

田景峰 哈明虎 著

Hölder不等式 及其应用

清华大学出版社

田景峰 哈明虎 著

Hölder不等式 及其应用



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

Hölder 不等式在数学的众多分支中扮演着重要的角色,并且在统计学、管理学等领域也有着广泛的应用.本书的目的就是介绍 Hölder 不等式的近期发展概况,内容包括 5 章.第 1~3 章介绍了 Hölder 不等式的推广、改进和一些性质;第 4 章介绍了 Hölder 不等式在 Aczél 型不等式的推广和改进中的应用;第 5 章给出了 Hölder 不等式在统计学和管理学中的两个应用.

本书的读者对象为高等院校数学专业及相关专业高年级本科生、研究生,也可供相关专业的教师及广大数学工作者参考.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

Hölder 不等式及其应用/田景峰,哈明虎著.—北京:清华大学出版社,2017

ISBN 978-7-302-45440-3

I. ①H… II. ①田… ②哈… III. ①Hölder 不等式 IV. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 274504 号

责任编辑:陈 明

封面设计:傅瑞学

责任校对:刘玉霞

责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印装者:北京泽宇印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×230mm 印 张:14 字 数:266 千字

版 次:2017 年 12 月第 1 版 印 次:2017 年 12 月第 1 次印刷

印 数:1~1500

定 价:45.00 元

产品编号:068109-01

前 言

经典的 Hölder 不等式是数学家 Hölder 于 1889 年给出的如下形式的不等式:

$$\sum_{r=1}^n a_r b_r \leq \left(\sum_{r=1}^n a_r^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{r=1}^n b_r^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $a_r, b_r \geq 0 (r = 1, 2, \dots, n)$, $p \geq q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (当 $a_r, b_r > 0, r = 1, 2, \dots, n$, $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时, 不等号反向) [24].

众所周知, Hölder 不等式在现代数学的很多分支中都扮演着重要的角色, 如实分析和复分析、概率论和数理统计、模糊积分、微分方程、算子理论等. 甚至有的学者称其为“数学众多领域的基石”“深入解决问题的桥梁”. 著名数学家 Hardy、Littlewood 及 Polya 在其名著《不等式》中再三强调 Hölder 不等式“极为重要”和“到处都要用到”, 这个不等式和 Minkowski 不等式、算术平均与几何平均不等式构成了该名著中前 6 章的主题, 占了全书一半以上的篇幅. 一百多年来, 出现了大量的关于这个不等式的改进、推广以及应用的文献 [37].

近期对于 Hölder 不等式的研究又有了新的重要的进展, 主要体现在以下几个方面:

一是 Hölder 不等式在新兴数学领域的推广. 如 Wong 等 [86] 给出了时标理论的 Hölder 不等式的 Δ 积分形式, Özkan 等 [49] 给出了 Hölder 不等式的 ∇ 积分形式以及 $\diamond$ 积分形式, Yang [93]、Chen 和 Chen [14] 分别给出了上述结果在时标理论中的函数推广形式; 刘宝碇 [27] 给出了 Hölder 不等式在不确定理论中的形式; Wu 等 [88] 给出了 Hölder 不等式关于 Sugeno 积分的形式, Agahi 等 [3] 给出了 Hölder 不等式关于伪积分的形式; Falconer [16] 给出了关于正则根树的 Hölder 不等式等. 这些新的推广不仅具有重要的理论意义和应用价值, 而且很多都已成为各自领域的基石.

二是 Hölder 不等式的改进. 尽管 Hölder 不等式在数学的众多领域中都起着重要的作用, 但是有些问题用 Hölder 不等式估计时往往得不到较为精确的

目 录

第 1 章 Hölder 不等式的推广	1
1.1 实分析中 Hölder 不等式的推广	3
1.2 Hölder 不等式在 Sugeno 积分和伪积分中的推广	7
1.2.1 关于 Sugeno 积分的 Hölder 不等式	7
1.2.2 关于伪积分的 Hölder 不等式	10
1.3 Hölder 不等式的时标形式	20
1.4 $PM^{a,b}$ 空间的 Hölder 型不等式	49
1.5 关于矩阵的和与乘积的 Hölder 不等式形式	51
第 2 章 Hölder 不等式的改进	58
2.1 Hölder 不等式的第一种改进	58
2.2 Hölder 不等式的第二种改进	69
2.3 Hölder 不等式的第三种改进	77
2.4 Hölder 不等式的第四种改进	99
第 3 章 实分析中推广的 Hölder 不等式构成的函数的单调性	124
3.1 n 维 Hölder 不等式构成的函数的单调性	127
3.2 指数一般化的 Hölder 不等式构成的函数的单调性	133
第 4 章 Hölder 不等式在 Aczél 型不等式的推广和改进中的应用	144
4.1 在 Aczél 型不等式的第一种推广和改进中的应用	146
4.2 在 Aczél 型不等式的第二种推广和改进中的应用	154
4.3 在 Aczél 型不等式的第三种推广和改进中的应用	158
4.4 在 Aczél 型不等式的第四种推广和改进中的应用	168
4.5 在 Aczél 型不等式的第五种推广和改进中的应用	176
4.6 在 Aczél 型不等式的第六种推广和改进中的应用	190

第 5 章 Hölder 不等式在统计学和管理学中的应用	194
5.1 Hölder 不等式在统计学中的应用	194
5.2 Hölder 不等式在管理学中的应用	200
参考文献	210

第 1 章

Hölder不等式的推广

自从 Hölder 给出 Hölder 不等式以来, 出现了大量的关于这个不等式的推广. 本章并不想把所有的结果都罗列出来, 只想给出 Hölder 不等式的最新的重要的推广. 因而本章给出的关于 Hölder 不等式的推广的成果, 并不能涵盖目前关于 Hölder 不等式研究的全部成果, 关于 Hölder 不等式的其他的推广, 读者可以参考相关文献^[34,39,44,48].

为了方便读者, 首先给出本书中经常用到的一些基本的不等式.

定理1.0.1 (Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz不等式) 设 $a_r, b_r (r = 1, 2, \dots, n)$ 为实数, 则

$$\left(\sum_{r=1}^n a_r b_r \right)^2 \leq \left(\sum_{r=1}^n a_r^2 \right) \left(\sum_{r=1}^n b_r^2 \right). \quad (1.1)$$

定理1.0.2 (Hölder不等式) 如果 $a_r, b_r \geq 0 (r = 1, 2, \dots, n)$, $p \geq q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\sum_{r=1}^n a_r b_r \leq \left(\sum_{r=1}^n a_r^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{r=1}^n b_r^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2)$$

如果 $a_r, b_r > 0 (r = 1, 2, \dots, n)$, $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则上述不等式(1.2)反向.

相应的积分型 Hölder 不等式如下面定理所述:

定理1.0.3 设 $f(x), g(x) \geq 0$. 如果 $p \geq q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\int f(x)g(x)dx \leq \left(\int f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}; \quad (1.3)$$

如果 $p > 0, q < 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有反向不等式

$$\int f(x)g(x)dx \geq \left(\int f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.4)$$

此时要求 $f(x), g(x) > 0$.

定理1.0.4 (AG不等式) 设 $a_r \geq 0, q_r > 0 (r = 1, 2, \dots, n)$, 并且 $\sum_{r=1}^n q_r = 1$, 则有

$$\prod_{r=1}^n a_r^{q_r} \leq \sum_{r=1}^n q_r a_r. \quad (1.5)$$

定理1.0.5 (Young不等式) 设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则当 $1 < p < \infty$ 时, 有

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q; \quad (1.6)$$

当 $0 < p < 1$ 时, 则有反向不等式

$$|ab| \geq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q. \quad (1.7)$$

定理1.0.6 (Jensen不等式) 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i > 0$, 并且 $t_r(\mathbf{a}) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} (r \neq 0)$, 则对于 $0 < r < s, r < s < 0$ 或 $s < 0 < r$, 有

$$t_s(\mathbf{a}) < t_r(\mathbf{a}). \quad (1.8)$$

定理1.0.7 [8] 如果 $x > -1, \alpha > 1$ 或者 $\alpha < 0$, 则有

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \quad (1.9)$$

当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时, 上述不等式反向.

定理1.0.8 [19] 如果 $x_i \geq 0, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, 0 < p \leq 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right)^p. \quad (1.10)$$

当 $p > 1$ 或者 $p < 0$ 时, 上述不等式反向.

1.1 实分析中 Hölder 不等式的推广

1979 年, Vasić 和 Pečarić^[82] 将 Hölder 不等式推广为如下的 n 维形式:

定理 1.1.1 设 $A_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$).

(1) 如果 β_j 是正数, 并且 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_j} \geq 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m A_{ij} \leq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n A_{ij}^{\beta_j} \right)^{\frac{1}{\beta_j}}. \quad (1.11)$$

(2) 如果 $\beta_1 > 0, \beta_j < 0$ ($j = 2, 3, \dots, m$), 并且 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_j} \leq 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m A_{ij} \geq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n A_{ij}^{\beta_j} \right)^{\frac{1}{\beta_j}}. \quad (1.12)$$

(3) 如果 $\beta_j < 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$), 则有

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m A_{ij} \geq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n A_{ij}^{\beta_j} \right)^{\frac{1}{\beta_j}}. \quad (1.13)$$

2005 年, Wu 和 Debnath 在文献[92]中给出了不等式 (1.11) 如下的指数化推广:

定理 1.1.2 设 $a_{rj} > 0, \lambda_j > 0$ ($r = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), 并且

$\gamma = \min \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j}, 1 \right\}$, 则有

$$\sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m a_{rj} \leq n^{1-\gamma} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n a_{rj}^{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}}. \quad (1.14)$$

随后, 在 2012 年, 本书作者在文献 [64] 中给出了不等式 (1.12) 和不等式 (1.13) 相应的指数化推广.

定理1.1.3 设 $a_{rj} > 0 (r = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \lambda_1 \neq 0, \lambda_j < 0$
 $(j = 2, 3, \dots, m)$, 并且 $\tau = \max \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j}, 1 \right\}$, 则有

$$\sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m a_{rj} \geq n^{1-\tau} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n a_{rj}^{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}}. \quad (1.15)$$

在此只给出不等式 (1.15) 的证明, 其他不等式的证明读者可以参考相应的文献.

证明 (1) 当 $\lambda_1 < 0$ 时, 显然 $\tau = 1$. 此时不等式 (1.15) 就是不等式 (1.13).

(2) 当 $\lambda_1 > 0$ 并且 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \geq 1$ 时, 记 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} = t (t \geq 1)$, 则有 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{t\lambda_j} = 1$.

由不等式 (1.12) 可知

$$\begin{aligned} \left(\sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m a_{rj} \right)^2 &= \sum_{s=1}^n \left(\prod_{i=1}^m a_{si} \right) \sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m a_{rj} \\ &\geq \sum_{s=1}^n \left(\prod_{i=1}^m a_{si} \right) \left[\prod_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n a_{rj}^{t\lambda_j} \right)^{\frac{1}{t\lambda_j}} \right] \\ &= \sum_{s=1}^n \left\{ \left(a_{s1}^{t\lambda_1} \sum_{r=1}^n a_{r1}^{t\lambda_1} \right)^{\frac{1}{t\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{1}{t\lambda_j}} \cdot \left[\prod_{j=2}^m \left(a_{s1}^{t\lambda_1} \sum_{r=1}^n a_{rj}^{t\lambda_j} \right)^{\frac{1}{t\lambda_j}} \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\prod_{j=2}^m \left(a_{sj}^{t\lambda_j} \sum_{r=1}^n a_{r1}^{t\lambda_1} \right)^{\frac{1}{t\lambda_j}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

进而根据 $\left(\frac{1}{t\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{1}{t\lambda_j} \right) + \frac{1}{t\lambda_2} + \frac{1}{t\lambda_3} + \dots + \frac{1}{t\lambda_m} + \frac{1}{t\lambda_2} + \frac{1}{t\lambda_3} + \dots + \frac{1}{t\lambda_m} = 1$, 对不等式 (1.16) 的右端利用式 (1.12) 可得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m a_{rj} \right)^2 &\geq \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{t\lambda_1} a_{r1}^{t\lambda_1} \right)^{\frac{1}{t\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{1}{t\lambda_j}} \\ &\quad \cdot \left[\prod_{j=2}^m \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{t\lambda_1} a_{rj}^{t\lambda_j} \right)^{\frac{1}{t\lambda_j}} \right] \left[\prod_{j=2}^m \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{sj}^{t\lambda_j} a_{r1}^{t\lambda_1} \right)^{\frac{1}{t\lambda_j}} \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

此外, 由定理 1.0.8 可知

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{t\lambda_1} a_{r1}^{t\lambda_1} \right)^{\frac{1}{t\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{1}{t\lambda_j}} \cdot \left[\prod_{j=2}^m \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{t\lambda_1} a_{rj}^{t\lambda_j} \right)^{\frac{1}{t\lambda_j}} \right] \\
 & \quad \cdot \left[\prod_{j=2}^m \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{sj}^{t\lambda_j} a_{r1}^{t\lambda_1} \right)^{\frac{1}{t\lambda_j}} \right] \\
 & \geq (n^2)^{(1-t) \left(\frac{1}{t\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{1}{t\lambda_j} \right)} \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{\lambda_1} a_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{1}{\lambda_j}} \\
 & \quad \cdot \left[\prod_{j=2}^m (n^2)^{\frac{1-t}{t\lambda_j}} \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{\lambda_1} a_{rj}^{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \left[\prod_{j=2}^m (n^2)^{\frac{1-t}{t\lambda_j}} \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{sj}^{\lambda_j} a_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \\
 & = (n^2)^{1-t} \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{\lambda_1} a_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{1}{\lambda_j}} \\
 & \quad \cdot \left[\prod_{j=2}^m \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{\lambda_1} a_{rj}^{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \left[\prod_{j=2}^m \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{sj}^{\lambda_j} a_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right] \\
 & = n^{2-2t} \left(\sum_{r=1}^n a_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{2}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{2}{\lambda_j}} \cdot \left\{ \prod_{j=2}^m \left[\left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{s1}^{\lambda_1} a_{rj}^{\lambda_j} \right) \right. \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left. \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n a_{sj}^{\lambda_j} a_{r1}^{\lambda_1} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda_j}} \right\} \\
 & = n^{2-2t} \left(\sum_{r=1}^n a_{r1}^{\lambda_1} \right)^{\frac{2}{\lambda_1} - \sum_{j=2}^m \frac{2}{\lambda_j}} \cdot \left\{ \prod_{j=2}^m \left[\left(\sum_{s=1}^n a_{s1}^{\lambda_1} \right) \left(\sum_{r=1}^n a_{rj}^{\lambda_j} \right) \right. \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left. \left(\sum_{s=1}^n a_{sj}^{\lambda_j} \right) \left(\sum_{r=1}^n a_{r1}^{\lambda_1} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda_j}} \right\} \\
 & = n^{2-2t} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n a_{rj}^{\lambda_j} \right)^{\frac{2}{\lambda_j}}. \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

联立不等式 (1.17) 和不等式 (1.18) 立刻可得要证的不等式 (1.15).

(3) 当 $\lambda_1 > 0$ 并且 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \leq 1$ 时, 显然不等式 (1.15) 就是不等式 (1.12). □

接下来给出上述不等式相应的积分形式.

定理1.1.4 设函数 $f_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 是定义在区间 $[a, b]$ 上的非负可积函数.

(1) 如果 $\lambda_j > 0$, 并且 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \leq 1$, 则有

$$\int_a^b \prod_{j=1}^m f_j(x) dx \leq (b-a)^{1-\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j}} \left[\prod_{j=1}^m \left(\int_a^b f_j^{\lambda_j}(x) dx \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right]; \quad (1.19)$$

(2) 如果 $\lambda_1 > 0, \lambda_j < 0$ ($j = 2, 3, \dots, m$), 并且 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \geq 1$, 则有

$$\int_a^b \prod_{j=1}^m f_j(x) dx \geq (b-a)^{1-\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j}} \left[\prod_{j=1}^m \left(\int_a^b f_j^{\lambda_j}(x) dx \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right], \quad (1.20)$$

其中 $f_j(x) > 0, j = 1, 2, \dots, m$.

证明 只给出情形 (2) 的证明, 情形 (1) 的证明读者可以类似给出. 首先 n 等分区间 $[a, b]$ 为

$$a < a + \frac{b-a}{n} < \dots < a + \frac{b-a}{n}r < \dots < a + \frac{b-a}{n}(n-1) < b,$$

$$x_r = a + \frac{b-a}{n}r, \quad \Delta x_r = \frac{b-a}{n}, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

则由不等式 (1.15) 可知

$$\sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m f_j(x) \geq n^{1-\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j}} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n f_j^{\lambda_j}(x) \right)^{\frac{1}{\lambda_j}},$$

也就是

$$\sum_{r=1}^n \prod_{j=1}^m f_j(x) \frac{b-a}{n} \geq (b-a)^{1-\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j}} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n f_j^{\lambda_j}(x) \frac{b-a}{n} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}}. \quad (1.21)$$

进而对不等式 (1.21) 两端令 $n \rightarrow \infty$, 立刻可得要证的不等式 (1.20). □

1.2 Hölder不等式在Sugeno积分和伪积分中的推广

1.2.1 关于 Sugeno 积分的 Hölder 不等式

首先给出与 Sugeno 积分有关的概念及相应的性质.

定义1.2.1^[53] 设 X 为非空集合, $\mathcal{F}$ 是集合 X 上的 σ -代数. 集函数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ 为模糊测度当且仅当其满足以下四条:

(FM1) 若 $\emptyset \in \mathcal{F}$, 那么 $\mu(\emptyset) = 0$;

(FM2) $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, A \subset B$, 那么 $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(FM3) 如果 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots, \infty)$, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 那么

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n);$$

(FM4) 如果 $A_n \in \mathcal{F} (n = 1, 2, \dots, \infty)$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ 且

$$\mu(A_1) < +\infty, \text{ 那么有 } \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

定义1.2.2^[85] 若 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上的模糊测度, 则称 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为模糊测度空间.

为了叙述的方便, 用 $\mathcal{F}_+(X)$ 表示非负可测函数集. 本节中所考虑的函数均属于 $\mathcal{F}_+(X)$. 设 f 是定义在 X 上的非负实值函数, 对于 $\alpha \geq 0$, 用 F_α 表示 $\{x \in X | f(x) \geq \alpha\}$. 显然, F_α 关于 α 是几乎处处不增的, 也就是, 当 $\alpha \leq \beta$ 时, 有 $F_\alpha \supseteq F_\beta$.

定义1.2.3^[50, 59, 85] 设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为模糊测度空间, 并且 $A \in \mathcal{F}$, 则在 A 上函数 f 关于模糊测度 μ 的 Sugeno 积分定义为

$$(S) \int_A f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} (\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)).$$

当 $A = X$ 时, 有

$$(S) \int_X f d\mu = (S) \int f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} (\alpha \wedge \mu(F_\alpha)).$$

性质1.2.1^[50, 85] 设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个模糊测度空间, 则有

$$(1) \mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha \Rightarrow (S) \int_A f d\mu \geq \alpha;$$

$$(2) \mu(A \cap F_\alpha) \leq \alpha \Rightarrow (S) \int_A f d\mu \leq \alpha;$$

$$(3) (S)_A f d\mu < \alpha \Leftrightarrow \text{存在 } \gamma < \alpha, \text{ 使得 } \mu(A \cap F_\gamma) < \alpha;$$

$$(4) (S) \int_A f d\mu > \alpha \Leftrightarrow \text{存在 } \gamma > \alpha, \text{ 使得 } \mu(A \cap F_\gamma) > \alpha;$$

$$(5) \text{ 如果 } \mu(A) < \infty, \text{ 则 } \mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha \Leftrightarrow (S) \int_A f d\mu \geq \alpha;$$

$$(6) \text{ 如果 } f \leq g, \text{ 则 } (S) \int f d\mu \leq (S) \int g d\mu.$$

引理1.2.1^[85] 设 $(S) \int_A f d\mu = p$, 则 $\forall r \geq p$, 都有 $(S) \int_A f d\mu = (S) \int_0^r \mu(A \cap F_\alpha) dm$, 其中 m 是 Lebesgue 测度.

定义1.2.4^[88] 如果对于所有 $(x, y) \in X^2$, 都有 $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$, 则称函数 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为共单调的.

引理1.2.2^[88] 设 μ 是模糊测度, $\star: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是关于每个变量非减的连续函数, 并且 $\star(x, y) \geq \max\{x, y\}$. 设连续函数 $\varphi_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ($i = 1, 2, 3$) 严格递增并且满足 $\varphi_1(x) \geq \varphi_i(x)$ ($i = 2, 3$). 如果函数 $f, g \in \mathcal{F}_+(X)$ 是共单调的, 则有

$$\varphi_1^{-1} \left((S) \int_A \varphi_1(f \star g) d\mu \right) \leq \varphi_2^{-1} \left((S) \int_A \varphi_2(f) d\mu \right) \star \varphi_3^{-1} \left((S) \int_A \varphi_3(g) d\mu \right). \quad (1.22)$$

引理1.2.3^[88] 设 μ 是模糊测度, $\star: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是关于每个变量非减的连续函数, 并且 $\star(x, y) \leq \min\{x, y\}$. 设连续函数 $\varphi_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ($i = 1, 2, 3$) 严格递增并且满足 $\varphi_1(x) \leq \varphi_i(x)$, $i = 2, 3$. 如果函数 $f, g \in \mathcal{F}_+(X)$ 是共单调的, 则有

$$\varphi_1^{-1} \left((S) \int_A \varphi_1(f \star g) d\mu \right) \geq \varphi_2^{-1} \left((S) \int_A \varphi_2(f) d\mu \right) \star \varphi_3^{-1} \left((S) \int_A \varphi_3(g) d\mu \right). \quad (1.23)$$

在引理 1.2.2 和引理 1.2.3 中分别令 $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^p$, $\varphi_3(x) = x^q$, 则有如下关于 Sugeno 积分的 Hölder 不等式成立.

定理1.2.1 ^[88] 设 $p, q \geq 1$, $f, g: X \rightarrow [0, 1]$, 并且 $\mu: \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ 是任意的模糊测度, $\star: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是关于每个变量非减的连续函数, 并且 $\star(x, y) \geq \max\{x, y\}$. 如果函数 $f, g \in \mathcal{F}_+(X)$ 是共单调的, 则有

$$(S) \int_A f \star g d\mu \leq \left((S) \int_A f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \star \left((S) \int_A g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理1.2.2 ^[88] 设 $p, q \leq 1$, $f, g: X \rightarrow [0, 1]$, 并且 $\mu: \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ 是任意的模糊测度, $\star: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是关于每个变量非减的连续函数, 并且 $\star(x, y) \leq \min\{x, y\}$. 如果函数 $f, g \in \mathcal{F}_+(X)$ 是共单调的, 则有

$$(S) \int_A f \star g d\mu \geq \left((S) \int_A f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \star \left((S) \int_A g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

下面给出定理 1.2.1 的如下的推广.

定理1.2.3 ^[88] 设函数 $f_1, f_2, \dots, f_n: X \rightarrow [0, 1]$ 中任意两个都是共单调的, $\star: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是关于每个变量非减的连续函数, 并且 $\star(x, y) \geq \max\{x, y\}$. 如果 $p_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\begin{aligned} & (S) \int_A (((\dots((f_1 \star f_2) \star f_3) \star \dots) \star f_n) d\mu \\ & \leq \left(\left(\dots \left(\left((S) \int_A f_1^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \star \left((S) \int_A f_2^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \right) \star \dots \right) \star \left((S) \int_A f_n^{p_n} d\mu \right)^{\frac{1}{p_n}} \right). \end{aligned}$$

证明 因为 f_1, f_2 是共单调的, 故由定理 1.2.1 可知

$$(S) \int_A (f_1 \star f_2) d\mu \leq \left((S) \int_A f_1^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \star \left((S) \int_A f_2^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

此外由 $f_1 \star f_2$ 和 f_3 的共单调性可知 (详见文献 [45] 中推论 3.8 的证明)

$$\begin{aligned} & (S) \int_A ((f_1 \star f_2) \star f_3) d\mu \\ & \leq \left((S) \int_A (f_1 \star f_2) d\mu \right) \star \left((S) \int_A f_3^{p_3} d\mu \right)^{\frac{1}{p_3}} \\ & \leq \left(\left((S) \int_A f_1^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \star \left((S) \int_A f_2^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \right) \star \left((S) \int_A f_3^{p_3} d\mu \right)^{\frac{1}{p_3}}. \end{aligned}$$

这样, 由数学归纳法立刻可得要证的结论. $\square$

类似地, 可得定理 1.2.2 的如下的推广.

定理 1.2.4 ^[88] 设函数 $f_1, f_2, \dots, f_n: X \rightarrow [0, 1]$ 中任意两个都是共单调的, $\star: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是关于每个变量非减的连续函数, 并且 $\star(x, y) \leq \min\{x, y\}$. 如果 $p_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\begin{aligned} (S) \int_A ((\dots((f_1 \star f_2) \star f_3) \star \dots) \star f_n) d\mu \\ \geq \left(\left(\dots \left(\left((S) \int_A f_1^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \star \left((S) \int_A f_2^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} \right) \star \dots \right) \right. \\ \left. \star \left((S) \int_A f_n^{p_n} d\mu \right)^{1/p_n} \right). \end{aligned}$$

1.2.2 关于伪积分的 Hölder 不等式

为了叙述的方便, 在此用 X 表示一个非空集合, $\mathcal{A}$ 表示集合 X 的子集的 σ -代数.

定义 1.2.5 ^[50] 集函数 $m: \mathcal{A} \rightarrow [a, b]$ 称为 σ - $\oplus$ -测度当且仅当

(1) 如果 $\oplus$ 不是幂等的, 则有 $m(\emptyset) = 0$;

(2) 对于 $\mathcal{A}$ 中任意两两不交的子序列 $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, 有 $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

定义 1.2.6 ^[50] 设 $m: \mathcal{A} \rightarrow [a, b]$ 是 σ - $\oplus$ -测度.

(1) 阶梯函数 $e: X \rightarrow [a, b]$ 的伪积分定义为

$$\int_X^{\oplus} e \odot dm = \bigoplus_{i=1}^n a_i \odot m(A_i).$$

(2) 可测函数 $f: X \rightarrow [a, b]$ (如果 $\oplus$ 不是幂等的, 则假设对于每一个 $\varepsilon > 0$, 在 $f(X)$ 内都存在一个单调的 ε -网) 的伪积分定义为

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X^{\oplus} e_n(x) \odot dm,$$

其中 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个阶梯函数序列, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $d(e_n(x), f(x))$ 一致收敛于 0.

关于伪积分更多详细的介绍读者可参考文献 [35], [50] 和 [51]. 接下来给出 Hölder 不等式的伪积分形式.

定理1.2.5^[3] 设 $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 对于任意给定的可测空间 $(X, \mathcal{A})$, $u, v: X \rightarrow [a, b]$ 是两个可测函数. 如果关于伪可加 $\oplus$ 和伪乘积 $\odot$ 的生成子 $g: [a, b] \rightarrow [0, +\infty]$ 是一个增函数, 则对于任意 $\sigma\text{-}\oplus$ -测度 m , 有

$$\int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm \leq \left(\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm \right)_{\odot}^{(\frac{1}{p})} \odot \left(\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(q)} \odot dm \right)_{\odot}^{(\frac{1}{q})}. \quad (1.24)$$

证明 由经典的 Hölder 不等式可知

$$\int_X (g \circ u)(g \circ v) d(g \circ m) \leq \left(\int_X (g \circ u)^p d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X (g \circ v)^q d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

因为函数 g 是增函数, 于是 g^{-1} 也是一个增函数, 所以有

$$g^{-1} \left(\int_X (g \circ u)(g \circ v) d(g \circ m) \right) \leq g^{-1} \left(\left(\int_X (g \circ u)^p d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X (g \circ v)^q d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{q}} \right),$$

也就是

$$\begin{aligned} & g^{-1} \left\{ \int_X g \left[g^{-1} \left((g \circ u)(g \circ v) \right) \right] d(g \circ m) \right\} \\ & \leq g^{-1} \left\{ g \left[g^{-1} \left(\left(\int_X (g \circ u)^p d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{p}} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. \cdot g \left[g^{-1} \left(\left(\int_X (g \circ v)^q d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

考虑到当伪算子是由单调且连续的函数 $g: [a, b] \rightarrow [0, +\infty]$ 生成时, 可测函数 $f: X \rightarrow [a, b]$ 的伪积分为

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = g^{-1} \left(\int_X (g \circ f) d(g \circ m) \right) \quad (1.26)$$

并且 $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$, 于是有

$$\int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm \leq g^{-1} \left[\left(\int_X (g \circ u)^p d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{p}} \right] \odot g^{-1} \left[\left(\int_X (g \circ v)^q d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$