张宇数学教育系列丛书

2018

张宇考研数学题源探析经典1000题

习题分册·数学二

张宇 主编

刮涂层 查真伪

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇考研数学题源探析经典1000题

习题分册 · 数学二

张宇◎主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 习题分册. 数学二 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社,2017.4(2017.7重印)

ISBN 978－7－5682－3938－7

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第075964号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 6
字　　数 / 150千字
版　　次 / 2017年4月第1版　2017年7月第2次印刷
定　　价 / 52.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

Foreword 前言

与考生说几句体己话

这本书，首先是题源，说白了，就是命题的源泉. 建设好这个源泉，是这本书的指导思想. 源头建设是极其不容易的，绝不是东拼西凑几个题目那样简单，众多命题专家和教学专家多年的经验和无私的奉献，才成就了这本书的高质量. 很欣慰地看到，上一个考研年，本书不仅对 2017 的考研数学试题做出了精准的预测，而且还对考生参加全国、各省市大学生数学竞赛，校内的期中、期末考试，都起到了积极的作用，甚至还有原题出现在各种形式的考试试卷上.

这本书，又是习题集. 考研数学复习，必须要辅以足量的习题训练，这是本书的目标与任务.

这本书，还是畅销书. 全国有众多考生选择这本习题集，让本书作者倍感责任重大. 这一版，仍然做了认真修改：增加、替换了一些要紧的题目，以适应新一年的命题趋势；吸收了各方面传递给作者的好的建议；订正、修改了一些关键的内容，以进一步提高本书的质量和可读性.

在 2018 版中，我们不仅增加了一些新颖的，反映考试命题趋势的新题，还将题目按照难易程度不同分为 A 组，B 组，C 组，其中 A 组题较容易，B 组题难度中等，C 组题较难，供读者参考. 在基础复习时，可先集中力量做完 A，B 组题，在强化复习与综合总结时，再做 C 组题. 当然，A，B，C 的分法也可能因人而异，有个别题目，不同的读者可能认为其难度所放置的组别不合适，这很正常，读者也可有自己的归类，但作者期望你们把所有题目都认真完成.

在这里，要感谢不少高校教师选择本书作为他们辅导学生、提升大学数学学习能力的习题课教材，感谢全国各大考研辅导机构选择本书作为学员的复习资料，感谢各位考生对本书提出的宝贵意见和建议.

新的一个考研年，我作为主编，代表各位作者，继续欢迎各位读者朋友们勇于攀登，攻克难关，用好这本书，提高数学解题能力.

张宇

2017 年 4 月

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列 (高等数学(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	体现了本科教学要求与考研要求的差异,列出了章节学习的知识体系,给出了所有课后习题的全面解析,精选了不同数量的经典例题.	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备与高分指南系列 (高等数学(微积分)(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据,以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考,设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题,命题具有通用性.	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题组组长参与.	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.	基础阶段
张宇考研数学题源探析经典1000题 (数学一、数学二、数学三)	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了1000道左右高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,由易到难,利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解.原命题组组长参与.	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解 (数学一、数学二、数学三)	囊括考研数学命题以来所有考研真题,给读者提供原汁原味的实考题,有效掌握命题方向及解题思路.原命题组组长参与.	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷 (数学一、数学二、数学三)	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷 (数学一、数学二、数学三)	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别.出版日期见封四.

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研图书交流论坛 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博:@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

01

高等数学

GAO DENG SHU XUE

高等数学是硕士研究生招生考试的内容之一，主要考查考生对高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决问题的能力。在数学二试卷中占78%，即117分。

第1章 函数、极限、连续

A组

一、选择题(在目前的考研中,选择题4分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$,则当$n\to\infty$时,$\{y_n\}$必为无穷小的充分条件是 ( )

(A)$\{x_n\}$是无穷小　　(B)$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小

(C)$\{x_n\}$有界　　(D)$\{x_n\}$单调递减

1.2. 设$f(x)$是偶函数,$\varphi(x)$是奇函数,则下列函数(假设都有意义)中,是奇函数的是 ( )

(A)$f[\varphi(x)]$　　(B)$f[f(x)]$　　(C)$\varphi[f(x)]$　　(D)$\varphi[\varphi(x)]$

1.3. 设$f(x)=\sin(\cos x)$,$\varphi(x)=\cos(\sin x)$,则在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内 ( )

(A)$f(x)$是增函数,$\varphi(x)$是减函数　　(B)$f(x)$,$\varphi(x)$都是减函数

(C)$f(x)$是减函数,$\varphi(x)$是增函数　　(D)$f(x)$,$\varphi(x)$都是增函数

1.4. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则 ( )

(A)$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　(B)$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C)$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　(D)$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

1.5. 两个无穷小比较的结果是 ( )

(A)同阶　　(B)高阶　　(C)低阶　　(D)不确定

1.6. 函数$f(x)=x\sin x$ ( )

(A)在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(B)在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C)当$x\to\infty$时为无穷大　　(D)当$x\to\infty$时极限存在

1.7. 当$x\to 0$时,$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$为$x$的三阶无穷小,则$a,b$分别为 ( )

(A)1,0　　(B)$\dfrac{1}{2}$,0　　(C)$\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$　　(D)以上都不对

1.8. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=A\neq 0$的充要条件是 ( )

(A)$\alpha>1$　　(B)$\alpha\neq 1$　　(C)$\alpha>0$　　(D)与α无关

1.9. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大，则下述结论正确的是　　（　　）

(A) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小

(B) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 不是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小

(C) 设在 $x=x_0$ 的某邻域内 $g(x)$ 无界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必是无穷大

(D) 设在 $x=x_0$ 的某邻域内 $g(x)$ 有界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必不是无穷大

1.10. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，则在点 x_0 处必定间断的函数为　　（　　）

(A) $f(x)\sin x$　　(B) $f(x)+\sin x$　　(C) $f^2(x)$　　(D) $|f(x)|$

二、填空题（在目前的考研中，填空题 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线上.）

1.11. 对充分大的一切 x，给出以下 5 个函数：100^x，$\log_{10}x^{100}$，e^{10x}，$x^{10^{10}}$，$e^{\frac{1}{100}x^2}$，则其中最大的是________.

1.12. $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=$________.

1.13. $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$________.

1.14. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

1.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1-x)}=$________.

1.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=$________.

1.17. 当 $x\to-1$ 时，无穷小 $\sqrt[3]{x}+1\sim A(x+1)^k$，则 $A=$________，$k=$________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.）

1.18. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & e^{-1}<x<1,\\ x, & 1\leqslant x<e,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$.

1.19. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}$.

1.20. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

1.21. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\ln(1+x^4)}$.

1.22. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

1.23. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

1.24. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$.

1.25. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.26. 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

1.27. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\cot^2 x}$.

1.28. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

1.29. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq0)$.

1.30. 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}$.

1.31. 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}$.

1.32. 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

1.33. 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$.

1.34. 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1.35. 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

1.36. 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.37. 证明：若单调数列$\{x_n\}$有一收敛的子数列，则数列$\{x_n\}$必收敛.

1.38. 分段函数一定不是初等函数，若正确，试证之；若不正确，试说明它们之间的关系？

1.39. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

1.40. 设函数 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0)=0$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

1.41. 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点并判别其类型.

1.42. 设 $f(x)$ 对一切 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，证明：函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

1.43. 设 $\alpha\geqslant5$ 且为常数，k 为何值时极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}[(x^\alpha+8x^4+2)^k-x]$$

存在，并求此极限值.

B 组

一、选择题（在目前的考研中，选择题 4 分 / 题，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选选项前的字母填在题后的括号里.）

1.1. 以下三个命题：

① 若数列$\{u_n\}$收敛于 A，则其任意子数列$\{u_{n_i}\}$必定收敛于 A；

② 若单调数列$\{x_n\}$的某一子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于 A，则该数列必定收敛于 A；

③ 若数列$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n+1}\}$都收敛于 A，则数列$\{x_n\}$必定收敛于 A.

正确的个数为　　（　　）

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

1.2. 设 $f(x)=u(x)+v(x)$，$g(x)=u(x)-v(x)$，并设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在，下列论断正确的是　　（　　）

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必不存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必不存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在

1.3. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)(\beta(x)\neq 0)$ 都是无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是 ( )

(A) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta^2(x)]$　　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

1.4. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内间断点的类型只能是 ( )

(A) 第一类间断点　　(B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点　　(D) 结论不确定

1.5. 设当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为 ( )

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

1.6. 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 ( )

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$　　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

1.7. 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=ax^3+bx$ 与 $g(x)=\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t$ 等价，则 ( )

(A) $a=\dfrac{1}{3},b=1$　　(B) $a=3,b=0$　　(C) $a=\dfrac{1}{3},b=0$　　(D) $a=1,b=0$

1.8. 若 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则 ( )

(A) $\lambda<0,k<0$　　(B) $\lambda<0,k>0$　　(C) $\lambda\geqslant 0,k<0$　　(D) $\lambda\leqslant 0,k>0$

1.9. 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，则正整数 n 等于 ( )

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

1.10. 设 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 ( )

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

1.11. 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_2(x)=f_1[f_1(x)]$，$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]$，$k=1,2,\cdots$，则当 $n>1$ 时，$f_n(x)=$ ( )

(A) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$　　(B) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(D) $\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

二、填空题（在目前的考研中，填空题4分/题，请将答案填在题中的横线上.）

1.12. 设 $f(x)$ 是奇函数，且对一切 x 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，又 $f(1)=a$，a 为常数，n 为整数，则 $f(n)=$ ________.

1.13. 若 $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，则 $a=$________.

1.14. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^{\alpha}}=\beta>0$，则 α,β 的值为________.

1.15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

1.16. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

1.17. 若当 $x\to0$ 时，有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\dfrac{1}{10\ 000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)$，则 $a=$________.

1.18. 当 $x\to0$ 时，若有 $\ln\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)\sim Ax^k$，则 $A=$________，$k=$________.

1.19. 当 $x\to\pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim A(x-\pi)^k$，则 $A=$________，$k=$________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.）

1.20. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2e^x-1, & x\leqslant 0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

1.21. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.22. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

1.23. 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$.

1.24. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

1.25. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

1.26. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

1.27. 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

1.28. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,dt}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$.

1.29. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

1.30. 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

1.31. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

1.32. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$.

1.33. 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

1.34. 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

1.35. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

1.36. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，证明：$|f(1)|$，$|f(3)|$，$|f(5)|$中至少有一个不小于 2.

1.37. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

1.38. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

1.39. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

1.40. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$.

1.41. 求极限：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

1.42. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.43. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且 $a_i\neq1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant2$.

1.44. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$，$a>0$.

1.45. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A(a>0,a\neq1)$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

1.46. 已知$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2\mathrm{e}^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1}f(x)$，求 $f(x)$.

1.47. 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有$\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq0)$，求$\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

1.48. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，求 a,b 的值.

1.49. 确定常数 a 和 b 的值，使$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$.

1.50. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数 A,B，使得当 $x\to0^+$ 时，恒有$f(x)=\mathrm{e}+Ax+Bx^2+o(x^2)$，并求常数 A,B.

1.51. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D\neq0$. 求常数 A,B,C,D.

1.52. 已知数列$\{x_n\}$的通项 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.53. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求其极限值.

1.54. 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.55. 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$.