"十三五"国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列

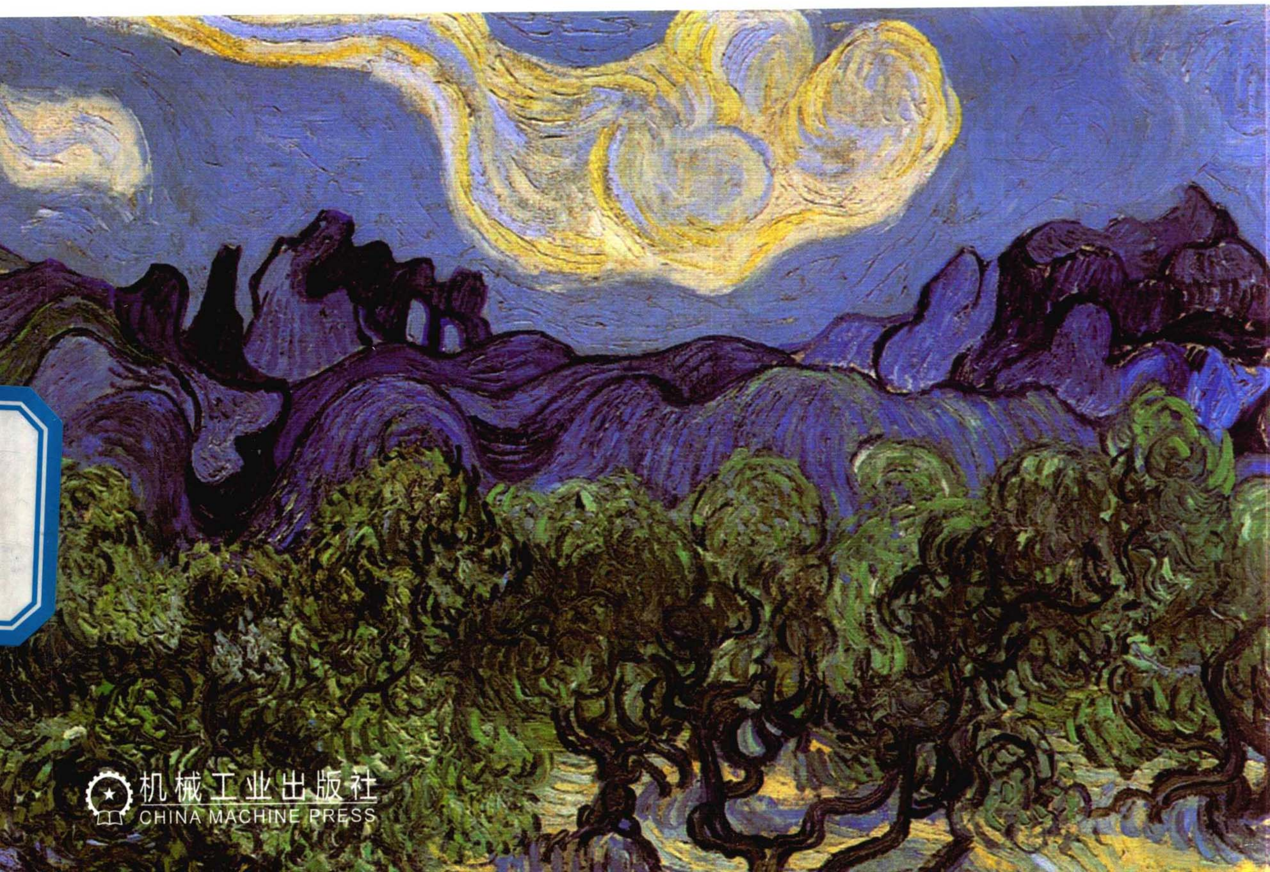
Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

北京市高等教育精品教材立项项目

数学规划及其应用

MATHEMATICAL PROGRAMMING AND ITS APPLICATIONS

范玉妹　徐尔　赵金玲　胡毅庆　编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
世界名校名家基础教育系列

北京市高等教育精品教材立项项目

数学规划及其应用

范玉妹　徐　尔
赵金玲　胡毅庆　编著

机械工业出版社

本书主要论述了线性规划、整数规划、非线性规划、多目标规划和动态规划等内容，并介绍了一些成功的应用实例和计算机应用过程. 为便于自学，各章后都附有习题.

本书可作为高等院校工科专业本科生及研究生的教学用书，也可供从事最优化研究与应用、现代技术和管理的科技人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

数学规划及其应用/范玉妹等编著. —北京：机械工业出版社，2017.12

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 世界名校名家基础教育系列

ISBN 978-7-111-58567-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①范… Ⅲ.①数学规划-高等学校-教材 Ⅳ.①O221

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 292659 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫

责任校对：王 延 封面设计：鞠 杨

责任印制：张 博

河北鑫兆源印刷有限公司印刷

2018 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 23.25 印张 · 565 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58567-1

定价：59.80 元

Preface

前 言

数学规划是运筹学的一个重要组成部分，它是近几十年里发展起来的一门新兴学科. 随着电子计算机的普及与发展，它在自然科学、社会科学、工程技术和现代管理中得到了广泛的应用，日益受到人们的重视.

本书分7章论述了数学规划的主要内容：线性规划、对偶理论、整数规划、无约束最优化问题、约束最优化问题、多目标规划、动态规划，最后一章则介绍了数学规划的一些成功应用实例. 本书是编者在为大学本科生和研究生讲授“运筹学”课程近20年的教学基础上经过修改和补充完成的.

我们在编写本书时力求深入浅出，通俗易懂，并列举了大量的实例. 只要具有高等数学、线性代数知识的读者都可以读懂. 在取材上，着重介绍了数学规划的基本理论和基本方法，并注意了这些理论和方法的应用. 对于一些较复杂的数学推导及证明，做了适量的删减. 在计算方法方面，着重介绍了适用面较广、使用方便、具有实效的方法，并力求反映先进成果. 鉴于目前计算机已成为运筹学应用中不可缺少的工具，本书特别注意对各种算法都给出了计算框图和算法步骤，使其更具实用的价值. 本书每章后面都附有习题，便于自学.

本书可作为大专院校工科各专业的教材，也可以作为研究生的教学参考书.

在本书出版之际，谨向曾经给予我们帮助指导的邓乃扬、诸梅芳教授表示衷心谢意.

由于编者水平所限，书中错误或不妥之处在所难免，敬请广大读者给予批评指正.

编 者

Contents

目　　录

第2章　对偶理论

第3章　整数规划

第4章　无约束最优化问题

第 5 章 约束最优化问题

第 6 章 多目标规划

第7章　动态规划

第8章　应用实例及计算机应用举例

部分习题答案

参考文献

第 0 章

绪 论

任何一门科学都不是突然诞生的，运筹学也不例外. 运筹学问题和朴素的运筹思想可追溯到古代，它和人类实践活动的各种决策并存，可以说自从有了人类，社会运筹学就已经存在. 但作为一个标记，应该说直到20世纪，并延续到20世纪30年代末和40年代初，在烽火硝烟的战争中，才正式诞生了运筹学. 我国运筹学和系统工程的老前辈、中国工程院院士许国志教授指出，运筹学有三个来源："军事、管理、经济". 这是一个非常科学的概括. 下面对运筹学早期发展中若干有代表性的工作作一简略介绍，这对学习本门课程是有益的.

0.1 运筹学的三个来源

0.1.1 军事

军事是运筹学的发源地之一，事实上，运筹学（Operational Research，简称 OR）的原意就叫作"作战研究". 我国古代的孙武就被美国军事学会在1984年出版的一本关于系统分析和模型的书中称为世界上第一个军事运筹学的实践家，孙武在他著名的《孙子兵法》中关于质的论断，渗透着深刻的量的分析，他指出："知之者胜，不知者不胜""知彼知己，百战不殆；不知彼而知己，一胜一负；不知彼不知己，每战必殆". 这些著名的论断都蕴涵着朴素的运筹学思想. 又比如家喻户晓的田忌赛马、围魏救赵、行军运粮等，都是我国早期的军事运筹问题和运筹学思想的例子. 同样，在国外，运筹学思想也可追溯到很早以前. 比如，阿基米德、列奥纳多·达·芬奇、伽利略都研究过作战问题，特别值得一提的是以下几个典型的代表性的工作.

0.1.1.1 *兰彻斯特方程*

F. W. 兰彻斯特（1868 ~ 1946 年）是一位学识渊博的英国学者，他在流体力学、作战模拟等领域都做出了出色的贡献. 19世纪90年代初，他研究飞行理论，1894年发表了关于飞行机翼产生升力的机理及相应计算方法的著名论文. 1916年，他的名著《战争中的飞行器，第四种武器的问世》在伦敦出版. 这本名著中汇集了他对飞机运行和空战方面的一系列研究，敏锐地抓住了飞机的出现及对作战方式带来的影响. 这一重要的问题当时尚处在朦胧状态而未被重视，而他却对此作了精辟的、超前的论述. 所以，美国军事学会认为，运筹学的发展从一开始就与兰彻斯特的名字联系在一起了. 该学会在约翰·霍普金斯大学建立了以兰彻斯特命名的奖学金，每年颁发一次，专门用来奖励最优秀的运筹学论文的作者. 兰彻斯特进行的研究与所获成果中，一个基本特征是使用数量化方法. 在"作战研究"的某些领域使用数量化方法进行分析的难度是很大的，但兰彻斯特却在这方面做了许多出色的工作，其代表性的成果之一就是作战分析中（优势、火力和胜负的动态关系）著名的兰彻斯特方程以及兰彻斯特对"纳尔逊秘诀"的分析. 应该说，不仅是其结果，而且还包括其理

念与方法论所产生的影响，至今仍有很大的价值.

0.1.1.2 鲍德西（Bawdsey）雷达站的研究

20 世纪 30 年代，德国内部民族沙文主义及纳粹主义日渐抬头，以希特勒为首的纳粹势力夺取了政权，开始为以战争扩充版图，以武力称霸世界的构思做战争准备. 当时欧洲上空战云密布，有远见的英国海军大臣丘吉尔认为英德之战不可避免，所以反对当时的主政者的“绥靖”政策，他在自己的权力范围内做着迎战德国的准备，其中最重要、最有成效之一者就是英国本土的防空准备：1935 年，英国科学家沃森·瓦特（R. Watson. Wart）发明了雷达，丘吉尔敏锐地意识到它的重要意义，并下令在英国东海岸的 Bawdsey 建立了一个秘密的雷达站. 当时，德国已拥有一支强大的空军，起飞 17 分钟即可到达英国. 在如此短的时间内，如何预防及做好拦截，甚至在本土之外或海上拦截德机，就成为一大难题，而雷达技术帮助了英国，因为即使在当时的演习中已经可以探测到 160 公里之外的飞机，但空防中仍有许多漏洞. 于是在 1939 年，以曼彻斯特大学物理学家、英国战斗机司令部文学顾问、战后获诺贝尔奖的 P. M. S. Blackett 教授（布莱克特）为首，组织了一个小组，代号为“Blackett 马戏团”，专门就改进空防系统进行研究. 这个小组成员包括三名心理学家、两名数学家、两名应用数学家、一名天文物理学家、一名普通物理学家、一名海军军官和一名陆军军官、一名测量人员，他们在研究中设计了将雷达信息传送给指挥系统及武器系统的最佳方式、雷达与防空武器的最佳配置等一系列的方案，从而大大提高了英国本土防空能力，在以后不久的对抗德国对英伦三岛的狂轰滥炸中发挥了极大的作用. 二战史专家评论说，如果没有这项技术和研究，英国就不可能赢得这场战争. “Blackett 马戏团”是世界上第一个运筹学小组，在他们就此项研究所写的秘密报告中，使用了“Operational Research”一词. 意指“作战研究”或“运用研究”，所以后人就以此作为运筹学的命名. 应该说，Bawdsey 雷达站的研究是运筹学的发祥和典范，因为此项研究的巨大实际价值、明确的目标、整体化的思想、数量化的分析、多学科的协同、最优化的结果以及简明朴素的表达，都展示了运筹学的本色与特色，是让人难以忘怀的.

0.1.1.3 Blackett（布莱克特）备忘录

1941 年 12 月，Blackett 以其巨大的声望，应盟国政府的要求写了一份题为“Scientists at the Operational Level”（作战位置上的科学家）的简短备忘录，建议在各大指挥部建立运筹学小组. 这个建议迅速被采纳. 据不完全统计，第二次世界大战期间，仅在英国、美国和加拿大，参加运筹学工作的科学家就超过 700 名. 1943 年 5 月，Blackett 写了第二份备忘录，题为“关于运筹学方法论某些方面的说明”，他写道：“运筹学的一个明显的特征，正如目前所实践的那样，是它具有或应该有强烈的实际性质. 它的目的是帮助找出一些方法，以改进正在进行中的或计划在未来进行的作战的效率. 为了达到这一目的，要研究过去的作战来明确事实，要得出一些理论来解释事实，最后，利用这些事实和理论对未来的作战作出预测”. 这些运筹学的早期的思想至今仍然有效.

0.1.1.4 大西洋战役

美国投入第二次世界大战后，吸收了大量科学家协助作战指挥. 1942 年，美国大西洋舰队反潜战官员 W. D. Baker（贝卡）舰长请求建立反潜战运筹组，麻省理工学院的物理学家 P. W. Morse（莫尔斯）被请来担任计划与监督 P. W. Morse 最出色的工作之一，是打破了德国对英吉利海峡的海上封锁. 1941 ~ 1942 年，德国潜艇严密封锁了英吉利海峡，企图切

断英国的“生命线”. 英国海军数次反封锁均不成功. Morse 小组经过多方实地调查，提出了两条重要的意见：

（1）将反潜攻击由反潜舰艇投放水雷，改为飞机投放深水炸弹；起爆深度由 100 米左右改为 25 米左右，即在德国潜艇下潜时进行攻击，效果最佳.

（2）运送物质的船队及护航潜艇编队，由小规模多批次改为大规模少批次，这样将减少损失率. 当时已出任英国首相的丘吉尔采纳了 Morse 小组的意见，最终成功地打破了德国的封锁，并重创了德国潜艇. 由于这项工作，Morse 同时获得了英国及美国战时的最高奖励.

0.1.1.5 英国战斗机中队援法决策

第二次世界大战开始后不久，德国军队突破了法国的马奇诺防线，法军节节败退. 英国为了对抗德国，派遣了十几个战斗机中队在法国国土上空与德国空军作战，其指挥、维护均在法国进行. 由于战斗损失，法国总理要求增援 10 个战斗机中队，丘吉尔首相决定同意这个请求. 英国运筹人员得知此事后，进行了一项快速研究，其结果表明：在当时的环境下，当损失率、补充率为现行水平时，英国的援法战斗机不出两周就会全部损失掉. 他们以简明的图表和明确的分析结果说服了丘吉尔首相，丘吉尔最终决定：不仅不再增添新的战斗机中队，而且还将在法的英国战斗机撤回大部分，以本土为基地，继续去对抗德国. 事实上，这样的决策，反而使整个局面有了很大的改观.

0.1.1.6 太平洋战争

1943 年第二次世界大战期间，美国军队与日本军队在太平洋战区相遇，当时日本军队的指挥官是山本五十六（当年偷袭珍珠港的谋划者），美国军队的指挥官是麦克阿瑟. 交战双方要决策的是：日方须决定应该带着军队走南太平洋的南线还是北线？美方则须决定应该把轰炸机安置在南太平洋的南线还是北线？据情报，北线那边天气不好，不易走，但隐蔽性好些；走南线那边天气好，易走，但隐蔽性比较差. 双方的决策结果是：日方决定带军队走南太平洋的北线，但山本五十六万万没有想到美方则恰好决定把轰炸机安置在南太平洋的北线，所以这次交战日本军队遭到惨败. 这其实是运筹学的对策论中的矩阵对策的一个实际战例.

0.1.2 经济与管理

运筹学的另外两个来源是经济与管理，下面简略地介绍几个代表性的工作.

0.1.2.1 Erlang（埃尔朗）与排队论

19 世纪后半叶，电话问世并随即建立为用户服务的电话通信网. 在电话网服务中，基本问题之一是：根据业务量适当配置电话设备，既不要使用户因容量小而过长等待，又不要使电话公司设备投入过大而造成过多空闲. 这是一个需要定量分析才有可能解决的问题. 1909 ~ 1920 年间，丹麦哥本哈根电话公司的工程师 A. K. Erlang 陆续发表了关于电话通路数量等方面的分析与计算公式，尤其是 1909 年的论文《概率与电话通话理论》，开创了排队论——随机运筹学的一个重要分支. Erlang 的工作属排队论最早成果的范畴，但方法论正确得当，即他引用了概率论的数学工具作定量描述与分析，并具有系统论的思想，即从整体性来寻求系统的最优化. 据不完全统计，截止到 1960 年，关于在排队论的 486 篇应用研究报告中，电话系统有 222 篇，运输系统有 125 篇. 在其他领域中，则显示了一个潜在的应用领

域——计算机系统.

0.1.2.2 von Neumann（冯·诺伊曼）和对策论

由20世纪20年代开始，学者von Neumann开始了对经济的研究，做了许多开创性工作. 比如，约在1939年，他提出了一个属于宏观经济优化的控制论模型，成为数量经济学的一个经典模型. von Neumann是近代对策论研究的创始人之一，1944年，他与Morgenstern（摩根斯特恩）的名著《对策论与经济行动》一书出版. 书中将经济活动中的冲突作为一种可以量化的问题来处理. 在经济活动中，冲突、协调与平衡问题比比皆是，von Neumann分析了这类问题的特征，解决了一些基本问题，比如：两人零和对策中的最大-最小方法，等. 在第二次世界大战期间，对策论的思想和方法在军事领域占有重要的地位. 还需指出的是，尽管Neumann不幸过早去世（1957年），但他对运筹学的贡献还是很多的. 特别值得一提的是，他领导研制的电子计算机成为运筹学的技术实现的支柱之一；另外，他慧眼识人才，对Dantzig从事的以单纯形法为核心的线性规划研究，最早给予了肯定与扶持，使运筹学中这个重要的分支在第二次世界大战后不久即脱颖而出，当时Dantzig的年龄还不到30岁.

0.1.2.3 Kantorovich（康托罗维奇）与《生产组织与计划中的数学方法》

康托罗维奇是前苏联著名的数理、经济专家，20世纪30年代，他从事了生产组织与管理中的定量化的研究，取得了很多重要的成果. 如运输调度优化、合理下料研究等. 运筹学中著名的运输问题，其解法之一（康罗洛维奇 希区柯克算法）就是以他的名字来命名的. 1939年，他出版了名著《生产组织与计划中的数学方法》，堪称运筹学的先驱著作，其思想与模型均可归入线性规划范畴，尽管当时还未能建立方法论与理论体系，但仍具有很大的开创性，因为它比Dantzig建立的线性规划几乎早了十年. 虽然康托罗维奇的这些工作在当时的苏联被忽视了，但在国际上却获得了很高的评价，1975年，他与T. C. Koopmans（库普曼斯）一起获得了诺贝尔经济学奖.

0.1.3 运筹学分支的重大理论成果

由运筹学作为一门学科开始到20世纪60年代，在近三十年的发展过程中，出现了多方面的理论成果，其中相当部分属于理论奠基成果或重大突破.

1947年，Dantzig提出单纯形法；

1950~1956年，建立线性规划的对偶理论；

1951年，Kuhn Tucker定理奠定了非线性规划的理论基础；

1954年，网络流理论建立；

1955年，创立了随机规划；

1958年，创立了整数规划，求解整数规划的割平面法问世；

1958年，求解动态规划的Bellman原理发表；

1960年，Dantzig Wolfe建立大规模线性规划的分解算法.

上述罗列肯定是不完整的，但这足以看出：

20世纪50年代是运筹学理论体系创立与形成的重要的十年.

60~70年代，运筹学的许多分支相继建立并充实了有效的理论，强化了学科的框架.

70年代末至80年代初，西方运筹学界，特别是美国、德国等发达国家的运筹学界，对

运筹学的本质、成就、现状与未来发展展开了颇有声势的讨论，虽然有许多争论、分歧甚至于对立，但其结果是：总结了过去、明确了问题、设计了未来. 在争论特指的二十年左右运筹学仍然取得了许多重大理论成果.

80 年代属于大系统、多因素和统一算法的阶段.

70 年代~80 年代后：①线性规划的求解算法的深入探讨：著名的 Klee Minty 反例，1979 年的 Khachiyan（哈奇扬）椭球算法，1984 年的 Karmarkar（卡玛卡）的多项式算法，S. Smale（斯梅尔）关于单纯形法的计算量的结论；②非线性规划的变尺度法的出现（是个激动人心的突破）；③美国运筹学家 T. L. Saaty 创立了在理论上和应用上都极具生命力的层次分析法（AHP）；④在应用上有在航空航天领域、汽车和机械等行业中广泛采用的“优化设计”和“计算机辅助设计”（CAD）等.

总的来说，运筹学来源于军事、管理和经济，离开了这三个领域，运筹学就会成为无源之本，就会走向歧途，这一点早已被历史所证明.

0.2 运筹学的三个组成部分

任何一门学科都要研究其他学科不研究的一种或几种自然（或社会）现象，它才能独立于科学之林. 在运筹学的研究对象中，哪些现象是它独自深入研究的呢？经大量实践证明大致有三类现象：一是机器、工具、设备等如何充分运用的问题，即如何使运用效率达到较高；二是竞争现象，如战争、投资、商品竞争等；三是拥挤现象，如乘公共汽车排队、打电话占线、到商店买东西、飞机着陆、船舶进港等. 这三类现象其他学科分支研究得比较少，它们主要是运筹学研究的对象. 根据运筹学研究的对象，可以认为运筹学有如下三个组成部分：

（1）运用分析理论. 运用分析理论主要包括分配、地址、资源最佳利用、设备最佳运行等. 运用分析中常用的数学方法有线性规划、非线性规划、动态规划、网络分析、最优控制等.

（2）竞争理论. 竞争理论主要研究各种各样的竞争现象，竞争理论中常用的数学方法有对策论、决策论、统计决策、博弈论等，它们与经济理论有着密切联系.

（3）随机服务理论. 随机服务理论（即排队论）主要研究各种各样的竞争现象，比如，计算机多道输入时 CPU 的运行和程序的排队等都属于随机服务理论，竞争理论中常用的数学方法主要是排队论，排队论在计算机科学和技术、通信网络中都有着大量的应用.

0.3 运筹学解决问题的一种模式

运筹学诞生的直接原因，确实是为作战服务的，早期解决问题的范围仅仅是一些战术问题和军事装备运用的问题. 但是，正是因为这些问题的解决，才使运筹学名声大噪. 更为重要的是，在实践中形成了运筹学的方法论，其内容逐步形成为系统方法. 运筹学方法论的内容非常丰富，涉及唯物辩证法和认识论，归纳起来，最主要的有以下两点.

0.3.1 运筹学解决问题的过程

这里以军事领域较多的费用/效果分析为例，来说明运筹学解决问题的过程. 此过程一般为：

（1）定义系统目标；

（2）提出可能达此目标的各种系统方案；

（3）建立系统方案达到目标程度的准则；

（4）构造：性能评价模型和费用模型；

（5）对系统进行综合费用/效果分析.

运筹学工作过程是运筹学工作者的基本功，初看起来似乎很简单，但实际做起来还是非常复杂的.

0.3.2 效果度量概念

在实际问题中，任何设备、机器、武器等的运行效果如何，效果如何度量，这是非常重要的. 实际上，效果度量可以给决策者提供重要的信息，可以帮助决策者进行决策. 例如，许多武器装备在使用中往往要涉及作战效果问题，这时首先要研究其衡量指标，即求解效果度量问题. 例如，要解决一架反潜飞机侦察潜艇的效果量度问题，这也就是第二次世界大战中一个非常著名的运筹学问题，其效果量度为：

$$Q = \frac{CA}{NT}$$

式中，C 表示飞机发现潜艇的次数；A 表示飞机侦察的面积；N 表示在区域 A 内潜艇可能有的数目；T 表示侦察的时间.

这一公式有点物理学的味道：飞机反潜侦察效果与发现潜艇次数呈正比；与飞机侦察区域大小呈正比；与飞行时间呈反比；与该区域中敌潜艇数目呈反比. 显然，这是非常合乎事实的，一般在此公式中 N 是很难估计的. 但是利用此公式记录的反潜飞机作战效果的起伏波动，可得知双方战术和装备的变化，这在战争中能起非常大的作用.

0.4 运筹学的范围

运筹学的范围大致可分为：

- 运筹学
  - 确定型
    - 连续型
      - 线性规划⇒线性多目标规划
      - 非线性规划
    - 离散型
      - 动态规划
      - 整数规划
      - 0－1 型整数规划
      - 网络规划
      - 图论
  - 随机型
    - 排队论
    - 对策论
    - 决策论
    - 存储论
    - 计划评审技术
    - 马尔可夫链

第 1 章

线性规划

线性规划（Linear Programming）是数学规划的一个重要的分支，历史比较悠久，理论比较成熟，方法较为完善．线性规划思想最早可以追溯到 1939 年，当时的苏联数学家、经济学家 Л. B. Kantorovich（康托罗维奇）在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出了类似线性规划的数学模型，以解决下料问题和运输问题，并给出了“解决乘数法”的求解方法．然而他们的工作人员当时并不知晓．由于战争的需要，1941 年美国经济学家 T. C. Koopmans（库普曼斯）独立地研究运输问题，并很快看到了线性规划在经济学中应用的意义．同年，Hitchcock（希区柯克）也提出了“运输问题”．由于他们在这方面的突出贡献，康特罗维奇和库普曼斯共同获得了 1975 年的诺贝尔经济学奖．对线性规划贡献最大的是美国数学家 Dantzig（丹齐格），他在 1947 年提出了求解线性规划的单纯形法，并同时给出了许多有价值的理论，为线性规划奠定了理论基础．1953 年，丹齐格又提出了改进单纯形法；1954 年，Lemke（莱姆基）提出了对偶单纯形法．1976 年，R. G. Bland 提出避免出现循环的方法后，线性规划的理论更加完善．

但在 1972 年，V. Klee（克莱）和 G. Minty（明蒂）构造了一个例子，发现单纯形法的迭代次数是指数次运算，不是多项式运算（多项式运算被认为是好算法），这对单纯形法提出了挑战．1979 年，苏联青年数学家 Khachyian（哈奇扬）提出了一种新算法——椭球算法．它是一个多项式运算，这一结果在全世界引起了极大轰动，被认为是线性规划理论上的历史突破．然而在实际计算中，椭球算法的计算量与单纯形法差不多，因此椭球算法并不实用．1984 年，在美国贝尔实验室工作的印度数学家 N. Karmarkar（卡玛卡）又提出了一个多项式运算——Karmarkar 算法．该算法本质上属于内点法，不仅在理论上优于单纯形法，而且也显示出对求解大规模实际问题的巨大潜力．另外，1980 年前后形成的“有效集法”，在理论上与单纯形法是等价的，但解决问题的侧重点不同，因此各有优劣，起着互补的作用．值得一提的是，尽管如此，丹齐格在 1947 年提出的求解线性规划的单纯形法，仍然是求解线性规划问题最常用的算法．

线性规划所探讨的问题，是在由所提出问题的性质决定的一系列约束条件下，如何把有限的资源进行合理分配，制订出最优实施方案以获得最好的效益．

1.1 线性规划问题的数学模型

1.1.1 实例

［**例 1-1**］ 生产组织与计划问题

某电视机厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的电视机．这三种电视机的市场需要量，每天最少分别为 200 台、250 台、100 台，而该厂每天可利用的工时为 1000 个时间单位，可利用的原

材料每天有2000个单位. 生产一台不同型号的电视机所需的工时和原材料单位数量如表1-1所示. 问不同型号电视机每天应生产多少台，才能使该厂获得最大利润?

表1-1 工时和原材料的需要量

型号	原材料	工时	最低需要量/台	利润
Ⅰ	1.0	2.0	200	10
Ⅱ	1.5	1.2	250	14
Ⅲ	4.0	1.0	100	12
可利用量	2000	1000		

令 x_i 为第 i 型（i = Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ）电视机每天的生产量.

求利润最大，即求

$$\max S = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

根据表1-1的已知条件，x_i 应满足如下的约束条件：

$$\text{s. t.}^{\ominus}\begin{cases} x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 \leqslant 2000\ (\text{原材料约束}) \\ 2x_1 + 1.2x_2 + x_3 \leqslant 1000\ (\text{工时约束}) \\ x_1 \geqslant 200, x_2 \geqslant 250, x_3 \geqslant 100 \end{cases}$$

［**例1-2**］ 运输问题

某类物资有 m 个产地，n 个销地. 第 i 个产地的产量为 $a_i(i=1, 2, \cdots, m)$；第 j 个销地的需要量为 b_j $(j=1, 2, \cdots, n)$，其中 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. 设由第 i 个产地到第 j 个销地运送单位物资的运价为 c_{ij}. 问如何制订调运方案，方可既满足供需关系，又使总运费最少?

用双下标变量 x_{ij} 表示由第 i 个产地供给第 j 个销地的物资数量. 由上述问题可归结为如下的数学问题：求一组非负变量 x_{ij}，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$，使总运费最小，即

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

且满足约束条件

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

［**例1-3**］ 饮食问题

在保证健康的起码营养条件下，如何确定最经济的饮食? 假定在市场上可以买到几种不同的食品，并且第 i 种食品的单位售价是 c_i. 有 m 种基本营养成分，为达到饮食平衡，每个人每天必须至少保证 b_j 个单位的第 j 种营养成分. 假定第 i 种食品的每个单位含有 a_{ji} 个单位的第 j 种营养.

用 x_i 表示在饮食中使用第 i 种食品的单位数. 于是，这个问题就是选择 x_i，$i=1, 2, \cdots, n$，使总成本最小，即

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

且满足营养要求：

⊖ s. t. 是 subject to 的缩写，意为约束条件.

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

食品数量显然应满足非负条件：

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \cdots, \ x_n \geqslant 0$$

[例 1-4] 扩建投资问题

某工厂只生产一种产品，工厂准备分四期扩建以增加生产能力，每期为一年.

已知每生产一个产品需费用 c 元，同时要耗费一个单位的生产能力. 每年生产的产品在下一年年初才有收益，每个产品创收 h 元. 产品的收益用于再生产和扩建投资.

在每年年初扩建生产能力的工程中，有两种方案可以采用：

A 方案：年初每投资 a 元，一年后可增加一个单位生产能力.

B 方案：年初每投资 b 元，两年后可增加一个单位生产能力.

现工厂在第一年年初有资金 D 元、生产能力 R 个单位. 工厂希望在第五年年初具有最多的生产能力，问四年内应如何安排生产和扩建投资计划？试建立线性规划模型.

解 我们引进四组决策变量.

令 x_j 为第 j 年产品的产量；

y_j 为第 j 年积余的资金；

u_j 为第 j 年准备用方案 A 增加的生产能力；

v_j 为第 j 年准备用方案 B 增加的生产能力.

显然，每年安排生产和扩建计划时，应考虑工厂现有资金约束；同时在制订产品产量计划时，还应考虑现有生产能力的约束.

在第一年年初，工厂有资金 D 元和生产能力 R 个单位，故有约束：

$$cx_1 + au_1 + bv_1 + y_1 = D$$

$$x_1 \leqslant R$$

在第二年年初，工厂具有的资金数为 $y_1 + hx_1$，而生产能力除了原有的 R 个单位外，还应加上第一年使用方案 A 投资而在第二年年初可增加的生产能力 u_1，故有约束：

$$cx_2 + au_2 + bv_2 + y_2 = y_1 + hx_1$$

$$x_2 \leqslant R + u_1$$

在第三年年初工厂的资金数为 $y_2 + hx_2$，考虑到由于第一年采用方案 B 投资而在第三年年初可投入使用的生产能力为 v_1，故第三年年初的生产能力为

$$R + u_1 + u_2 + v_1$$

故有约束

$$cx_3 + au_3 + bv_3 + y_3 = y_2 + hx_2$$

$$x_3 \leqslant R + u_1 + u_2 + v_1$$

第四年年初我们不再考虑方案 B 来增加生产能力，所以不再引进变量 v_4. 因此有约束：

$$cx_4 + au_4 + y_4 = y_3 + hx_3$$

$$x_4 \leqslant R + u_1 + u_2 + u_3 + v_1 + v_2$$

在第五年年初工厂具有的生产能力为