

娄太平◎著

Non-Geometrical Theory of Gravity—the Theory of Gravitational Interaction Between Matter

非几何引力论

——物质间的引力相互作用理论

 科学出版社

0312
20102

0312

非几何引力论

——物质间的引力相互作用理论

姜太平 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地阐述了物质间的引力相互作用——非几何引力相互作用存在的理论依据以及与几何化引力——万有引力之间的本质区别。全书共 11 章，详细介绍了非几何引力理论的提出及其在引力波与引力辐射、弯曲时空精确度规求解、非几何引力场量子化和宇宙学等方面的应用。

本书可供对广义相对论和量子引力感兴趣的读者阅读，也可供宇宙论研究者参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

非几何引力论：物质间的引力相互作用理论/娄太平著. —北京：科学出版社，2017.10

ISBN 978-7-03-054736-1

I. ①非… II. ①娄… III. ①引力—研究 IV. ①O314

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 246378 号

责任编辑：王喜军 / 责任校对：樊雅琼
责任印制：吴兆东 / 封面设计：壹选文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2017 年 10 月第一次印刷 印张：26 3/4

字数：630 000

定价：160.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

爱因斯坦的广义相对论是精确的时空几何理论，但不是引力的相互作用理论。因此，广义相对论在描述与时空几何相关的物理问题时是十分成功的，如行星近日点进动、光线引力偏转、谱线引力红移和雷达波回波延迟等，但在描述与引力相互作用相关的物理问题时却存在局限性和不完备性，如引力辐射理论的基础不完备、引力场中存在几何奇点、引力场不能量子化以及宇宙中存在无法回避的暗物质等。然而许多科学家认为物质的质量（引力“荷”）之间应存在通过交换“引力子”而产生的引力相互作用，并且当今所观测到的引力波也间接地证明了引力相互作用存在的客观事实，但却无法从理论上给出合理的解释，因为几何化的引力场与量子场论不相容。

本书作者通过对爱因斯坦的引力场方程的精确求解和详细分析，从理论上证明了真空引力场中有引力波存在时，引力波波场中的曲率张量分量是不都为零的，即真空中含有产生引力场的“源”，这间接地从理论上证明了物质的质量之间必定存在引力相互作用，而且引力辐射就存在于爱因斯坦的引力场方程中。同时也表明，物质之间的引力相互作用与我们通常所认识的几何化的引力是有本质区别的。

本书是对作者十余年来关于引力研究成果的系统总结，是基于广义相对论，并通过类比电动力学而建立的引力相互作用理论——非几何引力理论，以期解释广义相对论无法完备解释的物理问题。全书共 11 章，其中第 1 章简单介绍了广义相对论及其成就和适用范围；第 2 章和第 3 章分别介绍了非几何引力理论及其在弱场时的近似表述；第 4 章介绍了非几何引力波和引力辐射；第 5~7 章分别研究并给出了静态球对称引力场、稳态轴对称引力场和低维静态引力场的精确解；第 8 章介绍了自由粒子在静态球对称引力场中运动的量子行为；第 9 章尝试建立了弯曲时空中非几何引力场的量子化理论；第 10 章研究了由基态粒子构成的“黑洞”的物理行为；第 11 章探讨了用非几何引力理论和广义相对论所描述的宇宙学。

由于本人能力所限，不妥之处在所难免，恳请读者给予批评和指正。

姜太平

2016 年 7 月 31 日于沈阳

目 录

前言

第 1 章 广义相对论	1
1.1 广义相对论原理	2
1.2 黎曼张量运算	4
1.2.1 黎曼张量	4
1.2.2 协变导数	6
1.2.3 黎曼空间中有意义的积分	7
1.2.4 曲率张量	8
1.3 黎曼时空中粒子的运动	9
1.3.1 粒子的四维动量	9
1.3.2 粒子运动的测地线方程	10
1.4 爱因斯坦的几何化引力理论及成就	10
1.4.1 爱因斯坦的引力场方程	10
1.4.2 引力场的能量-动量张量	14
1.4.3 牛顿极限	15
1.4.4 静态球对称引力场中的物体运动	16
1.4.5 弱场的引力波与引力辐射	23
1.4.6 均匀和各向同性宇宙学	27
1.5 几何化引力理论在描述引力相互作用上的局限性	29
1.5.1 引力波与引力辐射的理论基础	30
1.5.2 弯曲时空中的奇异性	34
1.5.3 引力场的量子化问题	36
1.5.4 暗物质和暗能量问题	37
第 2 章 非几何引力理论	38
2.1 物质之间的非几何引力相互作用	39
2.1.1 物质存在性原理——基本相互作用	39
2.1.2 相似性原理	40
2.1.3 物质之间的非几何引力	41
2.2 半度规	43

2.2.1	半度规的定义	43
2.2.2	半度规的基本性质	44
2.2.3	张量变换	45
2.2.4	张量的协变导数	46
2.3	引力矢势	47
2.3.1	非几何引力场的引力矢势	47
2.3.2	非几何引力场的强度	48
2.3.3	非几何引力场的规范不变性	49
2.4	引力荷与非几何引力场中粒子的运动	50
2.4.1	引力荷	50
2.4.2	非几何引力场中粒子的运动	51
2.5	封闭物理系统的 Lagrange 作用量	53
2.6	非几何引力场的动力学方程	55
2.6.1	变分原理与非几何引力场的动力学方程	55
2.6.2	粒子构成的引力荷流与连续性方程	57
2.7	包含非几何引力场贡献的爱因斯坦场方程	59
2.7.1	爱因斯坦场方程与度规的变分规则	59
2.7.2	包含宇宙常数 Λ 项的场方程	63
2.8	物理真空及真空场方程	64
2.9	能量-动量守恒定律与非几何引力场中的守恒量	65
2.9.1	能量-动量守恒方程	65
2.9.2	动力学关系	66
2.9.3	非几何引力场中的守恒量	68
	附录	70
第 3 章	弱场中的非几何引力动力学	72
3.1	弱场的度规	72
3.2	弱引力场方程	76
3.2.1	谐和条件下的引力场方程	76
3.2.2	局域惯性参考系中的波动定理	82
3.2.3	维里定理与纯物质的能量-动量张量	85
3.3	弱非几何引力场	87
3.3.1	弱非几何引力场的场强	87
3.3.2	非几何引力场的麦克斯韦方程组	89

3.3.3	引力荷流与连续性方程	91
3.3.4	坡印亭矢量	93
3.3.5	真空中非几何引力场的能量-动量与角动量	94
3.3.6	非几何引力场的洛伦兹变换	96
3.3.7	李纳特-魏西尔特势	98
3.4	辐射场中的度规与引力矢势的关系	100
3.5	弱场中粒子的四维动量和恒定外场中粒子的运动	106
3.5.1	弱场中粒子的四维动量	106
3.5.2	恒定外场中粒子的运动方程	107
3.6	恒定的非几何引力场	110
3.6.1	牛顿的万有引力定律	110
3.6.2	静止引力荷的静荷能	112
3.6.3	等速运动的引力荷的场	113
3.6.4	引力荷的偶极矩和四极矩	115
3.6.5	静止外场中静止的引力荷体系	117
3.6.6	恒定非几何引力磁场与毕奥-萨伐尔定律	118
3.6.7	非几何引力磁矩	119
3.6.8	圆引力荷流圈的非几何引力磁场	120
3.6.9	稳恒非几何引力场中的安培环路定理	122
第 4 章	非几何引力波与引力辐射	124
4.1	谐和条件下的平面引力波	124
4.1.1	真空中平面引力波波场中度规的精确解	124
4.1.2	弱真空场中的非几何引力场	130
4.1.3	弱场中非几何平面引力波的螺旋度	133
4.1.4	平面电磁波波场中的度规	135
4.1.5	物理分析与验证	138
4.2	弱场中的非几何引力波	139
4.2.1	真空中非几何引力波的波动方程	139
4.2.2	非几何引力场的平面引力波	141
4.2.3	单色平面引力波	142
4.2.4	多普勒效应	143
4.2.5	极化	144
4.2.6	引力波波场的傅里叶分解	145

4.3	非几何引力波的辐射理论	150
4.3.1	几何化引力辐射理论存在的问题	150
4.3.2	非几何引力辐射理论	151
4.4	非几何引力辐射及验证	152
4.4.1	弱场中引力荷体系在远处所产生的非几何引力场	152
4.4.2	偶极辐射与四极辐射	154
4.4.3	弱场中引力荷体系在近处所产生的非几何引力场	159
4.4.4	被自由引力荷的散射	161
第5章	静态球对称弯曲时空	163
5.1	静态引力场和非几何引力场的一般性质	163
5.2	静态球对称的引力场和非几何引力场	164
5.2.1	静态球对称引力场	164
5.2.2	非几何引力场	165
5.2.3	引力场源的能量-动量守恒定律	167
5.2.4	引力荷流	167
5.3	静态球对称真空引力场	168
5.3.1	度规	168
5.3.2	静态球对称真空引力场及其引力场源	171
5.3.3	度规的“直角坐标”形式	173
5.3.4	均匀无限薄球壳内的真空引力场	174
5.3.5	无限薄的均匀球壳内球体外真空引力场	175
5.4	含电荷的静态球对称外部引力场	175
5.4.1	电磁场的能量-动量张量	175
5.4.2	体系的能量-动量张量守恒	176
5.4.3	度规	177
5.4.4	体系的能量-动量张量与球体外的总能量	179
5.4.5	引力场的奇异性分析	180
5.4.6	引力场中的引力荷流密度	181
5.5	含宇宙常数的静态球对称引力场	181
5.6	静态理想流体星体内的平衡方程	185
5.6.1	静态球对称理想流体的能量-动量张量及守恒	185
5.6.2	理想流体星体内的平衡方程	186
5.6.3	星体内的结构模型	187

5.7 太阳系的球对称弱引力场及验证	190
5.7.1 经典的牛顿力学	190
5.7.2 运动物体服从广义相对论的测地线方程	192
5.7.3 谱线的引力红移	194
5.7.4 行星的近日点进动	194
5.7.5 引力场中的光线偏转方程	195
5.7.6 引力场中的雷达回波延迟	195
第 6 章 稳态轴对称和稳态球对称弯曲时空	197
6.1 稳态轴对称引力场	197
6.1.1 稳态轴对称引力场度规	197
6.1.2 黑洞不存在定理	203
6.1.3 稳态轴对称引力场的曲率张量	204
6.1.4 真空中的非几何引力场	206
6.1.5 弱稳态轴对称引力场的度规与非几何引力矢势	209
6.2 稳态球对称引力场	212
6.2.1 稳态球对称引力场外部度规	212
6.2.2 球对称引力场中的球对称引力辐射	217
6.2.3 理想恒星体外的热辐射	219
第 7 章 低维物理体系的弯曲时空及验证	222
7.1 静态均匀无限大平面外引力场	222
7.1.1 度规的形式和曲率张量	222
7.1.2 真空中包含引力场源之验证	223
7.1.3 非几何引力场与真空解	224
7.1.4 携带电荷的静态均匀无限大平面外引力场	228
7.2 静态均匀无限长圆柱体外的引力场	232
7.2.1 度规形式和曲率张量	232
7.2.2 真空中包含引力场源之验证	234
7.2.3 非几何引力场与真空解	235
7.2.4 带电荷的静态均匀无限长圆柱体外引力场	239
7.2.5 度规的选择	243
7.3 静态均匀无限长理想流体圆柱体内引力场	245
7.3.1 圆柱体内的非几何引力场存在之验证	245
7.3.2 圆柱体内的引力场源	247

7.3.3	求解场方程	248
7.3.4	弱场度规	250
7.3.5	引力荷流密度	251
7.4	沿对称轴稳定运动的均匀无限长圆柱体外引力场	251
7.4.1	引力场与非几何引力场分析	251
7.4.2	度规	254
7.4.3	曲率张量与变换参数	258
7.4.4	弱场极限下的变换参数	259
7.5	稳恒转动的均匀无限长圆筒内的引力场	260
7.5.1	圆筒内的真空	260
7.5.2	非几何引力场	261
7.5.3	精确度规	262
7.5.4	稳恒直流电的无限长螺线管内的引力场	264
第 8 章	弯曲时空中粒子的量子力学	267
8.1	弯曲时空中粒子的运动方程	267
8.1.1	Klein-Gordon 方程	267
8.1.2	Dirac 方程	270
8.2	中心力场中粒子运动的量子行为	276
8.3	静态球对称引力场中的 Klein-Gordon 粒子束缚态	281
8.3.1	Klein-Gordon 粒子的运动方程	281
8.3.2	Klein-Gordon 粒子的“氢原子”束缚态	284
8.3.3	Klein-Gordon 粒子束缚态的精确解分析	288
8.4	静态球对称引力场中的 Dirac 粒子束缚态	291
8.4.1	中心力场中自旋为 $\hbar/2$ 粒子的共同本征态	291
8.4.2	Dirac 粒子的运动方程	294
8.4.3	Dirac 粒子的“氢原子”束缚态	298
8.4.4	Dirac 粒子束缚态的精确解分析	300
8.5	弱场中的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的规范不变性	304
第 9 章	弯曲时空中非几何引力场的量子化	307
9.1	平直时空中量子场论的基本理论	307
9.1.1	正则表述形式和场的量子化	307
9.1.2	对称性与守恒定律	308
9.1.3	经典场的量子化	311

9.1.4	相互作用场的量子化	314
9.2	弯曲时空中自由非几何引力场的量子化	318
9.2.1	量子化	318
9.2.2	非几何引力场的能量-动量张量与 Hamilton 密度	320
9.3	弯曲时空中的量子场论	321
9.3.1	引力场源的 Lagrange 作用量与 Lagrange 方程	322
9.3.2	纯物质物理量的正则形式	324
9.3.3	弯曲时空中经典场的量子化	328
9.4	弱非几何引力辐射场的量子化	335
9.4.1	平面引力波辐射场中的守恒量	335
9.4.2	量子化	337
9.4.3	动量展开	338
9.4.4	横引力子的自旋	341
9.4.5	横引力子的 Feynman 传播子	342
9.5	弱相互作用场的量子化	344
9.6	引力场中引力子的运动行为	347
第 10 章	基态粒子构成的基态星体——“黑洞”	349
10.1	平直时空中的费米子和玻色子	349
10.2	传统的黑洞热力学理论	353
10.3	基态粒子构成的“黑洞”结构模型	355
10.3.1	静态球对称引力场中基态粒子特征	355
10.3.2	基态处的引力子的运动行为	355
10.3.3	基态粒子构成的星体——“黑洞”的壳层结构	356
10.4	“黑洞”的偶极引力辐射与等效热辐射	360
10.4.1	“黑洞”中物质的受力分析	360
10.4.2	偶极振动与偶极辐射	361
10.4.3	“黑洞”的等效热辐射与等效熵	363
10.4.4	“黑洞”引力辐射场中的时空	365
第 11 章	非几何引力的宇宙学	366
11.1	宇宙的描述方法与宇宙演化的动力学	366
11.1.1	宇宙的演化动力学	366
11.1.2	非几何引力场	368
11.1.3	引力场源的能量-动量守恒方程	369

11.1.4	引力场源的引力荷矢量流·····	370
11.2	真空宇宙·····	372
11.3	理想宇宙与空间曲率 κ 的物理意义及宇宙常数 Λ ·····	374
11.3.1	理想宇宙与普通物质及空间曲率 κ ·····	374
11.3.2	理想宇宙的引力矢势和引力荷流密度·····	375
11.3.3	宇宙常数 Λ 的作用·····	376
11.4	暗物质·····	377
11.5	宇宙中引力场源物质的分类·····	381
11.6	引力场源物质的状态与宇宙演化规律·····	383
11.6.1	完全相对论状态·····	383
11.6.2	完全松散状态·····	385
11.7	真实宇宙与宇宙加速膨胀机理·····	386
11.7.1	真实宇宙模型与纯物质·····	386
11.7.2	引力场源物质的状态参数·····	387
11.7.3	真实宇宙的演化动力学·····	389
11.7.4	曲率张量与非几何引力场·····	390
11.7.5	宇宙加速膨胀的机理·····	392
11.8	量子宇宙·····	392
11.8.1	极早期的量子宇宙·····	392
11.8.2	量子宇宙尺度因子的限制与奇异性·····	394
11.8.3	演化动力学·····	396
11.8.4	引力场源的能量-动量张量与曲率张量·····	399
11.8.5	引力场源的引力荷矢量流·····	404
11.9	当下宇宙与宇宙演化的总图像·····	404
11.9.1	当下宇宙的观测结果与预测结果·····	404
11.9.2	理论验证与当下宇宙的动力学分析·····	405
11.9.3	各种宇宙常数的估计值·····	408
11.9.4	宇宙演化总图像与无限逼近重现定则·····	409
	参考文献·····	413

第 1 章 广义相对论

任何两个物体之间都存在着相互吸引的现象，这就是牛顿的万有引力定律，是牛顿在 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》一书中首先提出的。万有引力定律指出：任何两个物体之间都有相互吸引力，该引力大小与它们质量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，与这两个物体的化学组成和其间介质的种类无关，其数学表述为

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

式中， F 为这两个物体之间的引力矢量； m_1 和 m_2 分别为这两个物体各自的质量； r 为这两个物体之间的距离矢量；“负”号代表两个物体是相互吸引的； G 为万有引力常数。现在公认的万有引力常数值为： $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 。

万有引力定律揭示了天体运动的规律，在天文学上和宇宙航行计算方面都有着广泛的应用和很高的精度。科学史上哈雷彗星、海王星、冥王星的发现，都是应用万有引力定律取得重大成就的例子。牛顿万有引力定律虽然在解释天体运动中取得了巨大的成就，但仍然存在许多无法解释的问题，这些问题包括：①万有引力定律表现出了超距作用，即引力的传播速度似乎是以无限大速度瞬间完成的；②万有引力定律并不能完全地解释水星在沿其轨道运动到近日点时出现的进动现象，因为牛顿学说的预言与实际观察到的进动相比每世纪会出现约 43 弧秒的误差；③万有引力定律预言的引力作用下光线的偏转角只有实际观测结果的 1/2，等等。

牛顿的理论体系是建立在绝对时间和绝对空间的假设之上的。绝对空间满足三维欧几里得几何，绝对时间均匀流逝，它们的本性与在其中的任何具体物体及其运动是无关的。相对于绝对空间的静止或匀速直线运动的物体为参照物的坐标系是惯性系，任何两个不同的惯性系的空间和时间量之间满足伽利略变换，即对于两个惯性坐标系 $S = (x, y, z, t)$ 和 $S' = (x', y', z', t')$ ，二者沿着 x -轴和 x' -轴（这两个轴是彼此平行的），并以相对的统一速度 v 运动，若两个惯性坐标系的坐标原点 O 和 O' 重叠，取其两个坐标系的时间作为起点，即 $t = t' = 0$ ，那么伽利略变换为

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

在这种变换下，位置、速度是相对的，即相对于不同参考系其数值是不同的；而长度、时

间间隔是绝对的，即相对于不同参考系其数值是不变的。同时性也是绝对的，这表明相对于某一惯性系同时发生的两个事件，相对于其他的惯性系也必定是同时的。另外，牛顿力学规律在伽利略变换下保持形式不变，这一点符合伽利略相对性原理的要求。但是，在牛顿体系中一种简单的宇宙图景是：在无限大的绝对空间和无穷长的绝对时间中，无限多恒星或星系在其中大体静止，平均光度大致均匀。然而，这种简单的宇宙图景在万有引力的作用下是不稳定的，而且连“为什么夜间天空是黑暗的”这种简单的问题都无法回答。19世纪，麦克斯韦总结出的电磁学的麦克斯韦方程组中出现了光速 c 恒量，预言了电磁波的存在，并认为电磁波是在充满光以太的绝对空间中传播的。然而，麦克斯韦方程仅在相对于绝对空间静止的惯性系中成立，电磁波是光以太的波动。这种观念的必然推论是，由于地球相对于光以太的漂移速度而产生光速的变化，但相关的实验都证实并不存在以太漂移。这样，牛顿的绝对空间和光以太观念都受到了挑战。

1905年，爱因斯坦提出狭义相对论，认为时间和空间都是相对的，从而突破了绝对时间和绝对空间的观念，否定了瞬时超距作用，从根本上动摇了建立在这些旧观念基础上的牛顿引力理论。经过约十年的探索，爱因斯坦于1915年提出了近代引力理论——广义相对论。广义相对论克服了牛顿万有引力定律所遇到的困难，完满地说明水星近日点的进动问题；预言光线在引力场中会发生偏转；强引力场中原子发出的光谱线和弱引力场中同种原子发出的同一光谱线相比，前者的光谱向红端移动。这些效应都在不同程度上得到观测和实验的证实。至此，广义相对论成为现代物理学的重要基石，是所有物理学规律必须服从的规则。

1.1 广义相对论原理

20世纪初爱因斯坦提出的狭义相对论否定了19世纪光以太的存在，否定了牛顿的绝对空间和绝对时间，并通过相对性原理和光速不变原理把一维时间和三维空间联系起来，构成了相互联系的四维时间-空间结构。

1. 狭义相对论原理

构成狭义相对论的两条基本原理的第一个原理为**相对性原理**：所有惯性系都是等价的，即物理定律在所有的惯性系中都具有相同的表达形式。该原理表明运动的描述具有相对意义，绝对静止的参考系是不存在的。第二个原理为**光速不变原理**：真空中的光速是与惯性系无关的常数，即它与光源或观测者的运动无关。该原理表明真空是各向同性的，且

在不同的参考系中时间的流逝是不同的。

狭义相对论扩展了伽利略的相对性原理,不仅要求力学规律在不同惯性系中具有同样的形式,而且要求其他物理规律在不同惯性系中也具有同样的形式。爱因斯坦的光速不变原理表明,在不同惯性系中单程光速 c 是不变的。据此,不同惯性系的空间坐标和时间坐标之间不再遵从伽利略变换,而是遵从非齐次的洛伦兹变换。

考虑两个惯性坐标系 $S = (x, y, z, t)$ 和 $S' = (x', y', z', t')$, 二者沿着 x -轴和 x' -轴(这两个轴是彼此平行的),并以相对的均匀速度 v 运动。当两个惯性坐标系的坐标原点 O 和 O' 重叠时,取两个坐标系的时间作为起点,即 $t = t' = 0$ 。则基于上述两条原理可给出著名的洛伦兹变换为^[1]

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.1)$$

狭义相对论要求平直四维时空中的所有四维矢量和张量均满足洛伦兹变换。上述给出的理论仅适用于平直时空。在平直的四维时空中, (x^μ) 与 $(x^\mu + dx^\mu)$ 两点之间的距离 ds 可写为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.2)$$

式中, $g_{\mu\nu}^{(0)}$ 为平直时空的度规,并表示为

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

事实上,平直时空是一个理想的特殊形态,不具有一般性。为此,爱因斯坦于1915年将狭义相对论原理推广到具有一般性的弯曲时空中,并提出了近代几何化的引力理论——广义相对论。

2. 广义相对论原理

由于惯性系无法定义,爱因斯坦将相对性原理推广到非惯性系,提出了广义相对论的第一个原理——**广义相对性原理**(也称**广义协变原理**):所有参考系在描述自然定律时都是等效的,即在不同参考系中一切物理定律完全等价,没有任何描述上的区别。

第二个原理是**光速不变原理**:真空中的光速在任意参考系内都是不变的。它等效于在四维时空中光的时空点是不动的。当时空是平直时,在三维空间中光以光速沿直线运动;当时空是弯曲时,在三维空间中光沿着弯曲的空间运动。可以说引力使光线偏转,但不可加速光子。

第三个原理是**等效原理**：惯性质量等于引力质量。质量有两种，惯性质量是用来度量物体惯性大小的，起初由牛顿第二定律定义，引力质量是度量物体引力荷大小的，起初由牛顿的万有引力定律定义，它们是互不相干的两个定律。广义相对论将惯性质量与引力质量完全相等作为等效原理的内容。惯性质量联系着惯性力，引力质量与引力相联系。这样，非惯性系与引力之间也建立了联系，那么在引力场中的任意一点都可以引入一个很小的自由降落参考系。等效原理使爱因斯坦认识到，引力场很可能不是时空中的外来场，而是一种几何场，是时空本身的一种性质。由于物质的存在，原本平直的时空变成了弯曲的时空。不受力的物体在弯曲时空中就是沿着测地线运动的，且测地线是两点间最短（或最长）的线，是唯一的。

爱因斯坦认为描述物理现象的“物理空间”不必是欧几里得空间，而是由空间中的物质（或能量）分布来决定的，是一般的非欧几里得空间。基于广义相对论原理，描述物理系统的时空是弯曲的，而且普通参考系应该用黎曼几何来描述。

1.2 黎曼张量运算

1854年，G.F.B.黎曼在格丁根大学发表题为“论作为几何学基础的假设”的就职演说。在这篇演说中，黎曼将曲面本身看成是一个独立的几何实体，而不是仅仅把它看成是欧几里得空间中的一个几何实体，并建立了黎曼几何。广义相对论则赋予了黎曼几何实际的物理意义，广义相对性原理要求所有的物理定律在任何时空坐标变换下均有协变性。这种变换性质的研究工具即为黎曼张量的微积分^[1-3]。

1.2.1 黎曼张量

1. 逆变张量和协变张量

我们引用爱因斯坦的“求和符号规则”：凡在一项中有任何重复的指数，即代表对此指数的求和。如针对四维时空中的两个矢量 A_μ 和 B^ν ： $A_\sigma B^\sigma = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$ 。

1) 定义：逆变张量

设 A^ν 为在坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 中的矢量，而在坐标系 (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) 中则变为 A'^μ ，若满足变换关系

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (1.3)$$

则称此矢量为逆变矢量（或一阶逆变张量）。其中 $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$ 为张量在这两个坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 和 (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) 间的协变的微分关系。以此类推，如二阶逆变张量

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}$$

2) 定义：协变张量

设 A_{ν} 为在 (x^0, x^1, x^2, x^3) 中的矢量，在 (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) 中为 A'_{μ} ，若满足变换关系

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu} \quad (1.4)$$

则称此矢量为协变矢量（或一阶协变张量）。以此类推，如二阶协变张量

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}$$

3) 定义：混合张量

设 T^{α}_{ν} 为在 (x^0, x^1, x^2, x^3) 中的张量，在 (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) 中为 T'^{μ}_{ν} ，若满足变换关系

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} T^{\beta}_{\alpha}$$

则此张量为混合张量。

4) 定义：标量

设 $\Phi = \Phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 为在 (x^0, x^1, x^2, x^3) 中的标量，在 (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) 中为 $\Phi' = \Phi(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ 。对于标量函数，在坐标变换过程中其值不变，即 $\Phi = \Phi'$ ，或写为

$$\Phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \Phi(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

2. 度规张量

黎曼几何表明，在任何维度的空间中， (x^{μ}) 与 $(x^{\mu} + dx^{\mu})$ 两点之间的距离写为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1.5)$$

式中， ds 为世界线微分（也称间隔线元或线元），且为一标量； $g_{\mu\nu}$ 为坐标的函数，称之为基本张量——度规。度规 $g_{\mu\nu}$ 为一对称的二阶协变张量，满足

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (1.6)$$

定义逆变度规张量 $g^{\mu\nu}$ 为： $g^{\mu\nu} = D_{\mu\nu}/|g|$ ，其中 $|g|$ 为 $n \times n$ 行列式 $\|g_{\mu\nu}\|$ 的绝对值，而 $D_{\mu\nu}$ 为将行列式 g 中的 μ 列及 ν 行之元素去掉后所形成的 $(n-1) \times (n-1)$ 行列式，再乘上 $(-1)^{\mu+\nu}$ 所得到的新行列式。逆变度规张量满足： $g^{\mu\sigma} = g^{\sigma\mu}$ ，并且有关系

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

度规张量在张量运算中具有特殊的性质，例如利用协变度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可将一逆变矢量