应用运筹学教材教辅丛书

经典博弈论高级教程

An Advanced Course on Classic Game Theory

第一卷　原理与模型

Volume Ⅰ　Principles and Models

刘　进 包卫东 刘　煜
马满好 祝江汉 李海峰
编著

国防科技大学出版社
National University of Defense Technology Press

应用运筹学教材教辅丛书

经典博弈论高级教程

第一卷　原理与模型

An Advanced Course on Classic Game Theory

Volume Ⅰ　Principles and Models

刘　进　包卫东　刘　煜
马满好　祝江汉　李海峰
编　著

国防科技大学出版社
·长沙·

内容简介

本书主要介绍经典博弈论的原理和模型,包括博弈论的公理基础、非合作博弈四大模型与解概念、完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈、不完全信息动态博弈、合作博弈三大模型与解概念、核心、沙普利值、谈判集、核原等内容。本书的特色在于：一是精确，全书采用了大量的数学符号来辅助行文表述，每一个定义、定理的条件交代清晰；二是丰富，全书包含了经典博弈论相对全面和精华的内容，定义多、定理多；三是详细，全书中的重要定理都给出了详细证明，每一个概念都给出了详细定义。本书严谨规范，可作为数学、管理、控制等专业研究生课程的教材和相关专业科研工作者的参考材料。

图书在版编目（CIP）数据

经典博弈论高级教程. 第一卷，原理与模型 / 刘进等编著. — 长沙：国防科技大学出版社，2017. 5

ISBN 978-7-5673-0480-2

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①博弈论—教材 Ⅳ. ①O225

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第016822号

经典博弈论高级教程
JINGDIAN BOYILUN GAOJI JIAOCHENG
第一卷 原理与模型
DI-YI JUAN YUANLI YU MOXING

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)84572640 邮政编码：410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：石少平 责任校对：熊立桃
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/16 印张：17.75 字数：421千
2017年5月第1版第1次印刷 印数：1—500册
ISBN 978-7-5673-0480-2
定价：40.00元

前　言

博弈论是一门数学理论，具体而言是一门运筹学理论，研究竞争或者合作环境下的交互式决策。博弈论与经济学联系密切，以1994年后，十余位具有博弈论背景的经济学家获得诺贝尔奖为显著标志，使得人们一度认为博弈论是经济学的代名词。但是随着时间的推移与研究的深入，越来越多的学者认为博弈论不是经济学的一个分支，它在更广阔的学科领域具有重要应用，是一门可以部分脱离人类经验认知的基础性科学，即是属于数学的范畴。博弈论的教材不少，大多的行文是例子与定义、定理混杂，使人不得要领和精髓。本书的作者在长期的教学实践过程中，提出了“原理与模型、应用与实践、习题与解答”三位一体的教材建设思路，由此，按照作者的设计，经典博弈论高级教程由三本子教材构成一个整体，本书是教程的第一卷，按照公理化体系撰写，着重介绍经典博弈论的原理与模型。之所以称之为经典，一方面是内容的完备与成熟，另一方面是试图与当代的微分博弈、随机博弈区分开来。

本书共分为十三章。第1章介绍了博弈论的公理基础，包含排序与效用、知识与学习。第2章介绍了非合作博弈的四大模型，包括完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈等。第3章介绍了非合作博弈四大模型最重要的要素—策略，包括纯粹策略、混合策略和行为策略以及它们之间的关系和计算方法。第4章介绍了完全信息静态博弈的纯粹策略解概念，包括支配均衡、安全均衡和纳什均衡以及它们之间的关系，特别利用不动点定理在一定条件下证明了纳什均衡的存在性。有限的完全信息静态博弈的纳什均衡不一定存在，为了解决这个问题，第5章介绍了混合扩张方法，包括混合策略的定义和混合纳什均衡的存在性，此外还介绍了混合策略的颤抖手均衡和相关均衡。第6章介绍了完全信息动态博弈的多类策略的多类解概念，包括纳什均衡、子博弈完美均衡、颤抖手均衡、序贯均衡，这是本书的重点篇章。第7、8章，分别介绍了不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈，通过海萨尼转换，可以将二者变换为完全不完美信息动态博弈，因此第六章所介绍的解概念都可适用于二者，同时因为自身的特殊性，还分别定义了贝叶斯均衡和完美贝叶斯均衡的概念，通过论证，贝叶斯均衡和完

美贝叶斯均衡，与行为策略纳什均衡和序贯均衡在某种意义上是等价的，因此完全不完美信息动态博弈是不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈的本质属性。第9章介绍了合作博弈的三类模型与解概念并阐明了三类模型之间的关系，可转移支付合作博弈是其他二者的基础。第10～13章介绍了可转移支付合作博弈的四种重要解概念：核心、沙普利值、谈判集和核原，并研究论证了它们的性质，在这个过程之中，线性规划及其对偶理论扮演了重要角色。

本书的主要特色有三。一是精确，全书采用了大量的数学符号来辅助行文表述，每一个定义、定理、例子的条件交代非常清晰；二是丰富，全书包含了经典博弈论相对全面和精华的内容，定义多、定理多；三是详细，全书中的每一条重要定理都给出了详细证明，每一个概念都给出了详细的定义。

本书由多位作者联合完成。第1～6、12、13章由刘进完成；第7章由包卫东完成，第8章由马满好完成，第9章由祝江汉完成，第10章由中南大学地球科学与信息物理学院/土木工程学院李海峰副教授完成，第11章由刘煜完成；全书由刘进统稿。

本书的出版得到了国防科技大学信息系统与管理学院查亚兵院长、伍泛江政委等多位领导和同事的关心，在此表示感谢。特别感谢作者的博士后合作导师邱涤珊教授，在学术、教学、工程、生活等方方面面鼓励帮助作者；特别感谢张维明教授，将作者引入了体系协同与体系博弈的学科领域；特别感谢陈英武教授，与本教材对应的课程“博弈论”的开设得到了他的大力支持；特别感谢李国辉教授，作为教学督导组的专家，为本书的内容选择提供了宝贵意见；特别感谢唐九阳教授，一直为作者出谋划策，鼓励作者上好课、写好书。

本书的出版得到了国防科技大学研究生教育教学改革研究课题“面向研究生定量对抗思维能力培养的博弈论课程系列建设研究”（编号yjsy20170x3）的资助。

限于作者水平，书中难免有不足之处，请各位专家批评指正。

刘　进

2016年7月于长沙

目 录

第 1 章

博弈论的公理基础

博弈论是数学的一个分支，更具体言是运筹学的一个分支，研究对抗或者合作环境下的交互式稳定决策理论。博弈论与经济学联系密切，1994年以后，十余位具有博弈论背景的经济学家获得诺贝尔奖，使得人们一度认为博弈论是经济学的代名词。但是随着时间的推移与研究的深入，越来越多的学者认为博弈论不是经济学的一个分支，它在更广阔的学科领域具有重要应用，是一门可以部分脱离人类经验认知的基础性科学，即是属于数学的范畴。按照布尔巴基学派的观点，数学研究的是三大结构或者三大结构的混合体：序结构、拓扑结构、代数结构。本章从这三个结构讨论博弈论的公理基础。

1.1 排序与效用

1.1.1 各种关系

定义1.1 假设A是一个非空集合，定义几个集合族

$$\mathcal{P}(A) = \{B|\ B \subseteq A\},$$
$$\mathcal{P}_0(A) = \{B|\ B \subseteq A, B \neq \emptyset\},$$
$$\mathcal{P}_1(A) = \{B|\ B \subseteq A, B \neq A\},$$
$$\mathcal{P}_2(A) = \{B|\ B \subseteq A, B \neq \varnothing, A\}.$$

定义1.2 假设A是一个非空集合，$(A, \geq)$称为一个二元关系，如果满足如下条件

$$\forall a, b \in A, \text{要么 } a \geq b, \text{要么 } a \ngeq b, \text{二者必且只居其一。}$$

定义1.3 假设A是一个非空集合，二元关系$(A, \geq)$称为一个偏序，如果满足如下条件：

(1) 自反性: $\forall a \in A, a \geq a$;

(2) 传递性: $a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$.

定义1.4 假设A是一个非空集合，$(A, \geq)$为一个偏序，称$a \approx b$，如果满足如下条件

$$a \geq b, b \geq a.$$

定义1.5 假设A是一个非空集合，$(A, \geq)$为一个偏序，称$a > b$，如果满足如下条件

$$a \geq b, a \not\approx b.$$

定义1.6 假设A是一个非空集合，$(A,\geq)$为一个偏序，$\forall a\in A$，定义集合

$$a_{\geq}=\{b|\ b\in A,b\geq a\},$$
$$a_{>}=\{b|\ b\in A,b>a\},$$
$$a_{\leq}=\{b|\ b\in A,b\leq a\},$$
$$a_{<}=\{b|\ b\in A,b<a\},$$
$$a_{\approx}=\{b|\ b\in A,b\approx a\}.$$

注释1.1 假设$(A,\geq)$是一个偏序关系，不意味着A中任意两个元素都可以比较，有可能两个元素之间没有比较关系。

定义1.7 假设A是一个非空集合，二元关系$(A,\approx)$称为一个等价关系，如果满足

(1) 自反性: $\forall a\in A,a\approx a$;

(2) 对称性: $a\approx b\Rightarrow b\approx a$;

(3) 传递性: $a\approx b,b\approx c\Rightarrow a\approx c$.

定义1.8 假设A是一个非空集合，$(A,\approx)$为一个等价关系，$\forall a\in A$，定义集合

$$[a]=\{b|\ b\in A,b\approx a\}.$$

定义1.9 假设A是一个非空集合，$(A,\approx)$为一个等价关系，定义商空间

$$\frac{A}{\approx}=\{[a]|\ a\in A\}.$$

定义1.10 假设A是一个非空集合，二元关系$(A,\geq)$称为一个偏好关系(全序关系)，如果满足

(1) 自反性： $\forall a\in A,a\geq a$;

(2) 传递性： $a\geq b,b\geq c\Rightarrow a\geq c$;

(3) 完备性： $\forall a,b\in A,a\geq b$或者 $b\geq a$.

注释1.2 偏序关系和偏好关系只有一字之差，但是意义不同，偏好关系是完备的偏序关系。假设$(A,\geq)$是一个偏好关系，意味着A中的任何两个元素有明确的排序，博弈论的一个基本假设是局中人对博弈的结果具有明确的排序，完备性在博弈论的讨论中是重要的。

定理1.1 假设A是一个非空集合，$(A,\geq)$为一个偏好关系，那么

$$A=a_{<}\uplus a_{\geq}=a_{\leq}\uplus a_{>}=a_{<}\uplus a_{\approx}\uplus a_{>},\forall a\in A,$$

其中$\uplus$表示不交并。

1.1.2 效用函数

一般的偏好关系过于抽象，不易研究。我们最为熟悉的偏好关系是实数$\mathbf{R}$上的正常的大小关系$(\mathbf{R},\geqslant)$，我们希望能够用这种简单的偏好$(\mathbf{R},\geqslant)$来表示抽象的偏好$(A,\geq)$，即为效用函数。

定义1.11 假设$(A,\geq)$是一个偏好关系，函数$f:A\to\mathbf{R}$称为表示$(A,\geq)$的效用函数，如果满足

$$x\geq y\Leftrightarrow f(x)\geqslant f(y).$$

定理1.2 假设$(A,\succeq)$是一个偏好关系，函数$f:A\to\mathbf{R}$是$(A,\succeq)$的效用函数，则有

(1) $x\succ y\Leftrightarrow f(x)>f(y)$;

(2) $x\approx y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$.

证明 根据定义即可，留作练习。 □

定理1.3 假设$(A,\succeq)$是一个偏好关系，函数$f:A\to\mathbf{R}$是$(A,\succeq)$的效用函数，$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是严格单调递增函数，那么复合函数

$$g\circ f:A\to\mathbf{R}$$

也是$(A,\succeq)$的效用函数。

证明 根据定义即可，留作练习。 □

定理1.4 假设$(A,\succeq)$是一个偏好关系并且A是有限集合，那么一定存在$(A,\succeq)$的效用函数。

证明 有限集合上的偏好关系可以对元素进行排序，按序赋值即可。留作练习。 □

随机性是普遍现象，一个自然的问题是：如何将偏好关系进行随机扩张？

定义1.12 假设A是一个有限集合，不妨设

$$A=\{a_1,\cdots,a_m\},$$

其上的概率分布空间定义为

$$\Delta(A)=\{p\mid p\in\mathbf{R}^m;\ p\geqslant 0;\sum_{i=1}^m p_i=1\}.$$

为了确切表示各个元素的概率，一般可用如下符号表示

$$\sum_{i=1}^m p_i a_i,\ \sum_{a\in A}p(a)a,\ (p(a))_{a\in A},\ [p(a)a]_{a\in A},\cdots$$

定义1.13 假设A是一个有限集合，$B\in\mathcal{P}_0(A)$是非空子集，B上的概率分布空间可以按照如下自然的方式嵌入A上的概率分布空间

$$\Delta(B)=\Delta(B)\times\{0\}^{\#B^c}\hookrightarrow\Delta(A),$$

其中$\#B^c$表示集合B的余集中元素的个数或者势。

定义1.14 假设A是一个集合(可能无限)，其上的一阶乐透空间定义为

$$\mathcal{L}^{(1)}(A)=\bigcup_{B\in\mathcal{P}_0(A),\#B<\infty}\Delta(B),$$

其中$\#B$表示集合B中元素的个数或者势。

注释1.3 显然一个有限集合A上的乐透空间$\mathcal{L}^{(1)}(A)$按照如上的自然嵌入方式就是其上的概率分布空间$\Delta(A)$；一个无限集合上的乐透空间和其上的概率分布空间不同，涉及集合上的σ代数问题，这超过了本书的范畴，不涉及。

定义1.15 假设A是一个集合(可能无限)，其上的高阶乐透空间归纳定义为

$$\mathcal{L}^{(k)}(A)=\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{L}^{(k-1)}(A)),k=1,\cdots.$$

为了规范起见，约定$\mathcal{L}^{(0)}(A)=A$.

定义1.16 假设A是一个集合(可能无限)，其上的$(k-1)$阶乐透空间可以按照如下的方式自然嵌入k阶乐透空间

$$e:\alpha^{(k-1)}\in\mathcal{L}^{(k-1)}(A)\hookrightarrow[1(\alpha^{(k-1)})]\in\mathcal{L}^{(k)}(A).$$

定义1.17 高阶乐透的简化原理（描述性定义）。假设A是一个集合(可能无限)，其上的所有高阶乐透空间本质上是一阶乐透空间。归纳定义：

$$L_i^{(1)} = \sum_{k\in K} p_i^k a_k, i \in I,$$
$$L^{(2)} = \sum_{i\in I} q^i L_i^{(1)},$$
$$L^{(1)} = \sum_{k\in K} r^k a_k,\ r^k = \sum_{i\in I} p_i^k q^i.$$

其中$\{a_k\}_{k\in K} \subseteq A$, $\#K, I < \infty$, $\forall i \in I$, $(p_i^k)_{k\in K}$是概率分布, $(q^i)_{i\in I}$是概率分布。简化原理即是认定$L^{(1)}$和$L^{(2)}$ 本质一样。

定义1.18 假设A是一个集合（先前其上并未定义偏好关系），$(\mathcal{L}^{(1)}(A), \succeq)$是其上一阶乐透空间的偏好关系（自然诱导出偏好关系$(A, \succeq)$。函数$F : \mathcal{L}^{(1)}(A) \to \mathbf{R}$称为$(\mathcal{L}^{(1)}(A), \succeq)$的效用函数，如果满足

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}^{(1)}(A),\ L_1 \succeq L_2 \Leftrightarrow F(L_1) \geqslant F(L_2).$$

定义1.19 假设A是一个集合，$(\mathcal{L}^{(1)}(A), \succeq)$是其上一阶乐透空间的偏好关系。函数$F : \mathcal{L}^{(1)}(A) \to \mathbf{R}$是$(\mathcal{L}^{(1)}(A), \succeq)$ 的效用函数，称是线性的，如果满足

$$\forall B \in \mathcal{P}_0(A),\ \#B < \infty,\ \forall \sum_{b\in B} p(b)b \in \Delta(B),\ F(\sum_{b\in B} p(b)b) = \sum_{b\in B} p(b)F(b).$$

定义1.20 假设$(A, \succeq)$是一个偏好关系，函数$f : A \to \mathbf{R}$是$(A, \succeq)$ 的效用函数，定义函数$F : \mathcal{L}^{(1)}(A) \to \mathbf{R}$为

$$\forall B \in \mathcal{P}_0(A),\ \#B < \infty,\ \forall \sum_{b\in B} p(b)b \in \Delta(B),\ F(\sum_{b\in B} p(b)b) =: \sum_{b\in B} p(b)f(b),$$

称函数$F : \mathcal{L}^{(1)}(A) \to \mathbf{R}$为$f : A \to \mathbf{R}$的线性扩张，称函数$F : \mathcal{L}^{(1)}(A) \to \mathbf{R}$定义的偏好关系$(\mathcal{L}^{(1)}(A), \succeq)$为$(A, \succeq)$的线性扩张。

除了将偏好关系扩张到一阶乐透空间上，还可以进一步扩张到高阶乐透空间，但是根据简化原理，高阶乐透空间和低阶乐透空间之间的关系实际上可以用二阶乐透空间和一阶乐透空间以及零阶乐透空间三者之间的关系来做本质上的阐述，因此，对于一个集合A，我们需要研究的关系如下式：

$$e : A \longrightarrow \mathcal{L}^{(1)}(A), e : \mathcal{L}^{(1)}(A) \longrightarrow \mathcal{L}^{(2)}(A)$$
$$f^{(0)} : A \longrightarrow \mathbf{R}, f^{(1)} : \mathcal{L}^{(1)}(A) \longrightarrow \mathbf{R}, f^{(2)} : \mathcal{L}^{(2)}(A) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

研究如上的偏好关系和效用函数的投影和扩张的关系问题。

1.1.3 冯·诺依曼—摩根斯坦公理

上文定义中的效用函数的线性扩张或者具有线性性质的效用函数是一类重要的对象，也称之为冯·诺依曼和摩根斯坦效用函数，一个自然的问题是：什么样的偏好关系可用线性效用函数来表示呢？把这个问题数学化即是：给定集合A，问二阶乐透空间上的偏好关系$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$ 满足什么条件时，存在其上的效用函数$f^{(2)} : \mathcal{L}^{(2)}(A) \to \mathbf{R}$, 使得$f^{(1)} =: f^{(2)}|_{\mathcal{L}^{(1)}(A)} : \mathcal{L}^{(1)}(A) \to \mathbf{R}$是线性的？

为了回答这个问题，冯·诺依曼和摩根斯坦根据人类的认知和数学上的自然性提出了四大公理，并证明满足四大公理的偏好关系具有线性效用函数。

公理1.1 (连续公理) 给定集合A，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，称其满足连续公理，如果成立

$$\forall a,b,c \in A, a \succeq b \succeq c, \Rightarrow \exists \theta \in [0,1], \text{ s.t., } b \approx \theta a + (1-\theta)c.$$

公理1.2 (单调公理) 给定集合A，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，称其满足单调公理，如果成立

$$\forall a,b \in A, a \succ b; \forall \alpha,\beta \in [0,1]; \alpha \geqslant \beta \Leftrightarrow \alpha a + (1-\alpha)b \succeq \beta a + (1-\beta)b.$$

定理1.5 (权重唯一性定理) 给定集合A，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，满足连续公理和单调公理，那么下式中的系数θ是唯一的

$$\forall a,b,c \in A, a \succeq b \succeq c, a \succ c \Rightarrow \exists \theta \in [0,1], \text{ s.t., } b \approx \theta a + (1-\theta)c.$$

推论1.1 (权重唯一性推论) 给定集合$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，满足连续公理和单调公理，A中所有元素的排序满足

$$a_m \succeq a_{m-1} \succeq \cdots \succeq a_1, a_m \succ a_i$$

那么存在唯一的一列系数θ^k满足

$$a_k \approx \theta^k a_m + (1-\theta^k)a_1, k = 1, \cdots, m.$$

特别地，$\theta^1 = 0, \theta^m = 1$.

公理1.3 (简化公理) 给定集合$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，称其满足简化公理，如果成立

$$\begin{aligned}
&\forall L_i^{(1)} = \sum_{k=1}^m p_i^k a_k \in \mathcal{L}^{(1)}(A), i \in I, \#I < \infty, \\
&\forall L^{(2)} = \sum_{i\in I} q^i L_i^{(1)} \in \mathcal{L}^{(2)}(A), \\
&L^{(1)} =: \sum_{k=1}^m r^k a_k, r^k = \sum_{i \in I} p_i^k q^i, \\
&\Rightarrow L^{(1)} \approx L^{(2)}.
\end{aligned}$$

公理1.4 (独立公理) 给定集合A，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，称其满足独立公理，如果成立

$$\begin{aligned}
&\forall L_i^{(1)} \in \mathcal{L}^{(1)}(A), i \in I, \#I < \infty, \\
&\forall L^{(2)} = \sum_{i\in I} q^i L_i^{(1)} \in \mathcal{L}^{(2)}(A), \\
&\forall a_j \in A, \text{ s.t., } a_j \approx L_j^{(1)} \\
&\Rightarrow L^{(2)} \approx \sum_{i<j} q^i L_i^{(1)} + q^j a_j + \sum_{i>j} q^i L_i^{(1)}.
\end{aligned}$$

定理1.6 (线性效用函数定理) 给定有限集合A，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，满足连续、单调、简化和独立四大公理，那么一定存在偏好关系的线性效用函数表示。

证明 不妨设$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$，分两种情况讨论。第一种情况，

$$a_m \succeq a_{m-1} \succeq \cdots \succeq a_1, a_m \succ a_1;$$

第二种情况，

$$a_m \succeq a_{m-1} \succeq \cdots \succeq a_1, a_m \approx a_1.$$

为了完成定理的证明，我们先针对第一种情况分几步进行。

第一步：定义函数$f^{(2)}:\mathcal{L}^{(2)}(A)\to\mathbf{R}$.

由权重唯一性推论，可知

$$\forall k=1,\cdots,m,\exists!\theta_k\in[0,1],\ \text{s.t.},\ a_k\approx\theta_k a_m+(1-\theta_k)a_1.$$

任意取定$\mathcal{L}^{(2)}(A)$中的一个元素

$$L^{(2)}=\sum_{i\in I}q^iL_i^{(1)},\#I<\infty,$$

其中

$$L_i^{(1)}=\sum_{k=1}^m p_i^k a_k\in\mathcal{L}^{(1)}(A),\forall i\in I.$$

定义新的一阶乐透

$$L^{(1)}=\sum_{k=1}^m r^k a_k,$$

其中

$$r^k=\sum_{i\in I}p_i^k q^i,k=1,\cdots,m.$$

根据简化公理和独立公理，可知

$$L^{(1)}=\sum_{k=1}^m r^k a_k\approx\Big(\sum_{k=1}^m r^k\theta_k\Big)a_m+\Big(\sum_{k=1}^m r^k(1-\theta_k)\Big)a_1.$$

根据简化公理，我们知道$L^{(1)}\approx L^{(2)}$，我们定义

$$f^{(2)}(L^{(2)})=\sum_{k=1}^m r^k\theta_k.$$

第二步：计算函数$f^{(2)}:\mathcal{L}^{(1)}(A)\to\mathbf{R}$.

任意取定

$$L^{(1)}=\sum_{k=1}^m p^k a_k\in\mathcal{L}^{(1)}(A),$$

根据简化公理和独立公理，可知

$$L^{(1)}=\sum_{k=1}^m p^k a_k\approx\Big(\sum_{k=1}^m p^k\theta_k\Big)a_m+\Big(\sum_{k=1}^m p^k(1-\theta_k)\Big)a_1.$$

因此，根据$f^{(2)}$的定义可知

$$f^{(2)}(L^{(1)})=\sum_{k=1}^m p^k\theta_k.$$

第三步：计算函数$f^{(2)}:\mathcal{L}^{(0)}(A)\to\mathbf{R}$.

任意取定$a_k\in A$，已知

$$a_k\approx\theta_k a_m+(1-\theta_k)a_1,$$

根据$f^{(2)}$的定义可知

$$f^{(2)}(a_k)=\theta_k,k=1,\cdots,m.$$

第四步：验证函数$f^{(2)}:\mathcal{L}^{(1)}(A)\to\mathbf{R}$是线性的。

任意取定

$$L^{(1)}=\sum_{k=1}^m p^k a_k\in\mathcal{L}^{(1)}(A),$$

根据第二步和第三步的计算可知

$$f^{(2)}(L^{(1)}) = \sum_{k=1}^{m} p^k \theta_k = \sum_{k=1}^{m} p^k f^{(2)}(a_k).$$

第五步：验证$L^{(2)} \approx f^{(2)}(L^{(2)})a_m + (1 - f^{(2)}(L^{(2)}))a_1, \forall L^{(2)}$。

由第一步实际上已经得到验证。

第六步：验证函数$f^{(2)} : \mathcal{L}^{(2)}(A) \to \mathbf{R}$是效用函数。

只需要验证

$$L_1^{(2)} \succ L_2^{(2)} \Leftrightarrow f^{(2)}(L_1^{(2)}) \geqslant f^{(2)}(L_2^{(2)}).$$

由第五步计算，单调公理，和$a_m \succ a_1$可保证。

第七步：对于第二种情形，定义$f^{(2)} \equiv \text{const}$即可。

对于第二种情形，即是

$$a_m \succeq a_{m-1} \succeq \cdots \succeq a_1, a_m \approx a_1.$$

可知

$$a_m \approx a_{m-1} \approx \cdots \approx a_1.$$

因此，根据简化公理和独立公理，可得

$$\forall L^{(2)} \in \mathcal{L}^{(2)}(A), L^{(2)} \approx 1a_1,$$

由此，定义

$$f^{(2)} \equiv \text{const}$$

即可满足定理结论。 □

定义1.21 称函数$g : A \to \mathbf{R}$为函数$f : A \to \mathbf{R}$的正仿射变换，如果满足

$$\exists \alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R},\ \text{s.t.},\ g(x) = \alpha f(x) + \beta,\ \forall x \in A.$$

定理1.7 集合A上的函数空间上的正仿射变化是一种等价关系。

证明 根据等价关系的定义直接验证即可。留作习题。 □

定理1.8 假设$f : \mathcal{L}^{(2)}(A) \to \mathbf{R}$是$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$的线性效用函数，那么函数$f$的任何正仿射变换也是线性效用函数。

证明 根据定义直接验证即可。留作习题。 □

定理1.9 **(线性效用函数唯一性定理)** 给定有限集合A，$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$是二阶乐透空间上的偏好关系，满足连续、单调、简化和独立四大公理，如果f和g是$(\mathcal{L}^{(2)}(A), \succeq)$的两个线性效用函数，那么函数$g$必定是$f$的正仿射变换。亦即，满足四大公理的偏好关系的线性效用函数在正仿射变换意义下是唯一的。

证明 不妨设$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$，分两种情况讨论。第一种情况，

$$a_m \succeq a_{m-1} \succeq \cdots \succeq a_1, a_m \succ a_1;$$

第二种情况，

$$a_m \succeq a_{m-1} \succeq \cdots \succeq a_1, a_m \approx a_1.$$

为了完成定理的证明，我们先针对第一种情况分几步进行。

第一步：计算函数$f^{(2)} : \mathcal{L}^{(2)}(A) \to \mathbf{R}$.

由权重唯一性推论，可知

$$\forall k = 1, \cdots, m,\ \exists! \theta_k \in [0, 1],\ \text{s.t.},\ a_k \approx \theta_k a_m + (1 - \theta_k) a_1.$$

任意取定$\mathcal{L}^{(2)}(A)$中的一个元素

$$L^{(2)} = \sum_{i \in I} q^i L_i^{(1)}, \# I < \infty,$$

其中

$$L_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} p_i^k a_k \in \mathcal{L}^{(1)}(A), \forall i \in I.$$

定义新的一阶乐透

$$L^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} r^k a_k,$$

其中

$$r^k = \sum_{i \in I} p_i^k q^i, k = 1, \cdots, m.$$

根据简化公理和独立公理，可知

$$L^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} r^k a_k \approx \Big(\sum_{k=1}^{m} r^k \theta_k \Big) a_m + \Big(\sum_{k=1}^{m} r^k (1 - \theta_k) \Big) a_1.$$

根据简化公理，我们知道$L^{(1)} \approx L^{(2)}$，我们可以计算得到

$$\begin{aligned} f(L^{(2)}) &= \Big(\sum_{k=1}^{m} r^k \theta_k \Big) f(a_m) + \Big(\sum_{k=1}^{m} r^k (1 - \theta_k) \Big) f(a_1), \\ g(L^{(2)}) &= \Big(\sum_{k=1}^{m} r^k \theta_k \Big) g(a_m) + \Big(\sum_{k=1}^{m} r^k (1 - \theta_k) \Big) g(a_1). \end{aligned}$$

只需要解线性方程

$$\begin{pmatrix} f(a_1) & 1 \\ f(a_m) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(a_1) \\ g(a_m) \end{pmatrix}$$

由于$f(a_1) < f(a_m)$,方程有解，即可确定正仿射变换系数$\alpha > 0, \beta \in \mathbf{R}$.

第二步：对于第二种情形，显然

$$f \equiv c_1,\ g \equiv c_2,$$

此时确定$\alpha = 1,\ \beta = c_2 - c_1$即可。 □

1.2 知识与学习

我们接受这样的事实：知识即是分类。对于同一个对象集合，如果多个人具有不同的知识，那么这些知识集中在一起会产生如何的结构呢？在博弈论中，知识是一个重要的范畴，完全信息和不完全信息的划分即是基于局中人对局中人特征的认知。

1.2.1 不带信念的知识

定理1.10 假设A是一个非空有限集合，$\approx$是其上的等价关系，定义等价类

$$\forall a \in A, [a] = \{c |\ c \in A,\ \text{s.t.},\ c \approx a\}.$$

任取$a, b \in A$，那么只有两种情形：

$$\text{要么}[a] = [b], \text{要么}[a] \bigcap [b] = \varnothing.$$

因此，等价关系≈给出了A的一个划分

$$\frac{A}{\approx} = \{[a] \mid \forall a \in A\}.$$

证明 在逻辑上，等价类$[a], [b]$的相交只有两种关系

$$[a] \bigcap [b] = \varnothing; \ [a] \bigcap [b] \neq \varnothing.$$

若是后者，不妨设$c \in [a] \bigcap [b]$，根据定义

$$c \approx a, c \approx b,$$

由等价关系的传递性，可知

$$a \approx b,$$

因此

$$[a] = [b].$$

即是等价关系给出了集合的一个划分。 □

定理1.11 假设A是一个非空有限集合，$\tau = \{A_i\}_{i \in I} \in \mathrm{Part}(N)$是其上的一个划分，二元关系

$$a \approx b \Leftrightarrow \exists i \in I, \text{ s.t., } a, b \in A_i \in \tau$$

是一个等价关系。

证明 根据等价关系的定义，我们分三步来证明这个定理。

第一步：任取$a \in A$，验证$a \approx a$.

因为τ是A的一个划分，因此a必定属于τ中的一个子集，因此$a \approx a$.

第二步：验证$a \approx b \Rightarrow b \approx a$.

根据二元关系$a \approx b$的定义，可知

$$\exists i \in I, \text{ s.t., } a, b \in A_i$$

马上推得

$$\exists i \in I, \text{ s.t., } b, a \in A_i$$

因此可得

$$b \approx a.$$

第三步：验证$a \approx b, b \approx c \Rightarrow a \approx c$.

根据二元关系的定义，可知

$$\exists i, j \in I, \text{ s.t., } a, b \in A_i, b, c \in A_j.$$

根据划分的定义，可知$i = j$，因此

$$a, c \in A_i = A_j \in \tau.$$

即

$$a \approx c.$$ □