

21

高等学校信息工程类“十三五”规划教材

# 电磁场、微波技术与天线

(第二版)

宋 铮 张建华 编著  
唐 伟 黄 冶

DIANCICHANG WEIWO  
JISHUYU TIANXIAN

继外借



西安电子科技大学出版社  
<http://www.xduph.com>



课件&动画

高等学校信息工程类“十三五”规划教材

# 电磁场、微波技术与天线

(第二版)

宋 铮 张建华 唐 伟 黄 冶 编著



西安电子科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书包含电磁场与电磁波、微波技术基础、天线与电波传播三部分内容。电磁场与电磁波部分介绍了矢量分析、电磁场基本方程、平面电磁波等内容；微波技术基础部分介绍了传输线理论、微波传输线、微波网络基础、微波元件等内容；天线与电波传播部分介绍了天线基础知识、简单线天线、宽频带天线、微带天线、面天线、电波传播等内容。每章末均附有习题，书末附录给出了一些常用的矢量恒等式和一些微波材料的参数，以便读者查阅。

本书内容丰富，自成体系，图文并茂，习题的详细解答以及配套的动画等数字资源可通过扫描二维码轻松获取，对读者学习掌握教材内容会有极大的帮助。本书可作为有关学科的本科教材，亦可作为有关科技人员的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场、微波技术与天线/宋铮等编著. —2版. —西安:西安电子科技大学出版社, 2017.8

高等学校信息工程类“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5606-4622-0

I. ①电… II. ①宋… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②微波技术—高等学校—教材 ③微波天线—高等学校—教材 IV. ①O441.4 ②TN015 ③TN822

### 中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 174896 号

策 划 马乐惠

责任编辑 马乐惠

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西利达印务有限责任公司

版 次 2017年8月第2版 2017年8月第3次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 22.75

字 数 541千字

印 数 8001~11000册

定 价 45.00元

ISBN 978-7-5606-4622-0/O

**XDUP 4914002-3**

\*\*\* 如有印装问题可调换 \*\*\*

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

# 前 言

“电磁场、微波技术与天线”课程是电子信息类本科生的一门专业基础课，它所涉及的内容贯穿了“场”类理论在电子信息系统中的完整应用过程，为电子信息类本科生提供了必要的“场”类知识。通过对该课程的学习，使学生能够应用电磁场基本理论分析无线电系统中微波器件以及天线与电波传播的基本特性，培养学生的科学思维方法，构建更为完整的知识结构。

本书分为三大篇，共 13 章。第一篇为电磁场与电磁波，介绍了矢量分析、电磁场基本方程、平面电磁波，为后续内容奠定了理论基础；第二篇为微波技术基础，介绍了传输线理论、微波传输线、微波网络基础、微波元件；第三篇为天线与电波传播，介绍了天线基础知识、简单线天线、宽频带天线、微带天线、面天线、电波传播。每章末均附有习题，书末附录给出了一些常用的矢量恒等式和一些微波材料的参数，以便读者查阅。

为使教材能够更好地服务于线上、线下一体模式的教学工作，本次修订着重将教材配套的视频、动画以及习题解答等资源以二维码的形式与章节的知识点一一对应，便于读者学习、掌握书中知识，也使教材的形式更加新颖实用。

本书配套的习题涉及电磁场、微波技术与天线的基本理论和应用，解答这些习题可以起到更加深入理解基本概念的作用。因此，本书的数字资源中给出了所有习题的详细解答，期望以此来帮助学生更好地掌握教材的内容，或者有利于其他读者自学。

本书由宋铮、张建华和唐伟合作编写，其中第一篇由张建华编写，第二篇由唐伟编写，第三篇由宋铮编写，每章后面的习题解答部分由黄冶负责，最后由宋铮负责全书的统稿工作。

在本书的编写过程中，参阅了大量的参考文献，得到了许多同志的大力支持与帮助，西安电子科技大学出版社也给予了全程帮助，作者在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在一些不足，敬请广大读者批评指正。

作 者

2017 年 6 月于合肥

# 目 录

## 第一篇 电磁场与电磁波

<b>第 1 章 矢量分析</b> .....	2	2.2.1 $E$ 的切向边界条件 .....	33
1.1 三种常用的坐标系 .....	2	2.2.2 $H$ 的切向边界条件 .....	33
1.1.1 坐标系的构成 .....	2	2.2.3 $D$ 和 $B$ 的法向边界条件 .....	34
1.1.2 三种坐标系坐标变量之间的关系 ..	4	2.3 时谐电磁场的复数表示 .....	35
1.1.3 三种坐标系坐标单位矢量 之间的关系 .....	5	2.4 坡印廷定理 .....	36
1.2 矢量函数的微积分 .....	8	2.5 电磁场的位函数 .....	38
1.2.1 矢量函数的导数 .....	8	2.5.1 位函数的定义 .....	38
1.2.2 矢量函数的积分 .....	10	2.5.2 达朗伯方程 .....	39
1.3 标量函数的梯度 .....	10	2.5.3 滞后位 .....	40
1.3.1 方向导数 .....	10	习题 .....	41
1.3.2 梯度 .....	12	<b>第 3 章 平面电磁波</b> .....	45
1.4 矢量函数的散度 .....	15	3.1 理想介质中的均匀平面波 .....	45
1.4.1 通量 .....	15	3.1.1 波动方程的解 .....	45
1.4.2 散度 .....	16	3.1.2 均匀平面波的传播特性 .....	47
1.4.3 高斯(Gauss)散度定理 .....	17	3.2 均匀平面波的极化 .....	49
1.5 矢量函数的旋度 .....	19	3.2.1 均匀平面波的三种极化形式 .....	49
1.5.1 环量 .....	19	3.2.2 均匀平面波的合成分解及应用 .....	51
1.5.2 旋度 .....	20	3.3 损耗媒质中的均匀平面波 .....	52
1.5.3 斯托克斯(Stokes)定理 .....	22	3.3.1 损耗媒质中的平面波场解 .....	52
1.6 场函数的微分算子和恒等式 .....	23	3.3.2 传播常数和波阻抗的意义 .....	53
1.6.1 哈密顿一阶微分算子及恒等式 .....	23	3.3.3 良导电媒质中的平面波 .....	55
1.6.2 二阶微分算子及恒等式 .....	25	3.4 均匀平面波对平面边界的垂直入射 .....	59
习题 .....	26	3.4.1 对理想导体的垂直入射 .....	59
<b>第 2 章 电磁场基本方程</b> .....	29	3.4.2 对理想介质的垂直入射 .....	61
2.1 麦克斯韦方程组 .....	29	3.5 均匀平面波对平面边界的斜入射 .....	64
2.1.1 麦克斯韦方程组的积分形式 .....	29	3.5.1 沿任意方向传播的平面波 .....	64
2.1.2 麦克斯韦方程组的微分形式 .....	30	3.5.2 平面波对理想介质的斜入射 .....	65
2.1.3 本构关系 .....	31	3.5.3 平面波对理想导体的斜入射 .....	68
2.2 电磁场的边界条件 .....	33	3.5.4 全反射 .....	70
		习题 .....	71

## 第二篇 微波技术基础

<b>第4章 传输线理论</b> .....	76	6.2.3 归一化参量 .....	136
4.1 引言 .....	76	6.3 微波元件等效为微波网络的原理 .....	137
4.2 分布参数 .....	77	6.4 二端口微波网络参量 .....	138
4.3 传输线方程及其解 .....	78	6.4.1 阻抗参量 $[Z]$ .....	138
4.3.1 传输线方程 .....	78	6.4.2 导纳参量 $[Y]$ .....	140
4.3.2 传输线方程的通解与物理意义 .....	78	6.4.3 转移参量 $[A]$ .....	140
4.4 无耗传输线的传输特性 .....	80	6.4.4 散射参量 $[S]$ .....	141
4.5 端接负载的均匀无耗传输线 .....	82	6.4.5 传输参量 $[T]$ .....	143
4.5.1 波的反射现象 .....	82	6.5 基本电路单元的参量矩阵 .....	145
4.5.2 传输线的三种工作状态 .....	85	6.6 微波网络的工作特性参量 .....	146
4.6 圆图及其应用 .....	90	习题 .....	148
4.6.1 圆图的构成 .....	90	<b>第7章 微波元件</b> .....	151
4.6.2 阻抗圆图的特点 .....	91	7.1 引言 .....	151
4.6.3 导纳圆图 .....	92	7.2 简单元件 .....	151
4.6.4 圆图应用举例 .....	94	7.2.1 终端器件与连接器件 .....	151
4.7 传输线阻抗匹配 .....	96	7.2.2 衰减器与移相器 .....	155
4.7.1 阻抗匹配的概念 .....	96	7.2.3 波导分支结构 .....	157
4.7.2 阻抗匹配法 .....	97	7.3 阻抗调配器和阻抗变换器 .....	160
习题 .....	100	7.3.1 微波电抗元件 .....	161
<b>第5章 微波传输线</b> .....	103	7.3.2 阻抗调配器 .....	164
5.1 引言 .....	103	7.3.3 $\lambda/4$ 阻抗变换器 .....	164
5.2 TE模和TM模传输线 .....	103	7.4 定向耦合器与功率分配器 .....	166
5.2.1 波导系统场解法 .....	104	7.4.1 定向耦合器技术指标 .....	166
5.2.2 矩形波导 .....	105	7.4.2 波导双孔定向耦合器 .....	167
5.2.3 圆波导 .....	116	7.4.3 波导十字槽孔定向耦合器 .....	168
5.3 TEM模传输线 .....	122	7.4.4 平行耦合线耦合器 .....	169
5.3.1 同轴线 .....	122	7.4.5 功率分配器 .....	171
5.3.2 带状线 .....	125	7.5 微波谐振器 .....	173
5.3.3 微带线 .....	127	7.5.1 矩形谐振腔 .....	174
习题 .....	130	7.5.2 圆柱形谐振腔 .....	175
<b>第6章 微波网络基础</b> .....	132	7.5.3 同轴谐振腔 .....	177
6.1 引言 .....	132	7.6 微波滤波器 .....	178
6.2 波导传输线与双线传输线的等效 .....	132	7.7 微波铁氧体元件 .....	181
6.2.1 等效的基础与归一化条件 .....	133	7.7.1 铁氧体对圆极化波的导磁率 .....	181
6.2.2 等效特性阻抗 .....	134	7.7.2 微波铁氧体元件 .....	182
		习题 .....	186

### 第三篇 天线与电波传播

<b>第 8 章 天线基础知识</b> .....	190
8.1 引言 .....	190
8.2 基本振子(Short Dipole)的辐射 .....	190
8.2.1 电基本振子的辐射 .....	190
8.2.2 磁基本振子的辐射 .....	193
8.3 发射天线的电参数 (Basic Antenna Parameters) .....	195
8.3.1 方向函数 .....	195
8.3.2 方向图(Field Pattern) .....	196
8.3.3 方向图参数 .....	197
8.3.4 方向系数(Directivity) .....	197
8.3.5 天线效率(Efficiency) .....	199
8.3.6 增益系数(Gain) .....	200
8.3.7 天线的极化(Polarization) .....	201
8.3.8 有效长度(Effective Length) .....	201
8.3.9 输入阻抗与辐射阻抗(Input Resistance and Radiation Resistance) .....	202
8.3.10 频带宽度(Bandwidth) .....	202
8.4 互易定理与接收天线的电参数 .....	203
8.4.1 互易定理 .....	203
8.4.2 有效接收面积(Effective Aperture) .....	204
8.5 对称振子(Symmetrical Center-Fed Dipole) .....	204
8.5.1 电流分布 .....	204
8.5.2 对称振子的辐射场 .....	205
8.5.3 对称振子的输入阻抗 .....	208
8.6 天线阵(Arrays)的方向性 .....	208
8.6.1 二元阵(Two Element Arrays)的 方向性 .....	209
8.6.2 均匀直线阵(Uniform Linear Arrays) .....	214
8.7 对称振子阵的阻抗特性 .....	221
8.7.1 二元阵的阻抗 .....	221
8.7.2 直线阵的阻抗 .....	225
8.8 无限大理想导电反射面对天线 电性能的影响 .....	226
8.8.1 天线的镜像 .....	226
8.8.2 无限大理想导电反射面对天线 电性能影响的分析 .....	227
习题 .....	230
<b>第 9 章 简单线天线</b> .....	235
9.1 引言 .....	235
9.2 水平对称天线 .....	235
9.2.1 双极天线 .....	235
9.2.2 笼形天线 .....	242
9.2.3 V形对称振子 .....	244
9.2.4 电视发射天线 .....	245
9.3 直立天线 .....	248
9.4 引向天线 .....	254
9.4.1 引向天线的工作原理 .....	254
9.4.2 引向天线的电特性 .....	259
9.4.3 半波折合振子(Half-Wave Folded Dipole) .....	261
9.4.4 平衡器(Balun)——对称 天线的馈电 .....	262
习题 .....	265
<b>第 10 章 宽频带天线</b> .....	267
10.1 引言 .....	267
10.2 行波单导线及菱形天线 .....	267
10.2.1 行波单导线 .....	267
10.2.2 菱形天线 .....	269
10.3 螺旋天线(Helical Antenna) .....	274
10.3.1 圆极化波及其应用 .....	274
10.3.2 螺旋天线的工作原理 .....	274
10.3.3 螺旋天线的电参数估算 .....	277
10.4 非频变天线 .....	277
10.4.1 平面等角螺旋天线 .....	278
10.4.2 阿基米德螺旋天线 .....	280
10.4.3 对数周期天线(Log-Periodic Antenna, LPA) .....	281
习题 .....	288
<b>第 11 章 微带天线</b> .....	290

11.1 引言	290	13.1 引言	320
11.2 矩形微带天线(Rectangular-Patch Microstrip Antenna)	290	13.1.1 电磁波谱	320
11.3 双频微带天线(Dual-Band Microstrip Antenna)	293	13.1.2 电波传播的主要方式	321
习题	296	13.2 自由空间电波传播	322
<b>第 12 章 面天线</b>	297	13.2.1 自由空间传播损耗计算	322
12.1 引言	297	13.2.2 菲涅尔区概念	324
12.2 等效原理(Field Equivalence Theorem)与惠更斯元的辐射	297	13.3 地面波传播	327
12.3 平面口径(Planar Aperture)的 辐射	300	13.3.1 地球表面电特性	327
12.3.1 一般计算公式	300	13.3.2 波前倾斜现象	329
12.3.2 同相平面口径的辐射	301	13.3.3 地面波传播特性	330
12.3.3 相位偏移对口径辐射场的影响	304	13.3.4 地面波场强的计算	331
12.4 喇叭天线(Horn Antenna)	305	13.4 天波传播	332
12.4.1 矩形喇叭天线的口径场与 方向图	306	13.4.1 电离层概况	333
12.4.2 圆锥喇叭(Conical Horn)	310	13.4.2 无线电波在电离层中的传播	336
12.5 旋转抛物面天线	311	13.4.3 短波天波传播	339
12.5.1 几何特性与工作原理	311	13.5 视距传播	340
12.5.2 抛物面天线的口径场	313	13.5.1 地面对视距传播的影响	340
12.5.3 抛物面天线的辐射场	315	13.5.2 对流层大气对视距 传播的影响	346
12.5.4 抛物面天线的馈源(Feeds)	316	习题	348
12.6 卡塞格伦天线	317	<b>附录</b>	351
习题	318	附录 1 矢量恒等式	351
<b>第 13 章 电波传播</b>	320	附录 2 常用导体材料的特性	353
		附录 3 一些材料的介电常数和 损耗角正切(10 GHz 时)	354
		附录 4 微带线常用导体材料的特性	354
		<b>参考文献</b>	355



# 第一篇 电磁场与电磁波

研究宏观电磁现象和现代工程电磁问题的理论基础是麦克斯韦方程组。麦克斯韦理论表明,时变磁场将激发时变电场,而时变电场又将激发时变磁场,电场和磁场互为激发源,相互激发。电场和磁场不再相互独立,而是相互关联,构成一个整体——电磁场,电场和磁场分别为电磁场的两个分量。在离开辐射源(如天线)的无源空间中,电荷和电流为零,电场和磁场仍然可以相互激发,从而在空间形成电磁振荡并传播,这就是电磁波。我们知道的无线电波、电视信号、雷达波束、激光、X射线和 $\gamma$ 射线等都是电磁波。

第一篇“电磁场与电磁波”包括三章内容。第1章“矢量分析”是电磁场与电磁波的数学基础,比较系统地介绍了有关矢量分析的基本知识,主要包括梯度、散度、旋度、散度定理、斯托克斯定理、矢量恒等式等。掌握矢量分析工具将为学习本课程奠定必要的基础。第2章“电磁场基本方程”以大学物理中的麦克斯韦方程组的积分形式为基础,引入麦克斯韦方程组的微分形式,介绍了电磁场的边界条件、时谐场的复数表示、电磁场中的能量关系。在时变电磁场中,由场源求解出电场和磁场的相对简单的方法,就是引入辅助的位函数,它能使问题的分析简化,因此第2章还介绍了电磁场的位函数、达朗伯方程和滞后位。第3章“平面电磁波”,介绍了平面波在无限大的无耗媒质和有耗媒质中的传播特性、平面电磁波的极化、平面电磁波的反射和折射。平面波是一种最简单、最基本的电磁波,因此,平面波是研究电磁波的基础,有着十分重要的理论价值。

通过电磁场与电磁波基础理论的学习,让学生能够掌握宏观电磁现象的基本规律和基本性质,建立电磁场的完整概念;能够运用场论数学定量分析电磁场问题;能够应用“场”的观点对电子工程中的电磁现象进行定性分析和初步判断。学好电磁场理论将帮助学生形成科学的知识结构,为后续课程的学习提供必要的理论基础。

# 第 1 章 矢量分析

电场和磁场都是矢量，因此矢量分析是研究电磁场理论的重要数学工具。本章中将系统地介绍矢量分析的基本知识，重点是梯度、散度、旋度及相关的重要定理和恒等式。

## 1.1 三种常用的坐标系

为了研究某一物理量在空间的分布和变化规律，常常根据被研究对象的几何形状的不同而采用不同的坐标系，以使问题得以简化。在电磁场理论中，用得最多的是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

### 1.1.1 坐标系的构成

#### 1. 直角坐标系

直角坐标系中的三个坐标变量是  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，如图 1-1-1 所示，它们的变化范围是

$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

空间任一点  $M(x, y, z)$  的  $x$  坐标变量是点  $M$  到平面  $yOz$  的垂直距离， $y$  坐标变量是点  $M$  到平面  $xOz$  的垂直距离， $z$  坐标变量是点  $M$  到平面  $xOy$  的垂直距离。

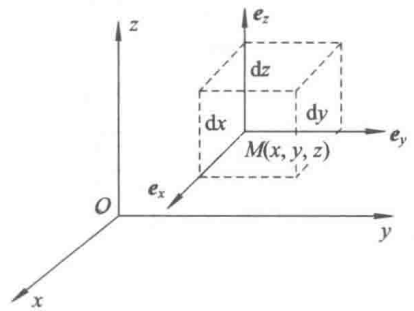


图 1-1-1 直角坐标系

过空间任意点的坐标矢量记为  $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$ ，它们相互正交，而且遵循  $e_x \times e_y = e_z$  的右手螺旋法则。 $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$  的方向不随  $M$  点位置的变化而变化，这是直角坐标系的一个很重要的特征。在直角坐标系内的任一矢量  $\mathbf{A}$  可表示为

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1-1-1)$$

其中， $A_x$ 、 $A_y$ 、 $A_z$  分别是矢量  $\mathbf{A}$  在  $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$  方向上的投影。

由点  $M(x, y, z)$  沿  $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$  方向分别取微分长度元  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$ 。由  $x$ ， $x+dx$ ； $y$ ， $y+dy$ ； $z$ ， $z+dz$  这六个面决定一个直角六面体，它的各个面的面积元是

$$\begin{cases} dS_x = dy dz & (\text{与 } e_x \text{ 垂直}) \\ dS_y = dx dz & (\text{与 } e_y \text{ 垂直}) \\ dS_z = dx dy & (\text{与 } e_z \text{ 垂直}) \end{cases} \quad (1-1-2)$$

体积元是:  $d\tau = dx dy dz$ 。

## 2. 圆柱坐标系

圆柱坐标系(简称柱坐标系)中的三个坐标变量是  $\rho$ 、 $\varphi$ 、 $z$ ，如图 1-1-2 所示。 $z$  变量与直角坐标系的相同，是点  $M$  到  $xOy$  平面的垂直距离； $\rho$  是点  $M$  到  $z$  轴的垂直距离；将点  $M$  在  $xOy$  平面投影为  $M'$ ， $\varphi$  是  $OM'$  与  $x$  轴的夹角。各变量的变化范围是

$$\begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

过空间任意点  $M(\rho, \varphi, z)$  的坐标单位矢量为  $e_\rho$ 、 $e_\varphi$ 、 $e_z$ ，如图 1-1-2 所示，它们相互正交，并遵循  $e_\rho \times e_\varphi = e_z$  的右手螺旋法则。值得注意的是，除  $e_z$  外， $e_\rho$ 、 $e_\varphi$  的方向都随  $M$  点位置的变化而变化，但三者之间总是保持上述正交关系。在  $M$  点的任一矢量  $A$  可表示为

$$A = e_\rho A_\rho + e_\varphi A_\varphi + e_z A_z \quad (1-1-3)$$

其中， $A_\rho$ 、 $A_\varphi$ 、 $A_z$  分别是矢量  $A$  在  $e_\rho$ 、 $e_\varphi$ 、 $e_z$  方向上的投影。

在点  $M(\rho, \varphi, z)$  处沿  $e_\rho$ 、 $e_\varphi$ 、 $e_z$  方向的长度元分别是

$$\begin{cases} dl_\rho = d\rho \\ dl_\varphi = \rho d\varphi \\ dl_z = dz \end{cases} \quad (1-1-4)$$

与三个坐标单位矢量相垂直的面积元分别是

$$\begin{cases} dS_\rho = dl_\varphi dl_z = \rho d\varphi dz & (\text{与 } e_\rho \text{ 垂直}) \\ dS_\varphi = dl_\rho dl_z = d\rho dz & (\text{与 } e_\varphi \text{ 垂直}) \\ dS_z = dl_\rho dl_\varphi = \rho d\rho d\varphi & (\text{与 } e_z \text{ 垂直}) \end{cases} \quad (1-1-5)$$

体积元是:

$$d\tau = dl_\rho dl_\varphi dl_z = \rho d\rho d\varphi dz \quad (1-1-6)$$

## 3. 球坐标系

球坐标系中的三个坐标变量是  $r$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$ ，如图 1-1-3 所示， $r$  是点  $M$  到原点的直线距离， $\theta$  是正方向  $z$  轴与连线  $OM$  之间的夹角， $\theta$  称为极角， $\varphi$  与柱坐标系的相同， $\varphi$  称为方位角。它们的变化范围是

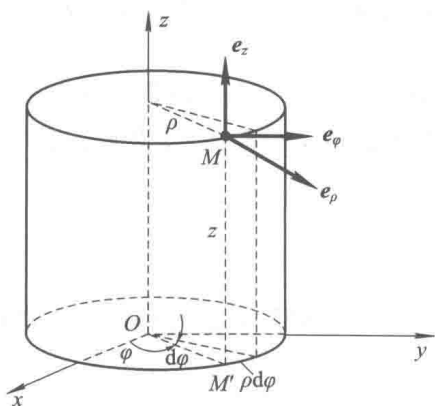


图 1-1-2 柱坐标系

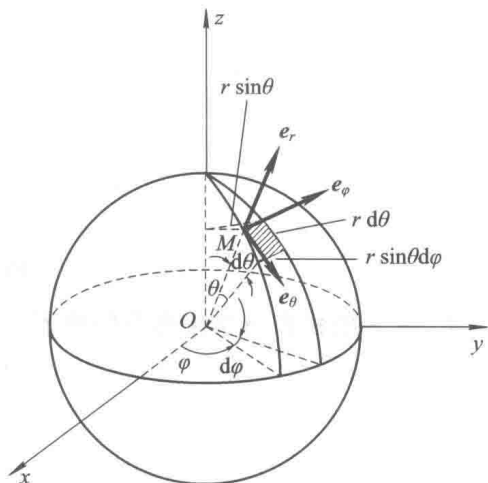


图 1-1-3 球坐标系

$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

过空间任意点  $M(r, \theta, \varphi)$  的坐标单位矢量为  $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$ ，如图 1-1-3 所示，它们相互正交，并遵循  $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi$  的右手螺旋法则。必须注意， $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$  和  $\mathbf{e}_\varphi$  的方向都因  $M$  点位置的变化而变化，但三者之间总是保持上述正交关系。在点  $M$  的任一矢量  $\mathbf{A}$  可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi \quad (1-1-7)$$

其中， $A_r$ 、 $A_\theta$ 、 $A_\varphi$  分别是矢量  $\mathbf{A}$  在  $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$  方向上的投影。

在点  $M(r, \theta, \varphi)$  处沿  $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$  方向的长度元分别是

$$\begin{cases} dl_r = dr \\ dl_\theta = r d\theta \\ dl_\varphi = r \sin\theta d\varphi \end{cases} \quad (1-1-8)$$

与三个坐标单位矢量相垂直的面积元分别是

$$\begin{cases} dS_r = dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi & (\text{与 } \mathbf{e}_r \text{ 垂直}) \\ dS_\theta = dl_r dl_\varphi = r \sin\theta dr d\varphi & (\text{与 } \mathbf{e}_\theta \text{ 垂直}) \\ dS_\varphi = dl_r dl_\theta = r dr d\theta & (\text{与 } \mathbf{e}_\varphi \text{ 垂直}) \end{cases} \quad (1-1-9)$$

体积元是

$$d\tau = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (1-1-10)$$

### 1.1.2 三种坐标系坐标变量之间的关系

由图 1-1-4 所示的几何关系，可直接写出三种坐标系的坐标变量之间的关系。

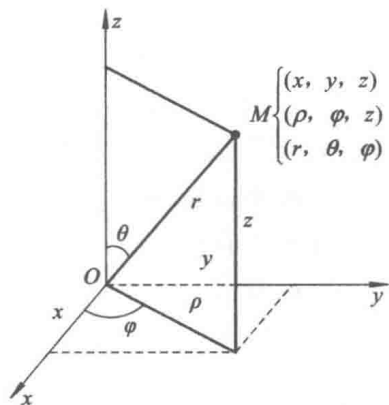


图 1-1-4 三种坐标系的坐标变量之间的关系

#### 1. 直角坐标系与柱坐标系的关系

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1-1-11)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases} \quad (1-1-12)$$

## 2. 直角坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (1-1-13)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (1-1-14)$$

## 3. 柱坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} \rho = r \sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (1-1-15)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arcsin \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases} \quad (1-1-16)$$

### 1.1.3 三种坐标系坐标单位矢量之间的关系

直角坐标系和柱坐标系都有一个  $z$  变量, 有一个共同的坐标单位矢量  $\mathbf{e}_z$ , 其他坐标矢量都落在  $xOy$  平面内。因此, 这两种坐标系的坐标矢量及其关系可以用图 1-1-5 表示出来, 这种变换关系写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (1-1-17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (1-1-18)$$

柱坐标系和球坐标系都有一个  $\varphi$  变量, 有一个共同的坐标单位矢量  $\mathbf{e}_\varphi$ , 而其他坐标矢量都落在过  $z$  轴的平面内。因此, 这两种坐标系的坐标矢量及其关系可以用图 1-1-6 表示出来, 将这种变换关系写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (1-1-19)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} \quad (1-1-20)$$

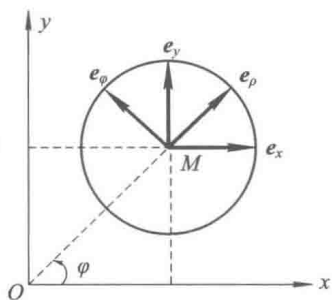


图 1-1-5 直角坐标系与柱坐标系的坐标单位矢量之间的关系

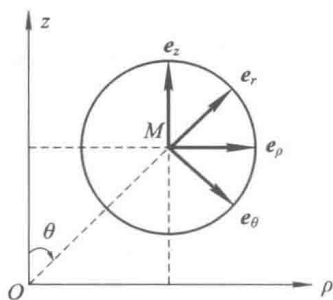


图 1-1-6 柱坐标系与球坐标系的坐标单位矢量之间的关系

直角坐标系和球标系的坐标单位矢量间关系要用三维空间图形才能表示出来，其图解要复杂一些。但利用前面得到的坐标单位矢量之间的相互转换关系，将式(1-1-17)代入式(1-1-19)，将式(1-1-20)代入式(1-1-18)可以得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (1-1-21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} \quad (1-1-22)$$

从前面的公式可以看出，式(1-1-17)与式(1-1-18)、式(1-1-19)与式(1-1-20)、式(1-1-21)与式(1-1-22)的转换系数矩阵互为逆矩阵，不难看出，这些转换矩阵也互为转置矩阵。这是因为，这些转换矩阵都是酉矩阵，酉矩阵具有  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  的性质。

**例 1-1-1** 如果有一矢量在柱坐标系下的表达式为  $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$ ，试求出它在直角坐标系下的各分量大小。

**解** 利用式(1-1-17)，可得

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x = A_\rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_x + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_x + A_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = A_\rho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$$

$$A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_y = A_\rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_y + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y = A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$$

$$A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z = A_\rho \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_z + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z + A_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = A_z$$

将上式写成简明矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

显然，上式与式(1-1-18)一致。其他坐标系的矢量变换可以类似得到，它们与坐标单位矢量的变换是一致的。

**例 1-1-2** 写出空间任一点在直角坐标系下的位置矢量表达式，然后将此位置矢量转换成在柱坐标系和球坐标系下的矢量。

解 在空间任一点  $P(x, y, z)$  的位置矢量为

$$\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

利用例 1-1-1 中的结论, 得

$$A_\rho = x \cos\varphi + y \sin\varphi$$

$$A_\varphi = -x \sin\varphi + y \cos\varphi$$

$$A_z = z$$

代入  $x = \rho \cos\varphi$ ,  $y = \rho \sin\varphi$ , 得

$$A_\rho = \rho$$

$$A_\varphi = 0$$

$$A_z = z$$

于是, 位置矢量在柱坐标系下得表达式为

$$\mathbf{A} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$$

同理可得, 在球坐标系下得位置矢量表达式为

$$\mathbf{A} = r\mathbf{e}_r$$

可见, 位置矢量在不同坐标系下得到的表达式是不同的。

**例 1-1-3** 试判断下列矢量场  $\mathbf{E}$  是否是均匀矢量场:

(1) 在柱坐标系中  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho E_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi E_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_z E_2$ , 其中  $E_1$ 、 $E_2$  都是常数。

(2) 在球坐标系中  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E_0$ , 其中  $E_0$  是常数。

**解** 均匀矢量场  $\mathbf{E}$  的定义是: 在场中所有点上,  $\mathbf{E}$  的模处处相等,  $\mathbf{E}$  的方向彼此平行。只要这两个条件中有一个不符合就称为非均匀矢量场。

因为只有直角坐标系中各点的坐标单位矢量方向是固定的, 而在柱坐标系和球坐标系中的各单位坐标矢量的方向随空间点位置的变化而变化, 所以为了判断场是否均匀, 最好将柱、球坐标系的矢量转换为直角坐标系的矢量。

(1) 由式(1-1-18)得

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \sin\varphi \\ E_1 \cos\varphi \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_1 + \mathbf{e}_z E_2$$

$\mathbf{E}$  的模  $|\mathbf{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \text{常数}$ ,  $\mathbf{E}$  与  $y$  轴的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{E_2}{E_1} = \text{常数}$$

所以  $\mathbf{E}$  是均匀矢量场。

(2)  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E_0$ , 虽然这一矢量场在各点的模是一个常数, 但它的方向是  $\mathbf{e}_r$  的方向。显然在不同点,  $\mathbf{e}_r$  的方向是不同的, 所以它不是均匀矢量场。利用式(1-1-22), 将球坐标单位矢量转换为直角坐标单位矢量后得

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \cdot E_0 = \mathbf{e}_x E_0 \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{e}_y E_0 \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{e}_z E_0 \cos\theta$$

可以看出,  $\theta = 0^\circ$  时,  $\mathbf{E}$  的方向是沿  $z$  轴的; 而当  $\theta = 90^\circ$  时, 则没有  $z$  轴分量, 这清楚地说明  $\mathbf{E}$  在不同点有不同的方向。

## 1.2 矢量函数的微积分

### 1.2.1 矢量函数的导数

若一个矢量,无论是模还是方向,或两者都是一个自变量或是几个自变量的函数,则称其为矢量函数。

设  $\mathbf{F}(u)$  是单变量  $u$  的矢量函数,矢量函数  $\mathbf{F}(u)$  对  $u$  的导数定义为

$$\frac{d\mathbf{F}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(u + \Delta u) - \mathbf{F}(u)}{\Delta u} \quad (1-2-1)$$

这里假定此极限存在。在一般情况下,矢量的增量  $\Delta \mathbf{F}$  不一定与矢量  $\mathbf{F}$  的方向相同,如图 1-2-1 所示,一阶导数  $d\mathbf{F}/du$  仍然是一个矢量函数。逐次求导,就可得到  $\mathbf{F}$  的二阶导数  $d^2\mathbf{F}/du^2$  以及更高阶导数。

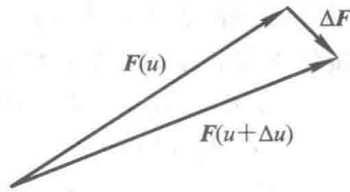


图 1-2-1 矢量微分示意图

如果  $f$  和  $\mathbf{F}$  分别是变量的标量函数和矢量函数,则它们的积的导数由式(1-2-1)可得

$$\frac{d(f\mathbf{F})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(f + \Delta f)(\mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}) - f\mathbf{F}}{\Delta u} = f \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta u} + \mathbf{F} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta u} \Delta f$$

当  $\Delta u \rightarrow 0$  时,上式右端第三项趋向于零。因此有

$$\frac{d(f\mathbf{F})}{du} = f \frac{d\mathbf{F}}{du} + \mathbf{F} \frac{df}{du} \quad (1-2-2)$$

可见,  $f$  和  $\mathbf{F}$  之积的导数在形式上与两个标量函数之积的导数运算法则相同。

如果  $\mathbf{F}$  是多变量(如  $u_1, u_2, u_3$ )的函数,则对一个变量  $u_1$  的偏导数的定义是

$$\frac{\partial \mathbf{F}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1} = \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(u_1 + \Delta u_1, u_2, u_3) - \mathbf{F}(u_1, u_2, u_3)}{\Delta u_1} \quad (1-2-3)$$

对其余变量的偏导数有相同的表达式。由式(1-2-3)可以证明

$$\frac{\partial (f\mathbf{F})}{\partial u_1} = f \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_1} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial u_1} \quad (1-2-4)$$

对  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_1}$  再次取偏微分又可以得到诸如  $\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u_1^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u_1 \partial u_2}$  等这样一些矢量函数。若  $\mathbf{F}$  至少有连续的二阶偏导数,则有

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u_2 \partial u_1}$$

在直角坐标系中,坐标单位矢量都是常矢量,其导数为零。利用式(1-2-4)则有



$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y + \mathbf{e}_z E_z) \\ &= E_x \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial x} + \mathbf{e}_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ &= \mathbf{e}_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_z}{\partial x}\end{aligned}$$

由此可以得出结论：在直角坐标系中，矢量函数对某一坐标变量的偏导数(或导数)仍然是个矢量，它的各个分量等于原矢量函数各分量对该坐标变量的偏导数(或导数)的矢量和。简单地说，只要把坐标单位矢量提到微分号外就可以了。

在柱坐标和球坐标系中，由于一些坐标单位矢量不是常矢量，在求导数时，不能把坐标单位矢量提到微分符号之外。在柱坐标系中，各坐标单位矢量对空间坐标变量的偏导数是：

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0 \quad (1-2-5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \quad (1-2-5b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\rho \quad (1-2-5c)$$

上式可用作图法或解析法证明，下面以解析法为例，根据柱坐标系的坐标单位矢量  $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$ 、 $\mathbf{e}_z$  与直角坐标系中的坐标单位矢量  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$  的关系式(1-1-17)，有

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y$$

利用上式可得

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y) = -\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y) = -\cos\varphi \mathbf{e}_x - \sin\varphi \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_\rho$$

在上式推导中，使用了直角坐标系中的坐标单位矢量是常矢量这一特性。在柱坐标系下， $\mathbf{e}_z$  是常矢量，它对任何一个坐标变量求导都为零， $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\varphi$ 、 $\mathbf{e}_z$  都不随  $\rho$ 、 $z$  的变化而变化，也就是说它们对  $\rho$ 、 $z$  求导也为零。

在球坐标系中，各坐标单位矢量对空间坐标变量的偏导数是

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \sin\theta \quad (1-2-6a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \cos\theta \quad (1-2-6b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\theta \cos\theta - \mathbf{e}_r \sin\theta \quad (1-2-6c)$$

在柱、球坐标系中，求矢量函数对坐标变量的偏导数时，必须考虑式(1-2-5)和式(1-2-6)中的各个关系式。例如，在柱坐标系中，矢量函数可表示为

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \mathbf{e}_\rho E_\rho + \mathbf{e}_\varphi E_\varphi + \mathbf{e}_z E_z$$

$\mathbf{E}$  对坐标变量  $\varphi$  的偏导数是