"十三五"普通高等教育本科规划教材

高等数学

（电类专业适用）

周　芒　编著

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

"十三五"普通高等教育本科规划教材

高等数学

（电类专业适用）

周 芒 编著

高小霞 刘足堂 主审

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书是“十三五”普通高等教育本科规划教材，主要介绍应用于电类专业的高等数学和工程数学，文字浅显，概念清晰，思路明确，方法具体，力求易懂、易学、易掌握，侧重应用。内容包含极限、导数、微分、积分、微分方程、无穷级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换等内容。本书对于数学概念尽可能地用电学或生活中的例子给予解释和说明，力图用浅显和常见的例子解释较抽象的数学概念，将数学与其在电学中的应用紧密地结合起来，达到数学教学为专业教学服务的目的。每章都配有习题帮助学生及时巩固所学知识。

本书可作为高等院校电类专业本科教材，也可作为高职高专电类专业教材以及相关读者的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：电类专业适用/周芒编著. —北京：中国电力出版社，2016.4

“十三五”普通高等教育本科规划教材

ISBN 978-7-5123-8810-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 012260 号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街 19 号　100005　http://www.cepp.sgcc.com.cn）

北京丰源印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2016 年 4 月第一版　　2016 年 4 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　15.25 印张　371 千字

定价 **30.00** 元

前　言

“高等数学”是工科专业的一门既具理论性又具工具性的基础课，历来在专业教学中的作用举足轻重。作为电类专业的基础课，“高等数学”的工具性的特点更为突出，应该能担当基础学科与专业基础课和专业课之间的桥梁作用。对于电类专业的学生，要想学好专业基础课和专业课，首先应该而且必须学好“高等数学”。为此，编者编写了这本适合作为电类专业教材的《高等数学（电类专业适用）》。

本教材以不同层次的电类专业学生为主要对象，着重介绍电类专业课程所必须讲授的高等数学的基本知识。本着“应用为主，够用为度”的原则，使电类专业学生在有限的学时里，能够充分了解和掌握专业基础课和专业课所必须具备的高等数学基础知识；培养学生用动态、辩证的高等数学的思维方法思考问题和解决问题，并通过大量有针对性的典型例题使学生深刻体会所学知识。由于基础学科学时压缩，有些院校已不再安排或少安排“工程数学”这门课程了。因此，本教材尝试将电类专业所需的“工程数学”与“高等数学”编排在一起，作为一门课讲授，以满足电类专业对工程数学的需求。

教材分三个部分：第一部分为高等数学部分，包含极限、导数、微分、积分、微分方程和无穷级数；第二部分为电类专业所需的工程数学部分，包含傅里叶变换、拉普拉斯变换；第三部分是附录，为学习高等数学准备一些基础知识，包含向量、复数和函数。本教材可供电类专业大学本科、专科、高职学生作为教材使用；删除标有★号的内容，也可以作为非电类专业学生的“高等数学”教材。在教学过程中，教师可以根据学生不同的学历层次和不同的专业类别等实际情况对教材内容作相应的取舍。

本教材的编写特点是尽可能用通俗的实例和浅显的语言来解释深奥的数学知识。如在讲解傅里叶变换、拉普拉斯变换等比较复杂、抽象、高深的数学知识时，运用通俗、浅显的语言，而不是晦涩的数学语言进行教学，定理也基本不作证明。着重讲解傅里叶变换和拉普拉斯变换的本质及其电学意义，教会学生运用查阅傅里叶变换表和拉普拉斯变换表的方法对函数进行傅里叶和拉普拉斯变换及其反变换，并且掌握这两种变换在电学和自动控制中的应用。这种教学方法概念清晰、思路明确、方法具体，在书中还配备了这些知识在电学中应用的具体实例，使学生学习后既理解了这些数学概念的含义，又掌握了这些数学知识的具体应用方法，从而能够收到较好的教学效果。

本教材由周芒编著。编者长期从事自动化学科和电类专业的专业基础课和专业课的教学，积累了三十多年的高等数学在专业基础课和专业课中应用的教学经验，编写了这本主要面向电类专业学生的教材。编者希望本教材有别于传统的仅以讲授高等数学为目的的“高等数学”教材，希望本教材具有电类专业应用的特色，希望写作风格有一些创新，希望这些写作初衷能够收到预期的效果。本教材由高小霞、刘足堂担任主审，两位主审对教材的编写提出了很多宝贵意见；赖晓琼承担了全部电子插图的绘制工作。在此，对高小霞、刘足堂和赖

晓琼的辛勤工作表示衷心的感谢！编者并非数学专业科班出身，因而编写数学教材难免有“班门弄斧”之嫌，教材中错误和疏漏在所难免，恳请广大读者、学界同行和前辈，特别是数学专家们给予批评和指正，意见和建议请发至邮箱 zhoumang163@163.com，编者表示不胜感激！

编　者

2015 年 7 月 9 日于珠海

目 录

第 2 篇 工程数学部分

第1篇　高等数学部分

初等数学研究常数数学，研究对象是常量和不变的图形，高等数学研究变量数学，研究对象是变量和变化的图形；研究运动过程和变量变化的过程，特别是变量变化趋向于无限的过程；研究多维空间；研究多因素同时作用的结果，等等。初等数学中讨论过函数、函数表达变量之间相互依赖的关系，因此，函数是高等数学的主要研究对象。

高等数学的理论基础和研究工具是极限。极限是建立在代数学、几何学及解析方法的基础之上的。极限是一个过程，它是以动态的和变化的方式描述变量和事物的变化过程。高等数学有六个特点：

(1) 高等数学深刻揭示了“常”和“变”之间的内在规律。例如求曲线的弧长，先将“常”看作“变”(即将弧长看作折线长的极限)，再通过“变”(极限过程)达到“常”(求得弧的确定长度)。这是初等数学不能实现的。

(2) 高等数学充分描述了“直”和“曲”之间的转换条件。例如，将直线和平面看作曲线和曲面的特例，并认为在一定条件下“直”和“曲”是可以互相转换的。利用弧微分“以直代曲”，通过积分又将“直”再化为“曲”。又例如，直线可以看作是圆心在很远处、半径很大的圆周上的一段圆弧，而一段圆弧又可以看作是由很多微小的直线段连接而成的，用砖块砌成圆形花坛就是一个很好的例子。

(3) 高等数学准确建立了“有限”和“无限”之间的辩证关系。初等数学只能进行有限次的运算，而高等数学运用“极限”的概念和方法，可以实现无限次运算。例如，将正弦函数 $\sin x$ 展开成无穷级数 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{(k-1)} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots$ 就是“有限”和“无限”辩证统一关系的很好例子。

(4) 高等数学与初等数学的关系是“一般”和“特殊”的关系，高等数学涵盖了初等数学，初等数学是高等数学的基础。高等数学可以解决一般性的问题，初等数学只能解决特殊性的问题。

(5) 高等数学将很多数学概念从“具体”推广到了“抽象”。在初等数学中，只有“三维空间”的概念，而在高等数学中，“空间”的概念从“三维”扩展到了“n 维”，甚至是“无穷维”。高等数学更加抽象，结论更加深刻。

(6) 高等数学在从“近似”到“精确”的演绎过程中充分体现了辩证思想方法，从“近似”计算入手，以极限作为运算工具体现变量的变化过程，以极限运算的结果作为求得“精确”结果的最终目的。在整个解决问题的过程中充分体现了高等数学的“微分—积分”的辩证思想和辩证方法。高等数学又称为微积分学。

学习高等数学的目的，不仅是为了学习高等数学这门课程本身，更重要的是要通过学习高等数学学习高等数学提出问题、分析问题和解决问题的思维方式和运算方法。高等数学的方法在概念推理和过程运算中贯穿了辩证的哲学思想，是人类的思想精髓。通过学习高等数学，可以培养严谨的逻辑思维能力、缜密的分析问题能力和运用微积分的方法解决实际问题的能力，可以培养发散的思维方式，可以跳出传统的、固有的思维模式思考问题，可以学会用抽象的思维方式思考问题。

第1章 极　　限

1.1 极限的概念

极限是微积分学的基本概念和重要基础。微积分学是建立在极限的概念和极限的运算基础之上的。极限不是一种状态，极限是一个变量的变化过程。极限是从动态认识静态、由近似认识精确、从有限认识无限的一种数学运算方法。极限包含数列的极限和函数的极限。

通过两个问题可以说明极限的概念以及运用极限方法在解决初等数学无法解决的问题时的应用。

问题1：在古代，人们是如何确定圆周的周长从而计算圆周率 π 的？

在秦汉以前，关于圆周率的计算，人们以"径一周三"作为圆周率的"古率"。后来发现"古率"误差太大，圆周率应该是"径一周三而有余"。到三国时期，刘徽在成书于公元1世纪的《九章算术》的注释中首次应用了极限的思想，提出计算圆周率的科学方法——"割圆术"，用圆内接正多边形的周长逼近并近似代替圆周长，如图1-1所示。刘徽用圆内接正96边形计算得到圆周率为3.14，并指出，内接正多边形的边数越多，所求得的圆周率值就越精确，他用割圆术一直算到圆内接正192边形。

祖冲之（公元429～500年）在前人成就的基础上，采用圆内接正多边形和圆外切正多边形两边夹算的方法逼近圆周。经反复演算，祖冲之计算出圆周率的范围是 $3.1415926<\pi<3.1415927$，并得出了圆周率分数形式的近似值。取 $\frac{22}{7}\approx 3.142857143$ 为约率，取 $\frac{355}{113}\approx 3.1415292$ 为密率。祖冲之朴素地运用了极限计算方法中"夹值定理"的概念，采用了如图1-2所示圆内接正多边形和外切正多边形内外夹算的方法，使得计算圆周率的效率和准确率比刘徽的"割圆术"提高了很多。如果用刘徽的"割圆术"的方法计算，要得到与祖冲之同样的结果，必须要计算到圆内接16 384边形。由此可见，祖冲之采用的"夹算术"的准确率和效率比刘徽采用的"割圆术"要高许多。

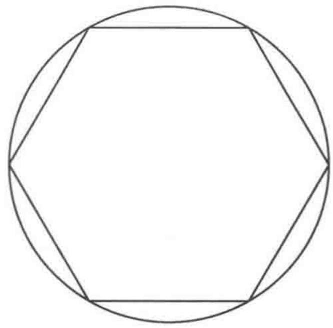

图1-1

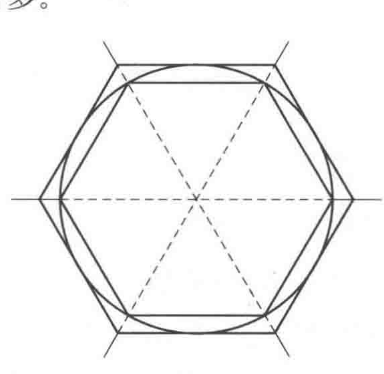

图1-2

从祖冲之计算圆周率得到密率到国外数学家得到同样的结果已是1000多年以后的事了。

为纪念祖冲之对计算圆周率方法的杰出贡献，国外数学家建议将 π 称为“祖率”。

问题 2： 0.999 999…=1?

因为 1/3=0.333 333…，两边乘 3 得到 1=0.999 999…。这个等式看起来很别扭，左边是一个“有限”位数的数，右边却是一个“无限”位数的数，这两个数能相等吗？如何将这两个数统一起来？如何解决类似的问题？在实际生活中，人们已经将 0.9999 认定为 1 了。例如，在 DNA 的认定过程中，两份样本的相似度达到 99.99%就可认为相同，含金量达到 99.99%就认为是足金了。

1.2 极限的思想

刘徽的“割圆术”和祖冲之的“夹算术”求圆周率的方法，从数学概念上讲就是应用了“极限”的思想。刘徽的“割圆术”仅是以内接正多边形无限地接近圆周。祖冲之的“夹算术”则是以内接正多边形和外切正多边形“内外相夹”无限地接近圆周。当内接正多边形和外切正多边形的边数越来越多时，正多边形的形状和周长就越来越逼近圆和圆周长，并且圆的周长一定介于两个正多边形的周长之间。圆形是两个正多边形当边长无限增多时的终极形状——圆是两个正多边形当边长无限增多时的极限。

极限是高等数学的基础，分为数列的极限和函数的极限两大类。数列极限与函数极限的不同之处在于自变量取值方式的不同：数列的自变量仅仅取整数；函数的自变量可以在其定义域内连续取值，即自变量可以取定义域内的任意值。

1.3 极限的表示方法

极限以其英文“limit”的前三个字母 lim 来表示极限的符号，在 lim 符号下标明变量的变化趋势。例如：

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 表示自变量 x 趋向于常数 a 或者无穷大 ∞ 时函数 $f(x)$ 的极限；

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 表示当数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 趋向于无穷大 ∞ 时，数列 $\{a_n\}$ 的通项式 a_n 的极限；

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 表示当数列 $\{a_n\}$ 的和 S_n 的项数 n 趋向于无穷大 ∞ 时，数列 $\{a_n\}$ 的和 S_n 的极限。

1.4 极限的实例

1. 数列的极限

用计算器验证：任意大于 1 的常数经过无限次开方运算后的极限等于 1，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>1)$。例如，$a=5$，通项式为 $a_n=\sqrt[n]{a}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1(n=2,4,8,\cdots,2^k,k\in\mathbf{N})$，经过无限次开方运算后的结果无限地趋近于 1。

实际上，在计算器上看到的是只需经过有限次的开方运算结果就已经等于 1 了，主要原因是受到计算器显示位数的限制。而事实上这个运算值永远不等于 1，但是，随着 n 的增加，它越来越接近数值“1”，并且无限地趋近于数值“1”，因此，数值“1”就是它的极限，

记为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$。

上述极限可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{5}}}}}}=1\quad(n=2,4,8,\cdots,2^k,k\in\mathbf{N})$$

2. 函数的极限

观察图 1 - 3 所示函数 $y(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图像。当自变量 $x\to\infty$ 时和 $x\to 0$ 时函数 $y(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图像的变化趋势，可以直观地判断并验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$。

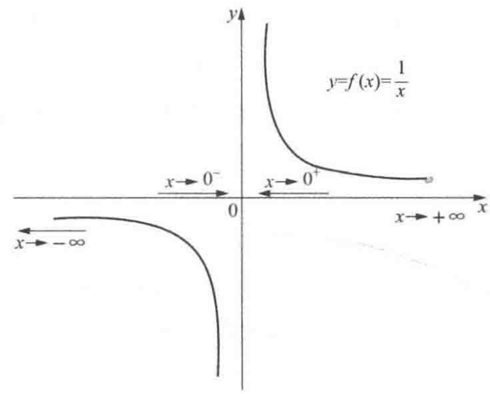

图 1 - 3

3. 电路中应用极限的实例

根据电路知识，可以判断如图 1 - 4 所示电路中电容器的充电电流 $i(t)$ 随时间 t 按指数规律 $\dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$ 衰减，如图 1 - 5 所示。从函数 $i(t)=\dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$ 的图像上观察到：当时间 $t\to\infty$ 时，充电电流 $i(t)$ 逐渐趋向于 0，即 $\lim\limits_{t\to\infty}i(t)=\dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}=0$。显然，电容器的充电电流函数 $i_C(t)$ 是以 0 为极限的。这个结论的电学意义是：经过适当长的时间，电容器充满电后就停止充电，图 1 - 4 的电路中就没有电流了。

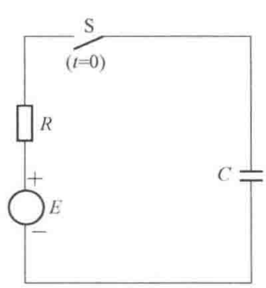

图 1 - 4

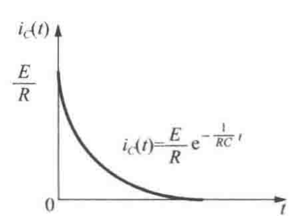

图 1 - 5

1.5 极限的定义

1.5.1 数列的极限

1. 数列的定义

按照某种特定的规律排列的一组数称为数列。

观察下列几组数字，找出每组数字之间的规律。

$$1,2,3,4,5,\cdots$$
$$1,3,5,7,9,\cdots$$

$$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots$$
$$1,2,4,8,16,\cdots$$
$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$$

这几组数字都是由无限多个数字组成的，并按照特定的规律排列，所以称为数列。

一般地，用 a 表示数列中的一个数，用自然数 $n=1$，2，3，…作为 a 的下标，则 a_n 表示数列中第 n 项的数，即数列可以表示为 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，记为 $\{a_n\}$。其中，a_1 称为数列的首项，a_n 称为数列的第 n 项或通项。据此，可以分别写出上述五个数列的通项：

1，2，3，4，5，…，n，…，通项为 $a_n=n$（自然数数列——等差数列——高斯解题方法）；

1，3，5，7，9，…，$2n-1$，…，通项为 $a_n=2n-1$（奇数数列——等差数列）；

1^2，2^2，3^2，4^2，5^2，…n^2，…，通项为 $a_n=n^2$（自然数平方数列）；

1，2，4，8，16，…，2^{n-1}，…，通项为 $a_n=2^{n-1}$（国王奖励数列——等比数列）；

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…，通项为 $a_n=\frac{1}{2^n}$（半衰期数列——等比数列）。

在初等数学中学习过等差数列的求和公式和等比数列前 n 项的求和公式。等差数列的求和公式为$\frac{(a_1+a_n)n}{2}$，其中 a_1 为首项，a_n 为通项，$a_n=a_{n-1}+d$，d 为公差。等比数列的求和公式为$\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，其中 a_1 为首项，a_n 为通项，$a_n=a_{n-1}q$，q 为公比。

通常，数列的前 n 项的和记为 S_n。对于上述五个数列，根据等差数列和等比数列的求和公式，它们前 n 项的和分别为

$$S_n=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2},\ a_1=1,\ a_n=n,\ d=1$$

$$S_n=1+3+5+7+\cdots+2n-1=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2,\ a_1=1,\ a_n=2n-1,\ d=2$$

$$S_n=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\begin{aligned}S_n&=1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-2^{n-1}2}{1-2}\\&=2^n-1,\ a_1=1,\ a_n=2^{n+1},\ q=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\\&=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n},\ a_1=\frac{1}{2},\ a_n=\frac{1}{2^n},\ q=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. 数列极限的定义

设一个数列 $\{a_n\}$，如果存在常数 A，无论预先指定一个多么小的正数 $\varepsilon>0$，当 n 无限增大时，都能在数列中找到一项 a_n，使得在这一项后面的所有项与 A 的差的绝对值都小于 ε，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛，A 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，记作

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$；或者，当 $n\to\infty$时，$\{a_n\}\to A$。$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$ 就是一个数列的极限的例子。这段文字叙述用准确的数学语言可描述为：对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 总能成立，则称数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

3. 邻域的概念

以 A 为中心的区域（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）称为 A 的邻域，如图 1 - 6 所示。

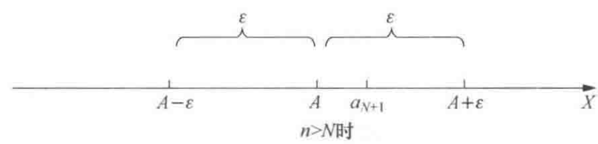

图 1 - 6

数列 $\{a_n\}$ 极限定义的几何意义：因为不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 相当于不等式 $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$，所以，当 $n>N$ 时，对应数列 $\{a_n\}$ 的各项 a_{N+1}，a_{N+2}，…所表示的数对应的点都落在了以 A 为中心、以 ε 为半径的邻域（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）内。这个数列至多只有 N 个有限点落在邻域（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）之外。由此可见，数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，就是指数列 $\{a_n\}$ 中的各项的值在数轴上所对应的各点 a_n 将聚集于点 A 的近旁，n 越大，a_n 所对应的点就越接近 A，如图 1 - 6 所示。

在前面所举的五个数列的例子中，前四个数列的通项 a_n 的极限以及和 S_n 的极限都是无穷大，只有最后一个数列的通项 a_n 的极限是 0，和 S_n 的极限是 1。

$$1,2,3,4,5,\cdots,n,\cdots,\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty,\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2}=\infty$$

$$1,3,5,7,9,\cdots,2n-1,\cdots,\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)=\infty,\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$$

$$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots n^2,\cdots,\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty,\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\infty$$

$$1,2,4,8,16,\cdots,2^{n-1},\cdots,\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}=\infty,\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(2^n-1)=\infty$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

1.5.2 函数的极限

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，即在以 x_0 为中心、以 Δx 为半径的一个小区间 $[x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x]$ 内有定义，或在区间 $[x_1,\ x_2]$（其中 $x_1=x_0-\Delta x$，$x_2=x_0+\Delta x$）内有定义，如图 1 - 7 所示。

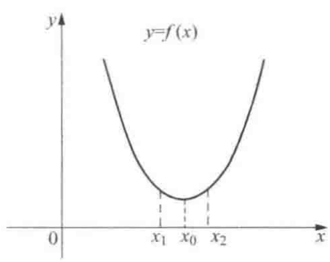

图 1 - 7

1. 函数极限的定义

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，存在一个 A，若对于任意的 $\varepsilon>0$，存在正数 $M\geqslant a$，使得当 $x>M$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称当 $x\to+\infty$时函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$；或当 $x\to\infty$时，$f(x)\to A$。在图 1 - 4 和图 1 - 5 中，$\lim\limits_{t\to\infty}i_C(t)=\dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}=0$ 就是函数极限的例子。

函数极限用数学语言描述为：设$f(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，存在一个 A，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists M$，$M\in[a,+\infty)$，当 $x>M$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限。函数极限的几何意义与数列极限的几何意义类似，不同的是函

数自变量的取值是连续的，如图 1 - 8 所示。

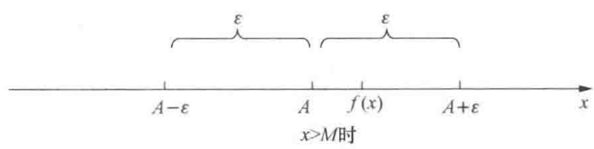

图 1 - 8

2. 函数极限的四种基本类型

函数的极限与自变量的变化方式有关。自变量的变化方式通常有两种，即 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$；函数值的变化趋势也有两种，即 $f(x)\to A$ 和 $f(x)\to\infty$。因此，函数的极限可归纳为四种基本类型：①$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$；②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$；③$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$；④$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$。

第一种类型极限的特点是：在无限区间 $(-\infty,\ a)$，$(a,\ +\infty)$ 或 $(-\infty,\ +\infty)$ 上研究自变量 x 无限增大时，函数 $f(x)$ 的变化趋势。例如，在无限区间 $(-\infty,\ 0)$，$(0,\ +\infty)$ 上研究函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0^-$（从负值趋近零），$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0^+$（从正值趋近零），如图 1 - 3 所示。

第二种类型极限的特点是：在某点 x_0 处附近的小区间上——x_0 的邻域内，研究自变量 x 无限趋近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势。例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq0)$ 表示在点 $x=0$ 的邻域内除 $x=0$ 外有意义，研究当 $x\to0^\pm$ 时，即 x 分别从 0^+ 和 0^- 趋近于 0，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$（从负值趋近无穷大）或 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$（从正值趋近无穷大），如图 1 - 3 所示。

这两种极限所研究的自变量的变化方式不同，一种是 $x\to\pm\infty$，另一种是 $x\to x_0^\pm$，即 x 从 x_0 的左右趋近于 x_0；研究函数的范围也不同，一个在无限区间上，一个在某一固定点 x_0 的邻域内。

1.6　极限存在的判定定理

对于数列 $\{a_n\}$ 或函数 $f(x)$ 的极限问题，重要的是极限的存在性问题，至于如何求极限则是相对比较次要的问题。因为只要确定了极限是存在的，这个极限就一定是一个确定的值，至于如何求极限，那只是一个方法问题。

1. 定理 1——左右极限存在且相等

函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内极限存在的充分必要条件是在点 x_0 的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限一定存在并且就等于函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

如图 1 - 7 所示，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限值就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

如图 1 - 3 所示，由于函数 $y(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义，所以，函数在 $x=0$ 点处的极限也不存在，因为左极限 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$，右极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，左极限不等于右极限 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}$。

2. 定理 2——夹值定理

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域满足下列两个条件：

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=A$（$A$ 为常数）。

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

这个定理称为夹值定理。它表明：如果函数 $f(x)$ 夹在两个函数 $g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 之间，在自变量 x 变化的同一过程中，如果函数 $g(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的极限都是 A，则函数 $f(x)$ 在这一过程中极限一定存在，而且极限也等于 A。

祖冲之就是运用了这个夹值定理，采用圆内接正多边形和圆外切正多边形，当边数无限增多时的周长都以圆周长为极限的方法，两边夹算逼近圆周，计算效率和准确率比刘徽的“割圆术”提高了很多。

3. 定理 3——单调有界定理

(1) 如果 $f(x)$ 单调减少，且 $f(x)\geqslant m$，则 $f(x)$ 的极限存在，且 $\lim f(x)\geqslant m$。

(2) 如果 $f(x)$ 单调增加，且 $f(x)\leqslant M$，则 $f(x)$ 的极限存在，且 $\lim f(x)\leqslant M$。

由于数列是一种自变量取值仅为整数的特殊函数，所以上述定理对于数列也成立。

在图 1 - 4 所示的电容器充电的电路中，电容器的充电电流 $i_C(t)$ 和充电电压 $u_C(t)$ 的极限是定理 3 的最好例证。从图 1 - 5 和图 1 - 9 可以看出：充电电流 $i_C(t)=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$ 是以 0 为下限的单调减少的有界函数，即 $m=0$，$i_C(t)=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\geqslant0$；充电电压 $u_C(t)=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t})$ 是以 E 为上限的单调增加的有界函数，即 $M=E$，$u_C(t)=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t})\leqslant E$，满足定理 3 的两种情形的条件，因此，$i_C(t)$ 和 $u_C(t)$ 的极限一定存在，而且 $i_C(t)$ 是以下限 0 为极限，$u_C(t)$ 以上限 E 为极限，即

$$i_C(t)=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\geqslant0$$

所以 $\lim\limits_{t\to\infty}i_C(t)=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}=0$，如图 1 - 5 所示。

$$u_C(t)=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t})\leqslant E$$

所以 $\lim\limits_{t\to\infty}u_C(t)=\lim\limits_{t\to\infty}E(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t})=E$，如图 1 - 9 所示。

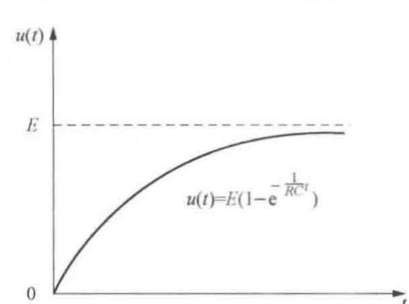

图 1 - 9

1.7 用求极限的方法解决实际问题

刘徽的“割圆术”和祖冲之计算圆周率 π 的“夹算术”解决了本章一开始提出的问题1，而问题2则需要用求数列 $\{a_n\}$ 和 S_n 的极限的方法解决。

解问题2：0.999 999…可以写成下列数列的和的形式

$$\begin{aligned}0.999\,999\cdots &= 0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots\\ &= \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\cdots = S_n,\ n\to\infty\end{aligned}$$

这是一个公比 $q=\frac{1}{10}$，首项 $a_1=\frac{9}{10}$的等比数列的求和问题，所以

$$\begin{aligned}0.999\,999\cdots &= \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}(0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\cdots\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}} = 1\end{aligned}$$

运用极限的概念后，左侧的“无限位”的数就可以等于右侧的“有限位”的数了。

用同样的方法，可以将无限循环小数0.111 111 1…化成分数$\frac{1}{9}$，即

$$0.111\,111\cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

同样还可以得到

$$0.222\,222\cdots = \frac{2}{9};\ 0.333\,333\cdots = \frac{3}{9};\ 0.444\,444\cdots = \frac{4}{9};\ 0.555\,555\cdots = \frac{5}{9}$$

$$0.666\,666\cdots = \frac{6}{9};\ 0.777\,777\cdots = \frac{7}{9};\ 0.888\,888\cdots = \frac{8}{9}$$

所谓“定义”极限，本质上就是给“无限接近”提供一个合乎逻辑的判定方法和一个规范的描述格式。这样，叙述上的各种说法，诸如“根据需要可以写出$\sqrt{2}$的任意接近程度的近似值”，就有了建立在坚实逻辑基础之上的意义。

1.8 极限的运算规则

$$\lim[f(x)+g(x)] = \lim f(x)+\lim g(x)$$
$$\lim[f(x)-g(x)] = \lim f(x)-\lim g(x)$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)},\ \lim g(x)\neq 0$$
$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$