菱蕙、毕公平、漆志鹏、熊归凤、魏贵珍、李园庭、鲁力、王利魁、赵刚等．

由于水平有限，书中难免出现疏漏之处，敬请国内外同仁和读者批评指正．

编者

2017 年 12 月于南昌航空大学

目 录

第八章　空间解析几何与向量代数

第一节　向量及其线性运算（一）

一、教学目标

理解向量的概念和向量线性运算的性质，理解两个向量平行的充分必要条件．了解空间直角坐标系结构，空间点与该点的坐标以及该点的向径之间的一一对应关系，掌握两点间的距离公式．

二、考点题型

向量的线性运算，几何题的向量证明，两点间的距离公式．

三、例题分析

例 8.1.1　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，当它们满足什么几何特征时，下列各式成立？

(i) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　(ii) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　(iii) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

分析　利用向量相加、减的平行四边形法则及三角形法则，再结合平行四边形的几何特征求解即可．

解　如图 8.1. (i) 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，平行四边形变为矩形，其两条对角线相等，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(ii) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(iii) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 π 时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

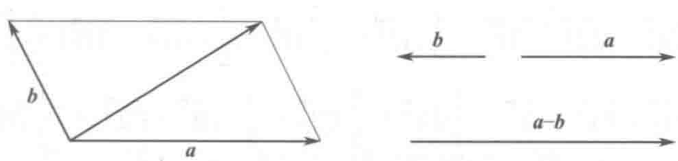

图 8.1

思考　给出 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ 成立的条件．

注意　第三种情况中，由于两向量平行，因此只适用三角形法则．

例 8.1.2　设 $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}$ 不平行于 $\boldsymbol{b}$）且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是从同一起点引出的向量，问：系数 α，β 满足什么条件，才能使 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的终点在一条直线上？

分析　三个向量终点共线，等价于三个向量的终点所构成的三个向量相互平行，因此利用其中任意两个向量平行的关系求解即可．

解　如图 8.2. 由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 起点相同、终点共线，得

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\Rightarrow\boldsymbol{c}=\frac{k-1}{k}\boldsymbol{b}+\frac{1}{k}\boldsymbol{a},$$

于是 $\alpha+\beta=\frac{k-1}{k}+\frac{1}{k}=1$.

思考　若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是从同一起点引出的三个向量，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的终点在一条直线上，能否推出 $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$？若能，给出证明；否，举出反例．

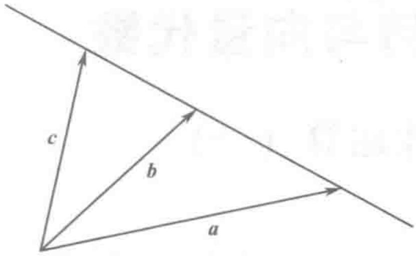

图 8.2

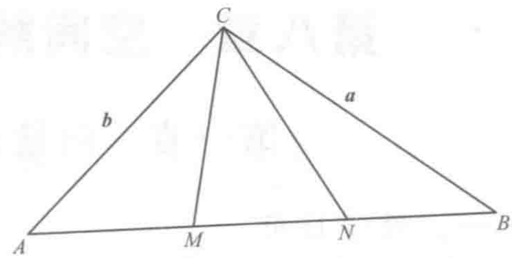

图 8.3

例 8.1.3 三角形 ABC 的边 AB 被点 M，N 分成三等份，设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，求$\overrightarrow{CM}$.

分析 $\overrightarrow{CM}$是三角形 AMC 或 MBC 的边向量，可以用这两个三角形其余两边的边向量来表示，而$\overrightarrow{AM}$或$\overrightarrow{MB}$则可以用$\overrightarrow{AB}$来表示.

解 如图 8.3. 因为$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}/3$，所以$\overrightarrow{AM}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})/3$. 故

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})/3=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/3.$$

思考 (i) 求$\overrightarrow{CN}$；(ii) 若三角形 ABC 的边 AB 被点 P，Q，R 分成四等份，求$\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CQ}$和$\overrightarrow{CR}$.

例 8.1.4 证明：空间四边形相邻各边中点的连线构成平行四边形.

分析 先利用向量加法的平行四边形法则将中点的连线分别求出，并证明它们两两相等即可. 注意，空间四边形的四个顶点未必共面，而平行四边形的四个顶点必共面. 只需证明空间四边形相邻各边中点的连线所构成四边形的一组对边向量相等即可.

证明 如图 8.4. 设空间四边形四个顶点依次为 A，B，C，D，四边中点依次为 E，F，G，H，于是由平行四边形法则知

$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

所以$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$，即 $EH\,/\!/\,FG$，$EH=FG$. 因此，四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

思考 (i) 空间的菱形（即空间中四边相等的四边形）相邻各边中点的连线所构成的图形是正方形吗？是，给出证明；否，说明理由. (ii) 若 E，F，G，H 分别是各边上满足条件$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{CG}{GD}=\dfrac{DH}{HA}=\lambda$ 的点，那么 $EFGH$ 是什么四边形？并证明你的结论.

例 8.1.5 设 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 依次是三角形 ABC 三个顶点的向径，求三角形 ABC 中线的交点的向径.

分析 先用三角形顶点的向量表示三角形的边向量，进而表示三角形的中线向量和顶点与中线交点的向量，这样就可以求出三角形中线交点的向径.

解 如图 8.5. 设 D 是边 AB 的中点，M 是三角形 ABC 中线的交点，则

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2, \overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)/2; \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1;$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)/2+(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3-2\boldsymbol{r}_1)/2,$$

于是 $$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AD}/3=(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3-2\boldsymbol{r}_1)/3,$$

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}_1+\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{r}_1+(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3-2\boldsymbol{r}_1)/3=(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)/3.$$

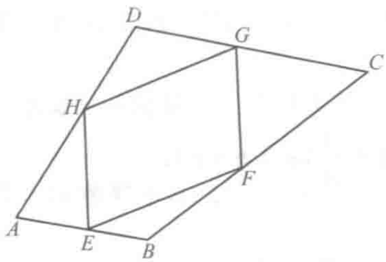

图 8.4

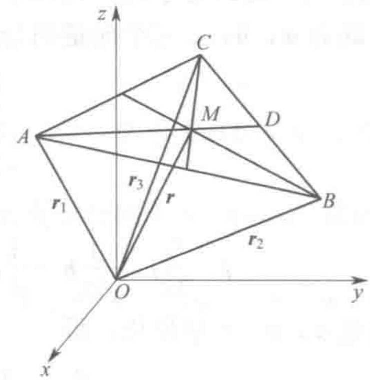

图 8.5

思考　分别求三角形 ABC 角平分线的交点的向径和三角形一内角平分线延长线与其余两外角平分线交点的向径.

例 8.1.6　求到三点 $A(1,\ -1,\ 5)$，$B(3,\ 4,\ 4)$ 和 $C(4,\ 6,\ 1)$ 的距离相等点的轨迹.

分析　根据题设和两点间的距离公式，求出具有上述性质的任意点所满足的方程或方程组即可.

解　设 $M(x,\ y,\ z)$ 是满足题设条件的任意点，则由 $|AM|=|BM|=|CM|$，得

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2} \\ \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2+(z-1)^2}\end{cases},$$

即
$$\begin{cases}2x+5y-z=7 \\ x+2y-3z=6\end{cases}.$$

思考　若求到三点 $A(1,\ -1,\ 5)$，$B(3,\ 4,\ 4)$ 和 $C(4,\ 6,\ 1)$ 的距离为 $1:2:3$ 点的轨迹，结果如何？

第二节　向量及其线性运算（二）

一、教学目标

了解向量坐标表达式的概念与方法．掌握坐标表达下向量的线性运算和向量的模、方向余弦、方向角和单位向量的求法，掌握定比分点公式；了解向量在轴上投影的概念及性质，会求向量在坐标轴上的投影.

二、考点题型

向量的坐标表示，坐标表示下向量的线性运算，向量的单位化，方向角与方向余弦的求解.

三、例题分析

例 8.2.1　设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用单位向量 $\boldsymbol{e}_a$，$\boldsymbol{e}_b$，$\boldsymbol{e}_c$ 表示向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$.

分析　先联立 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 三个向量的分解式，将 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 当作未知量求解；再求出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，

c 与 e_a，e_b，e_c 间的关系式，代入方程组的解即可．

解 联立 a，b，c 三个向量的分解式，得方程组

$$\begin{cases} i+j+k=a \\ i-2j+k=b \\ -2i+j+2k=c \end{cases},$$

解得

$$i=\frac{5}{12}a+\frac{1}{12}b-\frac{1}{4}c,\ j=\frac{1}{3}(a-b),k=\frac{1}{4}(a+b+c).$$

将向量 a，b，c 单位化，得

$$e_a=\frac{a}{|a|}=\frac{a}{\sqrt{3}},e_b=\frac{b}{|b|}=\frac{b}{\sqrt{6}},e_c=\frac{c}{|c|}=\frac{c}{3}.$$

所以有

$$i=\frac{5\sqrt{3}}{12}e_a+\frac{\sqrt{6}}{12}e_b-\frac{3}{4}e_c,j=\frac{1}{3}(\sqrt{3}e_a-\sqrt{6}e_b),k=\frac{1}{4}(\sqrt{3}e_a+\sqrt{6}e_b+3e_c).$$

思考 向量 $5\sqrt{3}e_a+\sqrt{6}e_b-9e_c$，$\sqrt{3}e_a-\sqrt{6}e_b$，$\sqrt{3}e_a+\sqrt{6}e_b+3e_c$ 是什么关系？为什么？

例 8.2.2 已知平行四边形 $ABCD$ 的两个边向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 的坐标分别为（5，－2，3）和（－2，3，－4），向量 a 平行于其对角线 $\overrightarrow{AC}$ 且 $|a|=4$，求向量 a.

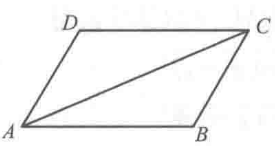

图 8.6

分析 由平行四边形法则可知，对角线 $\overrightarrow{AC}$ 是两边 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的和；再根据两向量平行的充要条件，可将向量 a 的三个坐标值用同一变量表示；最后利用其模长求出该变量，得出向量的坐标．

解 如图 8.6. 由于 $a\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$，则存在唯一实数 λ，使 $a=\lambda\cdot\overrightarrow{AC}$. 设向量 a 的坐标为 (x, y, z)，则由

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(5,-2,3)+(-2,3,-4)=(3,1,-1),$$

可得 $(x, y, z)=\lambda(3, 1, -1)$. 故由题设可得

$$|a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(3\lambda)^2+\lambda^2+(-\lambda)^2}=\sqrt{11}|\lambda|=4,$$

解得 $\lambda=\pm\frac{4\sqrt{11}}{11}$，所以 a 的坐标为 $\pm\frac{4\sqrt{11}}{11}(3, 1, -1)$．

思考 若向量 a 平行于其对角线 $\overrightarrow{BD}$ 且 $|a|=4$，结果如何？

例 8.2.3 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $a=(8, 9, -12)$ 的方向取长为 34 的线段 AB，试求 B 点的坐标．

分析 由于线段 AB 是沿向量 a 的方向取得的，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 a 平行；再由线段 AB 的长为 34，仿上例求解即可．

解 设点 B 的坐标为 (x, y, z)，则

$$\overrightarrow{AB}=(x,y,z)-(2,-1,7)=(x-2,y+1,z-7)$$

由题意

$$\overrightarrow{AB}=\lambda a,且\ \lambda>0,$$

于是

$$x-2=8\lambda,y+1=9\lambda,z-7=-12\lambda,$$

又

$$34=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(8\lambda)^2+(9\lambda)^2+(-12\lambda)^2}=17\lambda,$$

解得 $\lambda=2$. 于是点 B 的坐标为 (18, 17, −17).

思考 若从点 A (2, −1, 7) 作一长为 34 的线段 AB，使向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，结果如何?

例 8.2.4 一向量与三个坐标面 xOy，xOz，yOz 的夹角分别为 φ，θ，ω，试证:

$$\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\omega=2$$

分析 注意到 φ，θ，ω 分别与向量的方向角互余，再结合方向角余弦的平方和等于 1，即可证得.

证明 设该向量的方向角分别为 α，β，γ，则有 $\alpha+\omega=\dfrac{\pi}{2}$，$\beta+\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\gamma+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\cos\alpha=\sin\omega,\cos\beta=\sin\theta,\cos\gamma=\sin\varphi.$$

又 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，因此有

$$\begin{aligned}1&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\sin^2\omega+\sin^2\theta+\sin^2\varphi\\&=(1-\cos^2\omega)+(1-\cos^2\theta)+(1-\cos^2\varphi)\\&=3-(\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\omega),\end{aligned}$$

所以

$$\cos^2\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\omega=2.$$

思考 (i) 求该向量的单位向量；(ii) 若还已知向量的模为 16，求该向量.

例 8.2.5 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $\beta=\dfrac{2}{3}\pi$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，试求 $\boldsymbol{a}$.

分析 先利用方向角的余弦公式求出第三个方向角，然后再用向量的模与方向余弦相乘得到各坐标值.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 (x, y, z). 由方向角的余弦公式得

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\gamma=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\cos^2\gamma,$$

解得 $\cos\gamma=0$，$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$. 于是有

$$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\sqrt{3},y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=-1,z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=0,$$

即向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(\sqrt{3}, -1, 0)$.

思考 若已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标面 xOy，yOz 的夹角分别为 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，结果如何?

例 8.2.6 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点在点 $B(2, -3, -1)$，且它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 −4，1，3，求该向量起点 A 的坐标.

分析 向量在 x，y，z 轴上的投影分别就是向量的三个坐标值，据此利用向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标即可求得.

解 设起点 A 的坐标为 (x, y, z)，则 $\overrightarrow{AB}=(2, -3, -1)-(x, y, z)=(-4, 1, 3)$，于是 $(x, y, z)=(2, -3, -1)-(-4, 1, 3)=(6, -4, -4)$，所以 A 的坐标为 $(6, -4, -4)$.

思考 若 $\overrightarrow{AB}$ 为单位向量，且 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影的和为零，结果如何?

第三节　数量积、向量积

一、教学目标

了解数量积的概念与数量积的物理意义；了解向量积的概念与向量积的物理、几何意义. 掌握数量积、向量积的运算性质，掌握数量积、向量积的求法.

二、考点题型

数量积的性质、物理意义，数量积的求解*；向量积的性质、几何与物理意义，向量积的求解*；向量间的夹角的求解，向量平行与垂直的判断*.

三、例题分析

例 8.3.1　已知三角形的两边 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{p}-4\boldsymbol{q}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$，其中 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 是互相垂直的单位向量，求 $\overrightarrow{CA}$ 的长.

分析　先求出向量 $\overrightarrow{CA}$，再根据向量模长的公式，转化成向量的点积求解.

解　因为 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-(\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q})-(3\boldsymbol{p}-4\boldsymbol{q})=-4\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$，所以

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{CA}|&=\sqrt{(4\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^2}=\sqrt{16\boldsymbol{p}^2+8|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos(\pi/2)+\boldsymbol{q}^2}\\
&=\sqrt{16\times1^2+8\times1\times1\times0+1^2}=\sqrt{17}.
\end{aligned}
$$

思考　(i) 若 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{q}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{p}-5\boldsymbol{q}$，结果如何？(ii) 若 $(\boldsymbol{p},\hat{\ }\boldsymbol{q})=5\pi/4$，求解以上两题.

例 8.3.2　设 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 k 为何值时，以 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 为邻边的平行四边形的面积为 6.

分析　由向量积的几何意义，$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|$ 即为以 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 为邻边的平行四边形的面积. 再同时结合向量积的定义及运算规律求解即可.

解　以 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|&=|(3\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|=|3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}\times2\boldsymbol{b}|\\
&=|6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=|(6-k)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|6-k||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2|6-k|=6,
\end{aligned}
$$

所以得 $k=3$ 或 9.

思考　若 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，结果如何？$\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 呢？

例 8.3.3　设 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影是 7 的向量.

分析　由向量积的定义可知，同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 可表示成 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，再由在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影进一步确定 λ 即可.

解　由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&3\\2&-3&1\end{vmatrix}=7\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，于是 $\boldsymbol{x}=\lambda(7,5,1)$. 又因为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x}=\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{c}|}=7$，即 $\dfrac{14\lambda+5\lambda+2\lambda}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=7$，求得 $\lambda=1$，所以 $\boldsymbol{x}=(7,5,1)$.

思考　若 $\boldsymbol{c}$ 在所求向量上的投影为 7，结果如何？

例 8.3.4　设$|\boldsymbol{a}|=5,|\boldsymbol{b}|=3,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/3$. 求：(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影；(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

分析　根据向量在另一个向量上的投影公式和向量的模与数量积之间的关系求解即可.

解　(1) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=5\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{2}$,

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{5^2+2\times5\times3\cos(\pi/3)+3^2}=7$.

思考　(i) 求向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影；(ii) 若求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，结果如何？$|2\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|$或$|\boldsymbol{a}\pm2\boldsymbol{b}|$呢？

例 8.3.5　已知$|\boldsymbol{p}|=3,|\boldsymbol{q}|=1,\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{q}$，求以向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$ 为邻边的平行四边形的面积.

分析　这是一道综合题，涉及叉积的几何意义、叉积的运算法则和叉积的定义，要根据以上三方面知识逐步求解.

解　$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|(3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q})\times(-\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q})|=8|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin(\widehat{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}})$
$=8\times3\times1\times\sin(\pi/2)=24$.

思考　(i) 若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/3$，结果如何？$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/4$或$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/6$呢？(ii) 若 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$，以上各题的结果如何？

例 8.3.6　设 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

分析　题目已知两向量的点积和叉积，而向量的点积与两向量的模和夹角的余弦有关，向量叉积的模与两向量的模和夹角的正弦有关，两者一起就可以得出夹角的正切，从而求出夹角.

解　因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\sqrt{3}$，所以

$$\tan\theta=1/\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\pi/6.$$

思考　(i) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，结果如何？$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 呢？(ii) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/3$，求 m 的值.

第四节　习题课一

例 8.4.1　设在三角形 ABC 各边上分别向外作正方形 $ABED$，$BCGF$，$CAKH$，求证 $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{KD}=\boldsymbol{0}$.

分析　所证结论是六边形 $DEFGHK$ 不相邻的三个边向量的和等于零向量，而该六边形的所有边向量的和也等于零向量. 因此，可以把所证结论转化为六边形 $DEFGHK$ 另外不相邻的三个边向量的和也等于零向量.

证明　如图 8.7. 由于$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{0}$，而 $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$，所以$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{KD}=\boldsymbol{0}$.

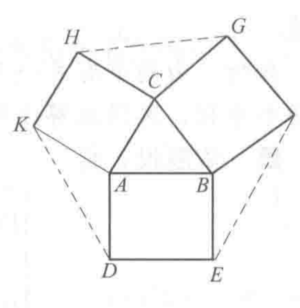

图 8.7

思考　(i) 若在三角形 ABC 各边上分别向外作平行四边形 $ABED$，$BCGF$，$CAKH$，结论是否仍然成立？是，给出证明；否，说明理由；(ii) 若在三角形 ABC 各边上分别向内作正方形或平行四边形 $ABE'D'$，$BCG'F'$，$CAK'H'$，结论如何？并证明你的结论.

例 8.4.2　若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

分析 向量垂直的充要条件是数量积为零，根据题中给出的两组垂直的向量，可以求出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，从而求出向量的夹角．

解 由题设，$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$，且 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，即

$$\begin{cases}7|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2=-16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ 7|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2=30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{cases},$$

解 $|\boldsymbol{a}|^2,|\boldsymbol{b}|^2$ 的二元一次方程组，得 $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 故

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2},$$

所以两向量的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

思考 若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直，向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，结果如何？向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直呢？

例 8.4.3 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

分析 由于 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，故用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 分别点乘该式的两边，都可以得到与点积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 相关的等式，再设法从中解出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 即可．

解 依题设，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0\\ \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0\\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1=0\end{cases},$$

三式相加，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-3/2$，再将该式与第一式相减即得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1/2$.

思考 (i) 若求 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，结果如何？(ii) 若 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

例 8.4.4 设 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{2\pi}{3}$，求以向量 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 和 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积．

分析 根据几何意义，将以两向量为边的平行四边形的面积表示成这两个向量叉积的模，再用叉积的性质展开求解．

解 $S=|(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|=|3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$

$$=8|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=8|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{2\pi}{3}=8\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}.$$

思考 (i) 若 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$，结果如何？$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$ 呢？(ii) 若 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/6$，求解以上各题．

例 8.4.5 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=1$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=2$，求 m，n 的值.

分析 由两个有关一个向量在另一个向量上的投影的条件，可以得出关于未知数 m，n 的两个方程；再联立解方程组，就可以求出未知数的值．

解 依题设，得

$$\begin{cases}\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{12+2m}{\sqrt{6^2+n^2+2^2}}=1\\ \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{12+2m}{\sqrt{2^2+m^2}}=2\end{cases},$$

即 $\begin{cases}4m^2+48m+144=n^2+40\\4m^2+48m+144=4m^2+16\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=-8/3\\n=\pm 2\sqrt{10}/3\end{cases}$.

思考 若 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=n\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，结果如何？$\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 呢？

例 8.4.6 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，假设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 等长，且它们两两间的夹角相等，求 $\boldsymbol{c}$.

分析 只需求出向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标．而由题设可以得出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的点积和模相等，据此可以列出关于 $\boldsymbol{c}$ 的坐标三个独立的方程，再解方程组即可．

解 设 $\boldsymbol{c}=(x,\ y,\ z)$，依题设有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 和 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，即

$$\begin{cases}x+y=1\\y+z=1\\x^2+y^2+z^2=2\end{cases},\text{解得}\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-1/3\\y=4/3\\z=-1/3\end{cases}.$$

思考 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，结果如何？$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 呢？

例 8.4.7 已知三角形三个顶点的坐标 $A(1,\ 1,\ 1)$，$B(5,\ 1,\ -2)$，$C(7,\ 91)$，求 $\angle A$ 的平分线与 BC 边交点的坐标．

分析 这是求三角形角平分线与其对边定比分点的坐标的问题，根据三角形角平分线定理和定比分点坐标公式求解即可，关键是根据角平分线定理求出定比．

解 因为

$|AB|=\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}=5, |AC|=\sqrt{(7-1)^2+(9-1)^2+(1-1)^2}=10$，由角平分线定理可知 $\lambda=|CD|:|DB|=|AC|:|AB|=10:5=2$，于是由定比分点坐标公式，得

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3},$$

$$y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+2\cdot 1}{1+2}=\frac{11}{3},$$

$$z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{1+2\cdot(-2)}{1+2}=-1.$$

所求点的坐标为 $D\left(\frac{17}{3},\ \frac{11}{3},\ -1\right)$.

思考 (i) 求三角形另两个角的平分线与其对边交点的坐标；(ii) 求三角形三个角的外角平分线与其对边延长线交点的坐标．

例 8.4.8 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是非零向量，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，求 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.

分析 根据题设和叉积的定义，可以确定非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 之间的关系，进而得出三向量模长之间的关系和模的大小．

解 因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是两两相互垂直的向量．于是

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\frac{\pi}{2}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|,$$

同理可得 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，故

$$\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

同理可得 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$. 所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，故由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|, |\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 及 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是非零向量，可得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，从而 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3$.

思考 (i) 若 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，结果如何？$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 呢？(ii) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{c}=3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，结果怎样？并讨论 (i) 中类似的问题.

第五节　平面及其方程

一、教学目标

掌握平面的点法式方程、一般方程和截距式方程，会平面三种形式的方程之间的互化；了解两平面夹角的概念，会求两平面的夹角；掌握两平面平行、垂直的判断.

二、考点题型

平面方程的求解*——平面的点法式方程、一般方程、截距式方程和平面束方程的选择与利用；平面位置关系的判断，特别是平面平行、垂直的判断*.

三、例题分析

例 8.5.1 求平行 x 轴，且过点 $A(1,-5,1)$ 和 $B(3,-2,2)$ 的平面方程.

分析 可用平面的一般方程求解. 在平面的一般方程中，平行于 x 轴的平面具有变量 x 的系数为零的特点.

解 设所求平面的方程为 π：$By+Cz+D=0$，再将点 A，B 的坐标代入平面方程，可得

$$\begin{cases}-5B+C+D=0\\-2B+2C+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-3B\\D=8B\end{cases},$$

故所求平面的方程为

$$\pi:3z-y-8=0.$$

思考 (i) 若所求平面平行分别于 y 轴和 z 轴，结果如何？(ii) 用平面的点法式方程求解以上各题.

例 8.5.2 求过三点 $A(1,-1,0)$，$B(-1,0,1)$，$C(0,2,-1)$ 的平面方程.

分析 若根据平面的点法式方程求解，关键是求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 显然，$\boldsymbol{n}$ 垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，故根据向量积的定义，可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$；其次，由于已知平面过 A，B，C 三个点，故也可通过平面的一般式方程来求.

解 由于 $\overrightarrow{AB}=\{-2,1,1\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-1,3,-1\}$，故根据向量积的定义，取平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-2&1&1\\-1&3&-1\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k},$$

因此，过点 $A(1,-1,0)$，且以 $\boldsymbol{n}=-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$ 为法向量的平面方程为

$$-4(x-1)-3(y+1)-5z=0,$$

即所求平面方程为

$$4x+3y+5z-1=0.$$

思考 (i) 若取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ 或 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}$ 作为法向量求解，结果如何？并指出各种情况的细微差别；(ii) 若取 $B(-1,0,1)$ 或 $C(0,2,-1)$ 作为已知点求解，结果如何？

并指出各种情况的细微差别；(iii) 用平面的一般式方程求解该题．

例 8.5.3　一平面过点 $P(1, 2, -1)$ 且在三坐标轴上的截距相等，求平面的方程．

分析　直接用截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 求解，根据已知点，确定截距式方程中的参数即可．

解　设平面的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$，将点 $P(1, 2, -1)$ 的坐标代入得

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{1}{a}=1 \Rightarrow a=2,$$

故所求平面方程为 $x+y+z=2$.

思考　(i) 若所平面在 x，y 轴上的截距相等、在 x，z 轴上的截距互为倒数，结果如何？(ii) 若所求平面过点 $P(1, -2, 2)$，以上各题结果如何？

例 8.5.4　一平面平行于 y 轴并且过平面 $x+3y+5z-4=0$ 和 $x-y-2z+7=0$ 的交线，求它的方程．

分析　过两平面交线的平面方程，通常用平面束方程来求解．即先写出过两平面交线的平面束方程，再根据题设确定平面束方程中的参数，从而得出所求平面．注意，参数无解时说明所求平面不在该形式的平面束中，要用另一种形式的平面束方程求解．

解　已知直线的平面束方程

$$x+3y+5z-4+\lambda(x-y-2z+7)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4)=0.$$

令 $3-\lambda=0$ 得 $\lambda=3$，于是所求平面方程为

$$4x-z+17=0.$$

思考　(i) 若所求平面平行于 x 轴，结果如何？平行于 z 轴呢？(ii) 设过已知直线的平面束方程为 $x-y-2z+7+\lambda(x+3y+5z-4)=0$，再分别求解以上问题，并比较两种方法的异同．

例 8.5.5　求两个平面 $x-y+2z-6=0$，$2x+y+z-5=0$ 的夹角．

分析　两个平面的夹角即两个平面法向量的夹角．因此，先求出两已知平面的法向量，再利用两向量的夹角公式求解即可．

解　两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{1, -1, 2\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{2, 1, 1\}$，于是

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

因此，两个平面的夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

思考　(i) 两平面的夹角与其一般方程中的常数项是否有关？为什么？(ii) 若平面 π：$ax-y+2z-6=0$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 之间的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求平面 π.

例 8.5.6　求两平面 π_1：$x-2y+2z+21=0$，π_2：$7x+24z-5=0$ 夹角平分面的方程．

分析　依题意，所求平分面上的任意一点到平面 π_1 和平面 π_2 的距离相等，根据点到平面的距离公式可得出平分面的轨迹方程．

解　设所求平面上任意点的坐标为 (x, y, z)，则由该点到两已知平面的距离应相等，可得

$$\frac{|x-2y+2z+21|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|7x+24z-5|}{\sqrt{7^2+24^2}}$$

由上述方程解得

$$\pi_1:\ 46x+50y+122z+510=0 \text{ 及 } \pi_2:\ 4x-50y-22z+540=0,$$

化简得

$$\pi_1:\ 23x-25y+61z+255=0 \text{ 及 } \pi_2:\ 2x-25y-11z+270=0.$$

思考 若两平面的方程为 π_1：$2x-y+2z+21=0$，π_2：$7y+24z-5=0$，结果如何？为 π_1：$2x-2y+z+21=0$，π_2：$7x+24y-5=0$ 呢？

第六节 空间直线及其方程

一、教学目标

了解空间直线的一般方程的概念，掌握空间直线的对称式方程、参数方程，会直线三种形式的方程之间的互化．了解两直线夹角的概念，会求两直线间的夹角；掌握两直线相互平行、相互垂直的判断．了解直线与平面间夹角的概念，会求直线与平面间的夹角，掌握直线与平面相互平行、相互垂直的判断．

二、考点题型

直线一般方程、对称式方程和参数方程的求解*和各种方程间的互化；两直线间的夹角、直线与平面间的夹角的求解；直线与平面相互平行、相互垂直的判断*．

三、例题分析

例 8.6.1 求直线$\begin{cases}x-y+z+5=0\\3x-8y+4z+36=0\end{cases}$的对称式方程和参数方程．

分析 关键是求出直线的方向向量和直线上一点．由于直线的方向向量垂直于已知的两个平面的方向量，故利用向量积可求出直线的方向向量．

解 两已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,\ -1,\ 1)$，$\boldsymbol{n}_2=(3,\ -8,\ 4)$，故取直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -1 & 1\\3 & -8 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}.$$

又令 $x=0$，代入直线方程，解得 $y=4$，$z=-1$，即 $(0,\ 4,\ -1)$ 为直线上的一点．故直线的对称式方程为

$$\frac{x}{4}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-5};$$

再令 $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-5}=t$，即得直线的参数方程 $\begin{cases}x=4t\\y=4-t\\z=-1-5t\end{cases}$．

思考 (i) 在已知直线上取其它的点，求该直线的对称式方程和参数方程；(ii) 直线的对称式方程和参数方程与所取的直线上的点是否有关？同一直线不同点的对称式方程或参数方程是否等价？(iii) 直线的对称式方程和参数方程与所取的直线的方向向量是否有关？