高等教育规划教材

离散数学及其应用

汪荣贵　王晓华　杨　娟　李书杰　编著

提供电子教案

下载网址 http://www.cmpedu.com

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等教育规划教材

离散数学及其应用

汪荣贵 王晓华 杨 娟 李书杰 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书全面系统地介绍了离散数学的基本理论与应用技术，内容主要包括集合与关系理论、组合计算方法与应用、整数与算法设计知识、数理逻辑演算与推理、图模型的基本理论与算法、抽象代数的基础知识等。本书注重知识的应用性、表达的可读性和体系的完备性，将分布在不同数学分支的离散数学知识点进行凝练和优化，形成一套相对完备的离散数学知识体系，并且在每个章节穿插丰富的应用实例，使得读者在学习离散数学理论知识的同时，还能比较系统地掌握离散数学的应用知识。本书用通俗易懂的语言深入浅出地表达知识内容，着重突出数学概念和定理的思想、本质，而不仅仅是形式化描述，使得广大读者能够通过自己的努力就可以不太困难地掌握离散数学的内容。另外，每章均配有一定数量的习题，供读者练习。

本书内容丰富、思路清晰、实例讲解详细、图例直观形象，适合作为计算机及相关专业的本科生教材，也可供工程技术人员和自学读者学习参考。

本书配套授课电子课件，需要的教师可登录 www. cmpedu. com 免费注册，审核通过后下载，或联系编辑索取（QQ：2850823885，电话：010－88379739）。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及其应用／汪荣贵等编著．—北京：机械工业出版社，2017.7
高等教育规划教材
ISBN 978-7-111-57520-7

Ⅰ．①离…　Ⅱ．①汪…　Ⅲ．①离散数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 173841 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郝建伟　　责任编辑：郝建伟　李　乐
责任校对：张艳霞　　责任印制：常天培
涿州市京南印刷厂印刷

2017 年 8 月第 1 版 · 第 1 次印刷
184mm × 260mm · 25.25 印张 · 618 千字
0001－3000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-57520-7
定价：66.00 元

出版说明

当前，我国正处在加快转变经济发展方式、推动产业转型升级的关键时期。为产业转型升级提供高层次人才，是高等院校最重要的历史使命和战略任务之一。高等教育要培养基础性、学术型人才，但更重要的是加大力度培养多层次、多样化的应用型、复合型人才。

为顺应高等教育迅猛发展的趋势，配合高等院校的教学改革，满足各院校对高质量教材的迫切需求，机械工业出版社邀请了全国多所高等院校的专家、一线教师及教务部门，通过充分的调研和讨论，针对相关课程的特点，总结教学中的实践经验，组织出版了这套“高等教育规划教材”。

本套教材具有以下特点：

1）符合高等院校的人才培养目标及课程体系设置，注重培养学生的应用能力，加大案例篇幅或实训内容，强调知识、能力与素质的综合训练。

2）针对多数学生的学习特点，采用通俗易懂的方法讲解知识，逻辑性强、层次分明、叙述准确而精炼、图文并茂，使学生可以快速掌握，学以致用。

3）凝结一线骨干教师的课程改革和教学研究成果，融合先进的教学理念，在教学内容和方法上做出创新。

4）为了体现建设“立体化”精品教材的宗旨，本套教材为主干课程配备了电子教案、学习与上机指导、习题解答、源代码或源程序、教学大纲、课程设计和毕业设计指导等资源。

5）注重教材的实用性、通用性，适合各类高等院校、高等职业学校及相关院校的教学，也可作为各类培训班教材和自学用书。

欢迎教育界的专家和老师提出宝贵的意见和建议。衷心感谢广大教育工作者和读者的支持与帮助！

机械工业出版社

前　言

一般来说，科学技术的专业研究或研发需要解决如下四个层次的基本问题：首先，要有一个基本的思想或创意；其次，建立一套基本理论支撑这个思想或创意；再次，用相关的数学理论或模型来量化表示、分析这套理论；最后，根据数学理论或数学模型实现对若干理论问题的求解，实现想法或创意。比如说，希望人类能像鸟儿一样在天上飞翔。这就是一个想法，从专业角度看，要实现这个想法就必须建立一套空气动力学理论来论证该想法的合理性、可行性，使用数学方法实现对该理论的定量分析并探索问题的求解方案。具体地说，就是建立若干代数方程或微分方程实现对该理论的数学建模，并通过求解这些方程探索飞行器设计与制造问题的求解方案。因此，任何一门科学技术专业都有一套与之紧密相关的数学理论为其提供坚实的基础和定量分析工具。

我们知道，18 世纪机械工业革命的核心技术物理学、力学取得了巨大进步，而支撑物理学、力学巨大进步的基础正是微积分的发明和发展。如今，我们已经进入信息社会，信息社会的核心是计算机科学与技术。那么，作为能够有效支撑物理学的微积分是否能有效支撑计算机科学与技术呢？很遗憾，答案是否定的。微积分虽然能够解决计算机与信息科学的部分问题，但是不足以完全支撑整个计算机与信息科学。因为计算机系统本质上是一种离散系统，只能进行有限次计算或信息处理，而且要求所用求解方法必须是满足规定处理效率的构造性方法。然而，微积分以极限或无限为基础，在很多方面难以满足计算机问题求解的需要。因此，对于计算机相关专业的学生来说，除了要学好微积分等现有工科数学之外，还必须牢固掌握与计算机专业技术紧密相关的计算机专业数学。

由于计算机是一种离散系统，处理对象是离散量或离散化的连续量。因此，通常将计算机专业数学称为离散数学。离散数学包含了人类在创造、运用和研究计算机过程中所使用的基本数学方法和数学思想，以及与这些数学问题相关的基础知识。可以这样说，正如微积分支撑了作为近代工业文明基础的物理学，离散数学支撑了作为现代信息社会基础的计算机科学与技术。事实上，学好离散数学不仅可以为计算机后续几乎所有软硬件专业课程奠定必需的入门知识基础，而且能够培养出良好的逻辑思维、算法思维和抽象思维能力，为计算机科学技术的理论研究和应用开发打下一个坚实的数学理论基础。

离散数学是一门综合数学学科，主要包括集合论、数理逻辑、图论、数论、组合分析、代数结构六个数学分支，分别从不同角度出发研究各种离散数学结构、分析离散量之间数与形的关系，以充分满足计算机相关学科对离散量进行表示和处理的数学需求。离散数学所含知识内容广泛，涉及多个不同的数学分支和思维方式，为广大初学者学习和掌握离散数学知识带来一定困难。为此，编者编写了这本离散数学教程，以较好地满足广大读者系统地学习和掌握离散数学知识的需要。关于本书的编写，编者着重考虑如下三个要点：

第一，强调应用性。一项知识有了具体的应用，大家自然会感兴趣，兴趣是最好的老师和学习动力。因此，本书在每个章节穿插丰富的应用实例，使得读者在学习离散数学理论知识的同时，还能够系统地掌握离散数学的应用知识。

第二，强调可读性。本书站在本科生低年级的思维角度进行编写，在保证表达准确的前提

下，尽可能用通俗易懂的语言深入浅出地介绍离散数学，着重突出数学概念和定理的思想、本质，而不仅仅是形式化描述，使得广大读者能够通过自己的努力就可以不太困难地掌握离散数学的基本理论和应用知识。

第三，强调完备性。本书旨在为整个计算机学科提供一套相对完备的基本数学理论，涵盖集合论、数理逻辑、图论、数论、组合分析、代数结构全部六个数学分支的基本内容，通过对相关知识点的凝练和结构优化，使得这六部分内容形成一个完备统一的整体。

全书内容一共分为十章和附录：

第 1 章和第 2 章是全书最基础的知识。第 1 章主要介绍集合、自然数与组合计数的初步知识；第 2 章将自然数集合这种最基本的离散结构扩展到整数集合，考察整数的基本理论，并以整数算法为切入点讨论算法的基本知识和设计策略。

第 3 章和第 4 章介绍数理逻辑的基本知识，为后续内容提供逻辑表达和处理工具。第 3 章主要介绍命题逻辑演算与推理；第 4 章则是将数理逻辑由命题判断的层次进一步推进到更为精细复杂的概念层次，考察基于概念演算的谓词逻辑。

随后的连续三章介绍关系的基本理论与应用。第 5 章从集合的角度介绍关系的数学模型，包括关系的基本概念、运算和性质；第 6 章主要介绍等价、相容和偏序这三种特殊关系的数学模型与性质；第 7 章主要从关系的角度考察函数与映射的概念，可以看成是关系理论的一种应用。其实，关系理论是整个离散数学知识体系的枢纽，一头联系集合论，另一头联系图论，同时关系数学模型的表达和演算还可以看成是谓词逻辑的一个直接应用。

第 8、9、10 章则是从二元关系的角度介绍和讨论图模型的基本理论与应用。第 8 章介绍图模型的基本知识与算法；第 9 章介绍树模型的基本知识与算法；第 10 章介绍若干特殊图模型的基本知识与算法，包括欧拉图、哈密顿图、二分图、平面图、网络流图。

附录 A 通过二维码形式介绍抽象代数结构的基本知识，读者也可以通过下列网址下载这部分内容的电子文档：http://pan.baidu.com/s/1pL3Cmuf。

本书读者对象为计算机科学与技术专业、软件工程专业、信息安全专业、物联网专业、电子信息工程专业、自动化专业、信息与计算科学专业的本科生和低年级研究生，以及相关专业的广大科技工作者。

感谢研究生谢云飞、孙伟、曹浩宇、刘雷雷、钟欣、汪庆辉、张永刚、江迪、陈龙、俞鹏飞、姚旭晨、李文静、郑岩，以及本科生徐玲、耿晶晶、许超婷、张舒梅、熊少昆等同学提供的帮助，感谢合肥工业大学计算机与信息学院的大力支持。

由于时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请读者不吝指正！

编　者

目　录

第1章 集合与计数基础

离散数学以各种离散量的概念、关系、结构和运算性质为研究对象，以充分满足计算机相关学科对离散量进行表示和处理的数学需求。正如微积分支撑了作为近代工业文明基础的物理学，离散数学支撑了作为现代信息社会基础的计算机科学与技术。事实上，离散数学是一门综合的数学学科，由多个数学分支组成，包括集合论、数理逻辑、图论、数论、组合分析、代数结构等，分别从不同角度出发研究各种离散量之间数与形的关系。本章比较系统地介绍了集合论与计数的基础内容，它们是学习离散数学各个分支所必备的入门知识。尽管读者可能已经从其他途径获悉其中某些概念，但是要想掌握作为支撑整个计算机学科基石的离散数学，就必须重新审视和系统地学习这些入门知识。

1.1 集合的基本知识

集合论是整个数学的基础和出发点，当然也是离散数学的基础和出发点，要学好离散数学，首先必须学习集合论的有关知识。学习集合论还有一个非常重要的原因，那就是计算机的各个领域都与集合论有着极其密切的关系。因为集合不仅可以表示数值信息，而且还可表示和处理各种非数值信息，例如对各种数据的增删查改、对数据之间关系的描述等，甚至可以让这些数据信息像数值一样进行运算。在本节，我们将学习集合论的基本知识，包括数学危机与集合论的由来、集合的概念与表示、集合的基本运算及运算性质等。

1.1.1 数学危机与集合论

众所周知，数学是整个自然科学体系的基础，人们对自然界的认识结论一般需要通过数学演算或数学证明来保证其正确性。打铁还需自身硬，从理论上说，数学既然能够作为一种可以鉴别认识结论真伪的基本工具，那么其自身就不应该有任何错误或矛盾。但实际情况并没有这么简单，千百年来陆续出现的希帕索斯悖论、贝克莱悖论、理发师悖论，使得数学理论的正确性面临一次又一次严峻挑战，历史上称之为“数学危机”。为拯救数学于危机之中，捍卫数学理论的正确性，无数杰出科学家做了大量深入系统的研究工作。直到在19世纪初，柯西、魏尔斯特拉斯等数学家通过创立极限理论，终于解决了希帕索斯悖论、贝克莱悖论，为实数理论和微积分的正确性奠定了坚实的基础。

但是，极限理论在逻辑上还有需要完善的地方。因为极限概念由自然数定义，要保证极限理论的正确性，首先必须要保证自然数概念及相关理论的正确性。虽然自然数是大家熟知且常用的一个基本概念，大家从小学就开始学习自然数的计数和运算，但是对自然数概念的理解主要还是依靠经验。为保证极限理论的正确性，必须对自然数进行正式的数学定义。数学家冯·诺依曼用集合的方式定义了自然数并取得成功。由此，对整个数学理论体系正确性和无矛盾性的论证就转化为对集合论的正确性和无矛盾性的论证，集合论成为整个数学大厦的根基。尽管罗素提出的理发师悖论指出了集合论的局限性，一度动摇了这个根基，但是有惊无险，策梅洛提出的公理化集合论有效解决了理发师悖论问题，不仅稳定了数学根基，而且进一步确立

了集合论在整个数学大厦中的基础地位。集合论被誉为19世纪最伟大的数学成就，集合论的创始人康托尔被誉为整个19世纪最伟大的数学家。

1.1.2 集合的概念与表示

集合论从一个比数更加基本的概念——集合出发，定义数和数的运算，进而演化出整个数学学科的理论体系。本节将从集合的基本概念出发，介绍集合论中最为基础的知识，包括集合的概念、元素的概念与性质、集合的表示方法、集合之间的相等与包含关系、若干常用的特殊集合等。

一、集合与元素的概念

我们知道，如果要定义一个概念，必须要使用其他概念。例如，在“边长相等的三角形是等边三角形”这个定义中，就要用到边长、相等、三角形等概念。而要定义其他概念就必须使用另外的其他概念，而且不能循环使用。如此下去，必然会存在一些最原始的概念作为一切概念的出发点，只能使用这些原始概念来定义其他概念而不能用其他概念来定义这些原始概念。也就是说，这些原始概念的含义是不言自明的，只能通过其他概念去理解或解释其含义，而不能对其下严格的定义。例如，几何学中的点、线、面的概念就是原始概念，我们都知道这些概念的具体含义，但它们是没有定义的。

集合就是这样一种没有定义的原始概念，我们可对其含义进行如下描述或理解：

所谓**集合**，就是在指定范围内满足给定条件、能相互区分的所有对象构成的总体，集合中每个对象称为该集合的**元素**。

【例题 1.1】 判断“合肥工业大学计算机专业所有学生”是否为一个集合。

【分析】“合肥工业大学计算机专业”是指定范围，“所有学生”是所有对象，合肥工业大学计算机专业每个学生都是集合中元素，但是其他专业学生都不是该集合中元素，故符合集合的含义。

【解】“合肥工业大学计算机专业所有学生”是一个集合。□

集合的含义非常广泛，集合的例子比比皆是，例如下面4条语句描述的都是集合：

（1）硬币有两面——正面和反面，“正面、反面”构成一集合。

（2）计算机内存的全体单元构成一集合。

（3）所有三角形构成的三角形集合。

（4）所有正整数构成的集合。

根据集合概念的上述解释，不难看出元素与集合之间的归属关系是明确的：对于任意一个集合和任意一个对象，该对象要么属于这个集合，要么不属于这个集合，两者必居其一且仅居其一。除此之外，还可看出集合中每个元素必须满足如下3条基本性质：

（1）**互异性**：集合中的每个元素都是互不相同的，凡是相同的元素都视为同一元素。例如：集合$\{5,5,6\}$应该理解为$\{5,6\}$。

（2）**可分性**：集合中的每个元素都是可以明确加以区分的对象。

（3）**无序性**：集合中的元素之间是没有次序的。例如：$\{5,6\}$和$\{6,5\}$应视为同一集合。

通常用带下标或不带下标的大写英文字母A，B，C，…表示集合，用带下标或不带下标的小写英文字母x，y，z，…表示集合中的对象或元素。

【定义 1.1】 对于任意一个对象x和任意一个集合A，当对象x是集合A中元素时，称x**属于**A，记为$x \in A$；当对象x不是集合A中元素时，称x**不属于**A，记为$x \notin A$。

【例题 1.2】（理发师悖论）某个孤岛上住着一些人家，岛上只有一位理发师。该理发师给且仅给那些不给自己理发的人理发。那么就有一个问题：谁给这位理发师理发？

【分析】对于理发师，若他不给自己理发，则属于“不给自己理发的人”，他就要给自己理发；若他给自己理发，则又属于“给自己理发的人”，他就不能给自己理发。由此产生理发师悖论。理发师悖论曾使集合论产生危机。

【解】设 $C=\{x \mid x$ 是不给自己理发的人$\}$，b 是这位理发师，则有

若 $b \in C$，则 $b \notin C$；若 $b \notin C$，则 $b \in C$。□

理发师悖论产生的原因是集合的定义不受限制。经过研究发现如果允许将集合作为其自身的元素，则会产生一些矛盾或悖论。因此，德国数学家康托尔之后创立的许多公理化集合论都直接或间接地限制集合成为它自己的元素，有效地避免了理发师悖论。

二、集合的表示方法

集合的表示方法主要有枚举法、描述法、归纳法和文氏图法。

1. 枚举法

所谓枚举法，就是列出集合中所有元素或者可以看出元素变化规律的部分元素。对于一个集合，如果该集合中仅含个数较少的有限个元素，或者集合中元素之间有明显关系时，通常使用枚举法表示该集合。

【例题 1.3】指出下列集合的表示方法：

（1）$A=\{1,2,3,4\}$；（2）$B=\{a,0,\text{China}\}$；（3）$C=\{1,2,3,\cdots,99\}$。

【分析】（1）集合 A 中共含有 4 个元素，表示小于 5 的正整数集合，用枚举法表示；（2）虽然集合常用来表示一组具有相同性质的元素，但有的集合中的元素可以看起来毫不相关，集合 B 共含有 3 个元素，采用枚举法将其全部列出；（3）集合 C 表示小于 100 的正整数集合，当集合中元素存在明显变化规律时，可列出部分元素，其余用省略号表示，也是枚举法。

【解】（1）、（2）、（3）的表示方法都是枚举法。□

枚举法表示的是集合的外延，是一种显式表示方法，具有直观性强、易于理解等优点。但对于元素数目较多的集合，枚举法显然不是一种有效方法，甚至不可行。从计算机的角度看，如果一次性将大量数据输入计算机，将占据大量内存。因此，有时需要使用描述法、归纳法等其他方式来表示集合。

2. 描述法

所谓描述法，就是通过描述集合中元素所具备的某种特性来表示集合。通常用数学符号表示集合中的任意元素都具有性质 P。集合描述法表示的具体形式为

$$A=\{x \mid P(x)\} \tag{1-1}$$

式中，符号 $P(x)$ 表示元素 x 具有性质 P。

【例题 1.4】指出下列集合的表示方法：

（1）$A=\{x \mid x$ 是小于 5 的正整数$\}$；　　（2）$B=\{x \in \mathrm{Z}_+ \mid x<100\}$；

（3）$C=\{x \in \mathrm{R} \mid x=p/q,p,q$ 为正整数$\}$；（4）$D=\{x \mid x$ 是实数$,x^2+1=0\}$。

【分析】（1）集合 A 表示小于 5 的正整数集合；（2）集合 B 指定正整数集合的一个范围，表示小于 100 的正整数；（3）集合 C 表示所有正有理数集合，无法给出集合所有元素；（4）方程 $x^2+1=0$ 无实数解，因此集合 D 中没有元素。

【解】（1）~（4）均通过描述集合中元素性质来表示集合，因此都是描述法。□

描述法表示的是集合的内涵，是一种隐式表示方法，表达内容具有一定的抽象性和普适

性。描述法的优点是不需要列出集合中的全部元素，只需给出集合中元素的描述特性。因此，描述法的表达能力很强，既可表示有限集合，也可表示无限集合。

3. 归纳法

归纳法是一种基于构造策略的集合表示方法。该方法通过定义一些规则把集合构造出来，由此实现对集合的表示。具体的构造规则通常由如下三部分组成：

（1）**基础部分**：确定集合中某些最基本的元素；

（2）**归纳部分**：确定由集合中已有元素构造出新元素的规则或方法；

（3）**边界部分**：确定集合在通过构造元素实现不断扩张的过程中不能超过的界限。

上述基础部分决定了该集合为非空集合并确定了集合的初始元素，归纳部分则根据集合中初始元素通过一定的规则或方法不断构造出新的元素，是集合不断扩张的过程，边界部分则是对集合的扩张进行限制，给出了集合的边界，由此构成一个具有确定边界的集合。

总之，基础部分和归纳部分确定了集合中至少包含哪些元素，边界部分则是确定了集合中最多包含哪些元素。

集合归纳法的构造性特点非常适合用计算机进行处理，在计算机相关领域得到广泛应用。在后续内容中，我们将会看到，通过用归纳法构造集合的方式来定义一个概念或设计一个算法，在计算机相关领域是一件屡见不鲜的事情。

【例题 1.5】 集合 A 按如下方式定义，试指出其定义方式。

（1）2 是 A 中的元素。

（2）如果 a 是 A 中的元素，则 $2a$ 也是 A 中的元素。

（3）有限次使用（1）、（2）后所得到的字符串都是 A 中的元素。

【分析】（1）指出了集合中的基本元素 2；（2）给出了由 2 构造新元素的方法如 4，8，16，32 等都是由 2 构造的集合 A 中的新元素；（3）指出了集合扩张的界限。

【解】 集合 A 的定义方式是归纳法。□

再看一个例子：

【例题 1.6】 集合 A 按如下方式定义，试指出其定义方式。

（1）0 和 1 都是 A 中的元素。

（2）如果 a，b 是 A 中的元素，则 ab、ba 也是 A 中的元素。

（3）有限次使用（1）、（2）后所得到的字符串都是 A 中的元素。

【分析】（1）指出了集合中的基本元素是 0 和 1；（2）给出了由 0 和 1 构造新元素的方法，如 00，01，11 等都是由 0 和 1 构造的集合 A 中的新元素；（3）指出了集合 A 的界限。

【解】 显然（1）是基础部分，（2）是归纳部分，（3）是边界部分，符合集合归纳法的标准，所以集合 A 的定义方式是归纳法。□

4. 文氏图法

文氏图（或称维恩图）以英国数学家维恩的名字命名。维恩在 1881 年介绍了这种图的使用方法。文氏图用长方形表示全集，用长方形内部的圆或其他几何图形表示普通集合。文氏图常用于形象地表示集合之间的关系。

【例题 1.7】 设 U 为 26 个英文字母，$A=\{a,b,c,d,e\}$，画出 A 的文氏图。

【分析】 如图 1–1 所示，画一个长方形表示全集 U，也就是所有英文字母的集合。在长方形中画一个圆表示集合 A。

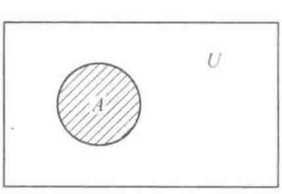

图 1–1 集合 A 的文氏图

【解】$A=\{a,b,c,d,e\}$ 的文氏图如图 1-1 所示。□

三、集合与集合的关系

如前所述，集合中凡是相同的元素都看成是同一个元素，而且集合中元素之间的排列次序也不加区分，或者说是无序的。如此一来，集合就完全取决于集合中的元素。换句话说，对于任意两个集合，如果这两个集合中具有完全相同的元素，那么这两个集合就是完全一样的。或者说，这两个集合是相等的。于是得到如下关于集合相等的外延性原理：

【定理 1.1】（外延性原理）对于任意的集合 A 和集合 B，**A 与 B 相等**当且仅当两者具有相同元素；或者说，**A 与 B 相等**当且仅当 A 中每个元素都属于 B 且 B 中每个元素都属于 A。如果集合 A 与集合 B 相等，则记为 $A=B$；否则，记为 $A\neq B$。

【例题 1.8】设 $A=\{x\mid(x-1)(x-2)=0,\ x\in\mathrm{R}\}$，$B=\{x\mid x\in\mathrm{Z}^{+}$ 且 $x^2\leqslant4\}$，试指出集合 A 和集合 B 中的元素，并判断集合 A 和集合 B 的关系。

【分析】满足 $(x-1)(x-2)=0$ 的 x 值为 1，2，因此 $A=\{1,2\}$；满足 $x^2\leqslant4$ 的正整数的 x 值为 1，2，因此 $B=\{1,2\}$。

【解】$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2\}$。集合 A 和集合 B 中的元素都相同，故这两个集合相等。□

【定理 1.2】集合的相等关系具有如下三条基本性质：

（1）**自反性**：对于任意给定的集合 A，成立 $A=A$；

（2）**对称性**：对于任意给定的两个集合 A 和 B，若有 $A=B$，则有 $B=A$；

（3）**传递性**：对于任意三个集合 A，B，C，若有 $A=B$ 且 $B=C$，则有 $A=C$。

【证明】显然。□

【例题 1.9】设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,1,3\}$，$C=\{2,1,3\}$，试判断它们之间的关系。

【分析】集合 A 和集合 B 含有完全相同的元素，只是顺序不同，根据集合的无序性，可知集合 A 与集合 B 相等；集合 C 与集合 A 所包含的元素不完全相同，故 $A\neq C$，同理 $B\neq C$。

【解】$A=B$，$A\neq C$，$B\neq C$。□

由例题 1.9 可以看出，集合 C 中的每个元素都是集合 A 中的元素，此时 A 完全包含了 C，可将 C 看成是 A 的一个部分，由此得到如下集合的包含关系和子集的概念：

【定义 1.2】对于任意两个集合 A 和 B，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B **包含于** A（或 A **包含** B），记为 $B\subseteq A$，亦称 **B 是 A 的子集**，称符号 $\subseteq$ 为集合之间的**包含关系**。如果 B 不能被 A 所包含，则称 **B 不是 A 的子集**，记为 $B\nsubseteq A$。

【定理 1.3】集合的包含关系具有如下三条基本性质：

（1）**自反性**：对于任意给定的集合 A，$A\subseteq A$ 都成立；

（2）**反对称性**：对于任意两个集合 A 和 B，$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$；

（3）**传递性**：对于任意三个集合 A，B，C，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

【证明】显然。□

【例题 1.10】设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{1,2\}$，$D=\{1,2\}$。判断 A，B，C，D 之间的包含关系。

【分析】集合 B，C，D 中所有元素都是集合 A 的元素，集合 C 和集合 D 中元素相同。根据子集的定义有 $B\subseteq A$，$C\subseteq A$，$D\subseteq A$，$C\subseteq D$，$D\subseteq C$。

【解】A，B、C，D 之间的包含关系为 $B\subseteq A$，$C\subseteq A$，$D\subseteq A$，$C\subseteq D$，$D\subseteq C$。□

【定义 1.3】对于任意两个集合 A 和 B，如果 $B\subseteq A$ 且 $A\neq B$，则称 B 是 A 的**真子集**，记为 $B\subset A$，并称符号 $\subset$ 为集合之间的**真包含关系**。

【例题 1.11】判断下列集合之间是否具有真包含关系：

（1）$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$；（2）$C=\{a,b,c\}$，$D=\{a,b,c\}$；

（3）$E=\{a\}$，$F=\{\{a\}\}$，$P=\{\{\{a\}\}\}$，$Q=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$。

【分析】（1）集合 A 的元素都是集合 B 的元素，但集合 B 中存在元素 d 不是 A 中的元素。根据真子集的定义，集合 A 是集合 B 的真子集。（2）集合 C 的元素都是集合 D 的元素，但集合 D 中不存在元素不是 C 中的元素。根据真子集的定义，集合 C 不是集合 D 的真子集，集合 D 也不是集合 C 的真子集。（3）集合 E 的元素都是集合 Q 中的元素，但集合 Q 中的元素 $\{a\}$ 和 $\{\{a\}\}$ 不是集合 E 中的元素；集合 F 的元素都是集合 Q 中的元素，但集合 Q 中的元素 $\{\{a\}\}$ 和 a 不是集合 E 中的元素；集合 P 的元素都是集合 Q 中的元素，但集合 Q 中的元素 $\{a\}$ 和 a 不是集合 E 中的元素。根据真子集的定义，集合 E，F，P 是 Q 的真子集。

【解】（1）$A\subset B$；（2）$C\not\subset D, D\not\subset C$；（3）$E\subset Q$，$F\subset Q, P\subset Q$。□

四、常用的特殊集合

集合论中有一些非常重要和常用的特殊集合，它们分别具有一些特殊性质。离散数学中很多基本概念的定义及其性质讨论都离不开它们。下面具体介绍这些特殊集合的基本概念及性质，包括空集、全集、有限集、无限集、子集、幂集等。

1. 空集与全集

通常将不包含任何元素的集合定义为空集，即有

【定义 1.4】不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

【例题 1.12】设 $A=\{x \mid x\in \mathrm{R}$ 且$x^2<0\}$，判断 A 中是否包含元素，是否为空集。

【分析】$x^2<0$ 无解，所以 A 是空集。

【解】A 中没有任何元素，是空集。□

下面的定理表明了空集的两个基本性质，即最小性和唯一性。

【定理 1.4】空集是一切集合的子集并且是绝对唯一的。

【分析】可以用反证法进行证明。

【证明】首先证明空集是一切集合的子集，用反证法。假设存在某个集合 A，空集$\varnothing$不是 A 的子集，那么必然至少存在一个元素 x，满足：$x\in\varnothing$ 但 $x\notin A$。这与空集的定义矛盾，假设不成立，故空集是一切集合的子集。

再证空集的唯一性，用反证法。假设存在两个不同的空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，由于空集是一切集合的子集，故有：$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$且$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$。由定理 1.3 可知，必有$\varnothing_1=\varnothing_2$。与假设矛盾！因此，空集必然是唯一的。□

【例题 1.13】判断下列结论的对错：

（1）$\varnothing\subseteq\varnothing$；（2）$\varnothing\in\varnothing$；（3）$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；（4）$\varnothing\in\{\varnothing\}$。

【分析】因为空集是任一元素的子集，所以（1）和（3）对，（4）中把$\varnothing$看成一个元素，所以（4）对。因为空集不含任何元素，所以（2）错。

【解】（1）、（3）、（4）均为对，（2）为错。□

在日常生活和实际工作中，对任何一个问题的讨论和处理一般都是在一个相对固定的范围之内。这个范围构成了问题讨论的默认论域或背景，由此得到如下全集的概念：

【定义 1.5】相对固定范围之内所有元素组成的集合称为**全集**，通常用 U 表示。

在集合的文氏图表示法中，一般用矩形表示全集，圆形表示非全集集合。

对于每个具体的问题，默认论域或背景应当是唯一的，否则就会引起该问题在概念理解上

的歧义和混乱。但是，对于不同的问题，通常具有与之相应的不同默认论域或背景，因而具有与之相应的不同全集。因此，全集是相对唯一的。

2. 有限集与无限集

在集合的理论研究和实际应用中，经常需要对集合中元素的数量规模进行度量，由此得到集合基数的概念，具体定义如下：

【定义 1.6】 对于任意集合 A，A 中所含元素的个数称为 A 的**基数**，记为 $|A|$。

【例题 1.14】 求下列集合的基数：

（1）$A=\varnothing$；（2）$B=\{\varnothing\}$；（3）$C=\{a,b,c\}$；（4）$D=\{a,\{b,c\}\}$。

【分析】（1）A 中不包含任何元素，$|A|=0$；（2）B 中包含一个元素 $\varnothing$，$|B|=1$；（3）C 中包含三个元素 a,b,c，故 $|C|=3$；（4）D 中包含两个元素 $a,\{b,c\}$，故 $|D|=2$。

【解】 $|A|=0$；$|B|=1$；$|C|=3$；$|D|=2$。□

根据集合基数的概念，可以得到如下有限集和无限集的定义：

【定义 1.7】 对于任意给定的集合 A，如果它的基数是一个有限数，则称该集合是一个**有限集**，否则称之为**无限集**。

有限集中元素的个数是有限的，无限集中元素的个数是无限的。无论从概念上还是方法上看，有限集和无限集的规模度量或计数都有着本质上的区别，我们将在后续相关内容中对此做具体介绍和分析。

3. 有限子集与幂集

对于有限集，我们可以构造出相关的子集并对子集进行计数，具体定义如下：

【定义 1.8】 设 A 是任一有限集，若 A 中含有 n 个元素，即有 $|A|=n$，则称 A 为 n 元集合。对于 A 的任意一个子集 B，若 B 中含有 m 个元素，则称 B 为 A 的 m 元子集。

【例题 1.15】 设 $A=\{1,2,3\}$，求出 A 的全部 m 元子集。

【分析】 因为 $|A|=3$，所以 m 可取 0，1，2，3。用 $C(n,r)$ 表示从含有 n 个元素的集合中任意取出 r 个元素的组合数，则有：

当 $m=0$ 时，A 的 0 元子集：$\varnothing$，有 $C(3,0)=1$ 个；

当 $m=1$ 时，A 的 1 元子集：$\{1\},\{2\},\{3\}$，有 $C(3,1)=3$ 个；

当 $m=2$ 时，A 的 2 元子集：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$，有 $C(3,2)=3$ 个；

当 $m=3$ 时，A 的 3 元子集：$\{1, 2, 3\}$，有 $C(3,3)=1$ 个。

【解】 对于含有 3 个元素的集合 A，其全部 m 元子集一共有 8 个，即：$\varnothing$，$\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$。□

一般地，n 元集合 A 的 m（$0\leqslant m\leqslant n$）元子集共有 $C(n,m)$ 个，故其所有子集数为

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n-1)+C(n,n)=2^n \tag{1-2}$$

也就是说，n 元集合共有 2^n 个不同的子集。

事实上，对于任意一个集合 A，还可以将其每个子集分别作为一个元素构成一个新的集合，由此得到如下幂集的概念：

【定义 1.9】 假设 A 是任意一个给定的集合，以 A 的所有不同子集为元素构成的集合称为 A 的**幂集**，记为 $P(A)$ 或 2^A，即有

$$P(A)=\{B\mid B\subseteq A\} \tag{1-3}$$

对于以集合作为元素的集合，亦即集合的集合，通常称之为**集族**。由此可知，幂集其实就是一种特殊的集族。

【例题 1.16】 若 $A=\{a,b,c\}$，求 A 的幂集。

【分析】 根据幂集的定义计算。另外，注意包含关系 $\subseteq$ 两边必须是集合，并且这两个集合的级别相同；属于关系左边是元素，右边是集合，两边级别不一样。

【解】 $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$。

【例题 1.17】 计算如下幂集：

(1) $P(\varnothing)$；(2) $P(\{\varnothing\})$；(3) $P(\{a,\{b,c\}\})$。

【分析】 (1) 由于 $|\varnothing|=0$，故 $\varnothing$ 仅有一个子集 $\varnothing$，即 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$。(2) (3) 分析类似。

【解】 (1) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$；(2) $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；(3) $P(\{a,\{b,c\}\})=\{\varnothing,\{a\},\{\{b,c\}\},\{a,\{b,c\}\}\}$。□

1.1.3 集合的基本运算

通过实数的加、减、乘、除、乘方、开方等各种运算，可由已有实数生成新的实数。事实上，从数学方法论的角度来看，运算是一种非常基本的数学手段。对于任何一个数学概念，在确定其内涵之后，我们总是通过构造概念运算的方式产生新的概念，代数式通过运算可以产生新的代数式、函数通过运算可以产生新的函数、命题通过运算可以产生新的命题、矩阵通过运算可以产生新的矩阵等。对集合的学习和探讨也是如此，在掌握集合的基本概念之后，下面进一步学习集合的基本运算及其性质，通过运算机制从已有集合中构造出新的集合，具体包括交运算、并运算、差运算、补运算和对称差运算等。

1. 交运算与并运算

有时候需要将两个集合中的元素合并起来构成一个新的集合，由此得到集合并运算的概念；有时需要将两个集合中的共同部分取出来构成一个新的集合，由此得到集合交运算的概念。这两个运算的具体定义如下：

【定义 1.10】 对于任意两个集合 A 和 B，$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或者 $x\in B\}$ 称为 A 和 B **并集**，亦称 $A\cup B$ 为集合 A 和 B 的**并运算**；$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 和 B 交集，亦称 $A\cap B$ 为集合 A 和 B 的**交运算**。

由上述定义可知，对于任意两个集合 A 和 B，两者并运算的结果产生一个新集合，该集合是由 A 和 B 中元素合并而成，如图 1-2a 所示；两者交运算的结果产生另外一个新集合，该集合由 A 和 B 的共同部分组成，或者说由同时属于 A 和 B 的元素组成，如图 1-2b 所示。

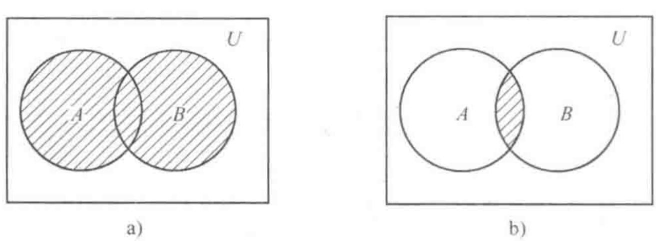

图 1-2 并、交运算的文氏图

a) 并运算的文氏图 b) 交运算的文氏图