

土木工程前沿问题研究丛书  
土木工程研究生系列教材

# 高等土力学教程

Gaodeng Tulixue Jiaocheng

李广信 林鸿州◎编著

非外借

 武汉理工大学出版社  
WUTP Wuhan University of Technology Press

土木工程前沿问题研究丛书  
土木工程研究生系列教材

# 高等土力学教程

李广信 林鸿州 编著

武汉理工大学出版社  
· 武 汉 ·

## 【内 容 简 介】

本书是一本研究生教材,它是在本科土力学的基础上,以更广阔的视野向学生介绍本学科的发展和基本的研究成果,但尚不是土力学各研究领域的前沿。

本书在形式上进行了一些探索。首先根据学科的发展,本书分为7个专题,即土力学中的应力与应变,土工试验与测试,土的本构关系,土的抗剪强度,土中水及渗流,土体压缩与固结,边坡稳定。在各专题中重点介绍了各领域的主要概念、理论方法,每专题下设若干讲。在各讲中,以问答的形式讲解要点,以例题的形式巩固理论知识和引导实际应用。

本书强调理论概念的理解与理论方法的应用,适于作为高校研究生的教材,也可作为科研人员和工程技术人员的参考书与进修材料。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等土力学教程/李广信,林鸿州编著. —武汉:武汉理工大学出版社,2017. 11

ISBN 978-7-5629-5656-3

I. ① 高… II. ① 李… ② 林… III. ① 土力学-高等学校-教材 IV. ① TU43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 241901 号

项目负责人:杨万庆 汪浪涛 高 英

责任编辑:张明华

责任校对:余士龙

封面设计:付 群

出版发行:武汉理工大学出版社

地 址:武汉市洪山区珞狮路 122 号

邮 编:430070

网 址:<http://www.wutp.com.cn>

经 销:各地新华书店

印 刷:荆州市精彩印刷有限公司

开 本:880mm×1230mm 1/16

印 张:16.5

字 数:435 千字

版 次:2017 年 11 月第 1 版

印 次:2017 年 11 月第 1 次印刷

印 数:1~3000 册

定 价:38.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:027-87515778 87515848 87785758 87165708(传真)

· 版权所有,盗版必究 ·

## 作者简介

李广信 男,1941年10月生,1960年入清华大学水利系本科学习,1981年和1985年分别获清华大学工学硕士和博士学位。被评为清华大学优秀博士生、全国优秀中青年土木工作者,国家教委和国务院学位委员会授予“做出突出贡献的中国博士学位获得者”。1988年晋升为副教授,1991年晋升为教授。主要从事教学和科研工作,1993—1998年任土力学教研组主任。先后在1993年赴美国科罗拉多大学、1998年赴新加坡国立大学作为高级访问学者。培养博士与硕士研究生各10余名。

现任清华大学学术委员会委员、岩土工程系列课组长;土力学及岩土工程学会常务副理事长,水力发电学会理事,土工合成材料专业委员会主任,深基础协会理事,中国土工合成材料协会常务理事,IGS中国委员会副主席,国际低平地学会理事,《岩土工程学报》、《工业建筑》、《地基处理》等刊物编委。主要研究方向:土的本构关系,高土石坝筑坝材料,基础工程,土工合成材料等。已发表学术论文180余篇。多年来从事教学工作和科研工作,有丰富的教学经验和较高的教学水平,参编教材5部。论文《土的本构关系研究》1987年获国家自然科学基金三等奖,论文《土质防渗体高土石坝研究》1993年获国家科技进步一等奖;还有的论文多次获得市部级科研奖励。作为课程负责人,主编的《高等土力学》教材2002年获得清华大学教学优秀成果一等奖;作为主要编者,《基础工程》教材1995年获得清华大学教学优秀成果二等奖,2001年获得清华大学优秀教材二等奖;1999年度和2000年度获得“良师益友”奖励。目前主要负责纵向科研项目:国家重大自然科学基金项目“洪水特性及减灾方法研究”第三课题(50099620),自然科学基金面上项目“土石减载和加载下的屈服”(50279014)等。

# 前 言

由本人主编的《高等土力学》研究生教材已出版十多年了,这期间有十余次印刷。它为普及土力学的基础理论知识和介绍土力学的学科发展有所贡献,也在培养岩土工程的专业科学研究人才中起了很大的作用,受到很多研究生和授课教师的欢迎,即将出版第2版。《高等土力学》是针对清华大学土木水利专业研究生的64课时学位课编写的,内容偏多、偏深。在一些不是主要培养科研型人才、偏重于培养从事工程实践人才的高校,课时没有那么多,这些高校的任课老师在使用该书时,都是在其中挑选一部分内容讲解,这样,学生也就很难理解与完成其中的一些例题、习题和思考题,因而需要适应于这种情况的教材。

关于《高等土力学教程》的形式,我们也想进行一点探索,那就是主要采用问答形式。其实我国古代的高等教育模式基本上是书院式与讨论式。《论语》记载的多是孔子的谈话,即所谓“子曰”,其实是孔子在和他的弟子们聊天与答辩,由弟子们记录整理的。如,子贡问曰:“孔文子何以谓之‘文’也?”子曰:“敏而好学,不耻下问,是以谓之‘文’也。”这样的问答在《论语》中所占的比例很高。在指导研究生期间,我曾规定每周四晚上,把所有我指导的本科生、硕士生以及博士生集中起来,汇报科研课题与论文工作进展、困难和想法等,然后大家讨论,提问题,出主意。更多时间是针对专业的聊天与讨论,我讲得较多。所以在这本书里,采用问答的形式:很多是学生问老师,老师讲解一些基础知识的;也有老师问学生的,以大量的例题形式出现。这样的优点是问题解答集中,概念突出,避免了一些冗长推导,有利于实用、便捷地解决习题和实际问题。

本书是由我和林鸿州副教授合作编著的。林老师来自台湾,在台湾大学获得了硕士学位,又在台湾的环境科研部门从事几年的地质灾害调查研究工作。在清华大学获得博士学位,在清华攻博同时做我的“高等土力学”课的助教,他的学习和工作态度非常认真,勤于思考,概念清楚。获得博士学位后在长安大学任教,主讲“高等土力学”课多年。由于林博士具有在学校授课的经验,能较准确地把握教材的难度、深度及内容的分量等,因此也完成了大量的例题解答、内容的编撰,使此书有的放矢。

本书分为7个专题,26讲,大体上对应于《高等土力学》教材的6章,由于简化了一些内容与理论推导,对于想要更深入了解这方面内容的学生,可以《高等土力学》为参考书。对于以《高等土力学》为教材的师生,也可参考本书中的题解与不同角度的讲法。

本书的内容与形式与同类书相比变化较大,例题也有较大难度,是一种探索。希望能与同行切磋,谬误之处,不吝批评指正。

李广信

2015年11月

# 目 录

专题 1 土力学中的应力与应变 .....	(1)
第 1 讲 应力与应变 .....	(2)
专题 2 土工试验与测试 .....	(10)
第 2 讲 室内试验 .....	(11)
第 3 讲 原位测试 .....	(26)
第 4 讲 模型试验 .....	(30)
专题 3 土的本构关系 .....	(35)
第 5 讲 土与弹性理论 .....	(37)
第 6 讲 邓肯-张(Duncan-Chang)双曲线模型 .....	(48)
第 7 讲 土与塑性理论 .....	(59)
第 8 讲 剑桥(Cam-clay)弹塑性模型 .....	(64)
专题 4 土的抗剪强度 .....	(77)
第 9 讲 土的抗剪强度:特点与机理 .....	(78)
第 10 讲 土的物理性质与强度 .....	(86)
第 11 讲 影响土强度的外部因素 .....	(93)
第 12 讲 土的排水与不排水强度指标 .....	(102)
第 13 讲 土的强度理论 .....	(117)
专题 5 土中水及渗流 .....	(131)
第 14 讲 土中水的形态与性质 .....	(133)
第 15 讲 土中水的渗流 .....	(142)
第 16 讲 土的渗透系数的影响因素及适用范围 .....	(146)
第 17 讲 流网 .....	(149)
第 18 讲 渗流与工程问题 .....	(156)
专题 6 土体压缩与固结 .....	(174)
第 19 讲 土的压缩性 .....	(175)
第 20 讲 沉降的类型与计算 .....	(181)
第 21 讲 地基沉降的计算方法 .....	(187)
第 22 讲 太沙基单向固结理论的复杂情况 .....	(198)
第 23 讲 二向与三向渗流固结 .....	(211)
专题 7 边坡稳定 .....	(219)
第 24 讲 边坡极限平衡分析的平面(直线)滑动面与无限土坡 .....	(222)
第 25 讲 极限平衡的条分法 .....	(230)
第 26 讲 边坡稳定分析中的一些问题 .....	(245)

# 专题 1 土力学中的应力与应变

作为一门力学,其最重要的对象与变量就是应力与应变,土力学也是如此。土力学中应力与应变的特点取决于土本身的特性,也与土是碎散的多孔介质有关。

土力学中所讲的应力,主要是指土骨架的应力,即有效应力。土骨架是由土颗粒相互接触与连接形成的构架体,它能够承担与传递有效应力;土骨架占据整个土体的体(面)积。土骨架应包括其中的孔隙空间,但不包括孔隙中的流体(空气与水)。

在图 1-1 中,假设土颗粒为球形,在竖向为正三角形排列。图 1-1(a)表示的是部分土体土骨架的边界,它所包围的体积即为土骨架的体积;图 1-1(b)表示的是在刚性边界内的体积实际上是大于它所包围的土骨架体积(增加了部分孔隙);图 1-1(c)是三轴试验中土试样在围压作用下被柔性的橡皮膜所界定的边界,在此边界内的体积小于它所包围土骨架的体积,亦即存在着后面所讨论的“膜嵌入(Membrane Penetration)”效应,外部围压越大相应的体积就越小。

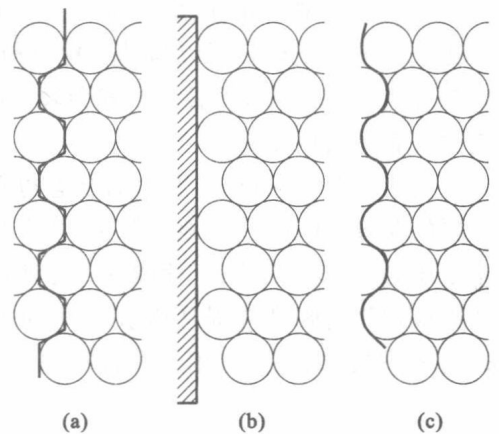


图 1-1 土体的几种边界及相应的体积

(a) 土骨架的边界;(b) 刚性边界;  
(c) 外压下的柔性边界

图 1-2(a)表示的是干土中的土骨架的应力,可见

$$\sigma = \frac{\sum P_i}{A} \quad (1-1)$$

其中, $P_i$  为第  $i$  对颗粒接触点接触力的竖向分力; $A$  为应力作用的面积。

图 1-2(b)表示的是饱和土体中的应力,即

$$\sigma = u + \frac{\sum P_i}{A} = u + \sigma' \quad (1-2)$$

其中, $u$  为孔隙水压力,这就是有效应力原理的表达式。

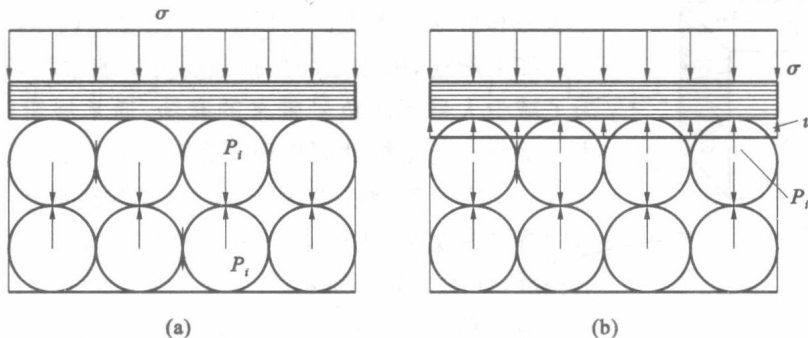


图 1-2 土骨架的应力示意图

(a) 干土;(b) 饱和土

由上可见,对于干土,土骨架的应力  $\sigma = \sum P_i/A$ ,它也就是土体的应力;对于饱和土,作用于土骨架

的应力  $\sigma' = \sum P_i/A$ , 就是土体的有效应力。可以看出, 土骨架的应力与连续介质材料的应力不同。它并不是介质中每一点的应力  $\sigma = \frac{dP}{dA}$ , 而是在一定的面积  $A$  上若干个接触点集中力与此面垂直的分力之和被面积  $A$  除, 因此更像一个虚拟的应力。由于土体的变形与破坏都只与土骨架上的应力有关, 所以可以这么理解: 土力学就是研究土骨架的力学特性及其影响因素的学科。在土中, 颗粒以骨架形态存在, 其孔隙中充满液、气相流体, 这才形成了土。如果颗粒形不成骨架而被流体所隔离, 那就成了泥石流或沙尘暴, 也就不能称为土, 其力学行为自然就与土力学无关了。

土力学中土体的应力与应变的另一个特点是由其碎散性决定的: 由相互接触和连接的颗粒组成的土骨架, 很难承受拉力, 为了避免在应用中到处标注负号, 一般规定应力与应变以压为正, 这就与经典的弹性力学、材料力学中的连续介质应力与应变规定相反。

由于土碎散多孔, 因而土体的变形主要是由于颗粒间的相对位置的改变, 因而它的体积变化主要取决于孔隙体积的变化。所以与其他材料相比, 它的应变, 特别是体应变通常很大: 其孔隙比可大于 1.0, 其体应变可达 10% 以上; 其破坏表现为颗粒间的很大的滑移, 所反映的强度主要是抗剪强度, 因而土力学中剪应力有着重大的意义。

由于土是天然材料, 其应力状态也有其特殊性。土的自重大, 强度低, 在很多情况下其自重应力成为主要的荷载, 如在土坡、地下洞室、挡土结构等稳定问题中; 广袤无垠的大地是承载万物的载体, 这使得静止土压力的  $K_0$  状态是一种常态; 另外, 一些土工构造物常常被当成是二维的平面应变问题; 也由于土力学中最常用的强度准则是莫尔-库仑准则, 它与中主应力无关, 所以土力学中常见的是最大与最小主应力  $\sigma_1$  与  $\sigma_3$ , 除此以外也可用一些特殊的二维应力表示形式(如  $p$  与  $q$  等)表示土中的应力状态。

## 第 1 讲 应力与应变

### 1. 土力学中应力与应变的正负号规定与传统的经典力学有何不同?

#### (1) 三维应力状态下的正负号

在直角坐标系中, 弹性力学中规定正应力以拉为正, 所以在正面上(其外法线方向与坐标方向相同)与坐标方向相同的正应力和剪应力为正; 在负面上与坐标方向相反的正应力和剪应力为正。所以  $\tau_{xy}$  和  $\tau_{yx}$  总是同号的, 如图 1-3 所示。

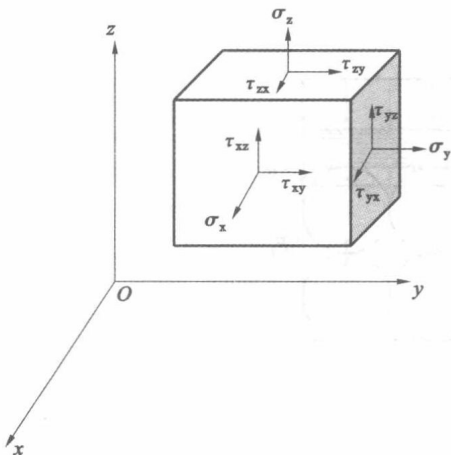


图 1-3 弹性力学中的坐标与应力的正方向

如上所述, 由于土的抗拉强度为零或很小, 也很少承担拉应力, 为了减少大量标注负号带来的麻烦, 通常规定以压应力为正, 同时为了适应土与结构共同作用的数值计算, 最好是不改变坐标体系及其方向。为了使弹性力学的基本公式与经典解答仍然适用, 则其应力的符号规定为: 正面上正应力和剪应力与坐标轴反向为正, 负面上相反, 如图 1-4(a) 所示。

另一种方法是将竖向坐标  $z$  规定向下为正方向。这是一种半无限空间坐标, 它可较好地反映地面下地基和地下工程的空间, 仍采用右手法则的坐标系, 在其正面上正应力与剪应力也是与坐标反向为正, 负面上相反, 见图 1-4(b), 与图 1-4(a) 没有区别, 这样, 弹性力学解答的符号也不变。



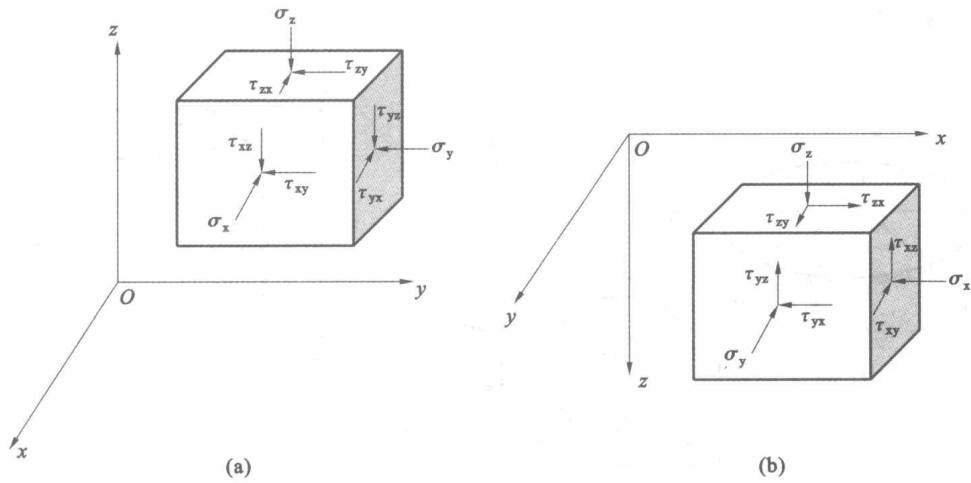


图 1-4 土力学中的应力的正方向

(a) 标准空间坐标; (b) 半无限空间坐标

所以应力的正负号的规定是有一定规则的,如果违背了这些规则,则弹性力学中的一些解答[例如布辛斯克解(Boussinesq Equations)]就不能简单照搬和直接应用,需要对各分量逐个判断正负号。

但在一些有限元数值计算中,一般仍然使用弹性力学的规定,即以拉应力为正。这是由于一些软件是通用的商用软件,可能涉及各种材料与结构,另外,在计算机计算时,即使全部应力应变都带有负号也并不会造成另外的麻烦。

(2) 平面状态下应力莫尔圆中的正负号

对于平面问题,材料力学中常使用莫尔圆,规定正应力以拉为正,但剪应力通常规定以从该作用面的外法线方向顺时针旋转的方向为正,所以  $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$ ,如图 1-5(a)所示。在土力学中则规定正应力以压为正,则剪应力以从外法线逆时针旋转的方向为正,如图 1-5(b)所示,这样,原来的莫尔圆及其规则都可以应用。

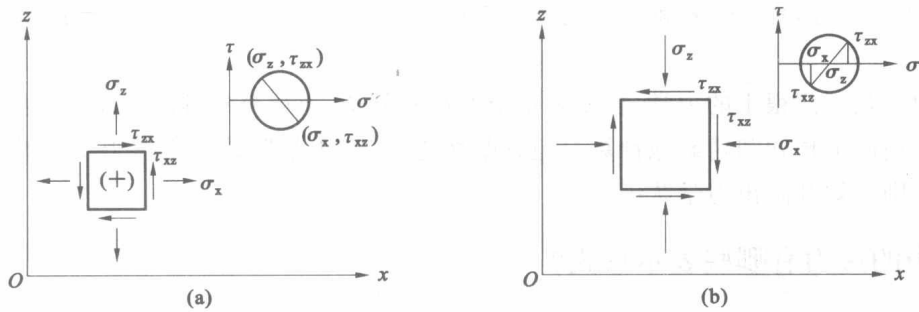


图 1-5 土力学中平面应变下应力的正负号

(a) 材料力学规定; (b) 土力学规定

(3) 应变的正负号

与应力正负号规定相对应,应变也要与应力一致。在土力学中,很少遇到拉应力,可是拉应变却是经常发生的。比如三个主应力均为正(压),在中、小主应力的方向上的主应变可为负(拉),即所谓的“伸(挤)长”。所以在土力学中有拉应变的土一般称为“伸长”,而不宜称为“拉伸”。

**【例 1-1】** 关于应力的正负号在某土力学教材中的表示如图 1-6(a)所示,问它在应用弹性力学的布辛尼斯克解会有什么问题?

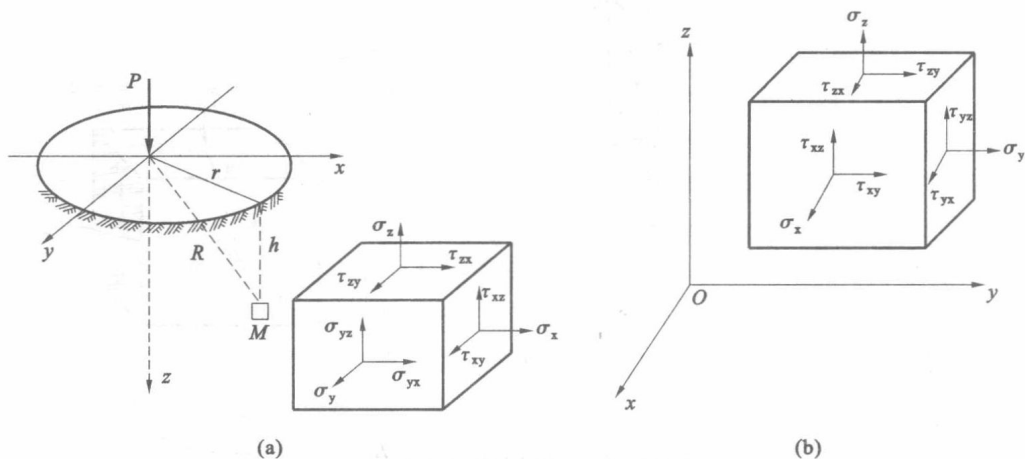


图 1-6 由竖向集中应力引起的附加应力

(a) 某教材的符号规定; (b) 弹性力学的符号规定

**【解】** 图 1-6(a)规定的半无限空间域中竖直向下的  $z$  为正,其坐标系符合右手法则,图 1-6(a)中表示,竖直集中力以压为正,这些符合土力学的习惯规定,但微单元体的坐标系与正负号的规定不同于土力学的符号规定;显然在应用布氏弹性力学的解答时需特别注意正负号问题(布辛尼斯克弹性力学的解答),坐标轴及正负号规定符合弹性力学规定,因此集中力  $P$  是向上的拉力,其正应力也是以拉为正,见图 1-6(b)。

在图 1-6(a)规定的坐标系中以拉应力为正也是可以的。但由于  $z$  是向下为正,此微单元体的上表面是“负面”,其正应力  $\sigma_z$  是与坐标方向相反为正,那么其剪应力  $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{zy}$  也应与坐标方向相反为正,可是图 1-6(a)中却标注  $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{zy}$  与坐标方向相同为正;另外,右手面为“正面”,正应力  $\sigma_x$  与坐标方向相同为正,  $\tau_{xz}$  又是与坐标方向相反为正。此应力负号体系既不同于弹性力学规定也不同于土力学规定。在做了这么多异乎寻常的规定以后,那么布氏解相应的剪应力的正负号将变得十分复杂,自然也不能简单地照抄布氏解。

有人讲,土力学是一门很土的力学,主要是指土的性质复杂,土层分布难以确知,需要很多的经验公式与计算方法,难以精确地预知和精确地计算。但它既然是一门“力学”,就要遵循力学的游戏规则,不能随意规定正负号,否则会被开除出力学队伍。

## 2. 土力学中的应力有哪些表示形式?

与传统的力学一样,土体中一点  $M(x, y, z)$  的应力状态可以用该点的微单元土体上的应力分量表示,见图 1-4。这个微单元的六个面上作用了九个应力分量:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

式(1-3)表示的是一个二阶对称张量,在右侧的矩阵中由于剪应力成对,大小相等,符号相同,因而其中只有六个分量是独立的。所以也可用这六个应力分量的列矩阵表示一点的应力状态:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

或者

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \quad (1-5)$$

土体中任何一点  $M(x, y, z)$  的应力状态都存在三个主应力, 在其作用面上的剪应力为零, 即  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , 它们同样可以反映一个微单元的应力状态。当  $x, y, z$  方向与主应力方向重合时, 三个主应力也可表示为  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 。在一般情况下  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  并不表示三个主应力的大小次序, 但在指定的情况下,  $\sigma_1$  代表大主应力,  $\sigma_2$  代表中主应力,  $\sigma_3$  代表小主应力。可见, 这时只需要独立的三个应力变量就可以反映一个应力状态, 这样就有许多不同的表示方式。表 1-1 列出了一些表示方式。

表 1-1 应力状态的表示方式

方式	主应力	应力不变量	偏应力	偏应力不变量
项目	$\sigma_1$	$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	$S_1 = \sigma_1 - \sigma_m$	$J_1 \equiv 0$
	$\sigma_2$	$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$	$S_2 = \sigma_2 - \sigma_m$	$J_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6}$
	$\sigma_3$	$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$	$S_3 = \sigma_3 - \sigma_m$	$J_3 = \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{27}$

注:  $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ 。

### 3. 为什么土力学中经常使用应力变量 $p, q$ 或 $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ ?

土力学中的应力状态通常较为简单, 最常用的莫尔-库仑理论认为: 土的抗剪强度与中主应力  $\sigma_2$  无关; 常用的三轴试验中也只有两个主应力是独立变化的; 很多土工问题可简化为平面应变问题。这样, 土力学与土工问题中常常只用两个应力变量, 例如大、小主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_3, p$  和  $q$  以及  $\bar{\sigma}$  和  $\bar{\tau}$  等。

在本科土力学中, 常使用平面状态下的莫尔圆, 也就经常出现  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$ , 如图 1-7 所示。

从图 1-7 可以看出:  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ , 它表示莫尔圆的圆心坐标;  $\bar{\tau} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  表示莫尔圆的半径。在图 1-7 中, 将  $\sigma, \tau$  坐标系与  $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$  坐标系合并在一起, 可以发现, 在  $\sigma, \tau$  坐标系中, 土体中某一点的二维应力状态需要一个莫尔圆表示; 而在  $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$  坐标系中, 土体中某一点的二维应力状态只需一点(莫尔圆的圆心坐标与半径)即可。

从此图可以发现:

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \sin \varphi \\ a &= c \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

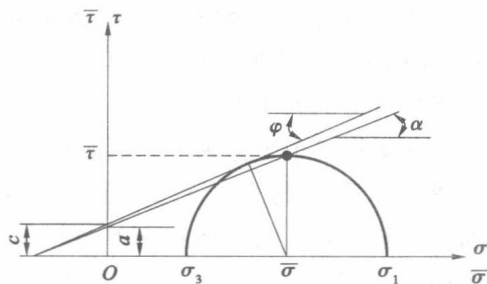


图 1-7 应力莫尔圆与  $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$

在高等土力学中,由于要研究复杂应力状态对于土的变形强度的影响,用莫尔圆就不够了,需要  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  三维的应力状态。因而通常用应力变量  $p$ 、 $q$  表示,其定义为

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{1-7}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \tag{1-8}$$

式中,  $p$  为平均主应力;  $q$  为广义剪应力。

但  $p$  与  $q$  两个应力变量显然不能表示真正的三维应力状态。

土力学中使用  $p$ 、 $q$  这两个应力变量有其简便的优点。例如在常规三轴试验中,如果  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  分别为大、小主应力,则  $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ ,  $q = \sigma_1 - \sigma_3$ ,这时  $q$  也常被称为偏差应力,这种表示无疑是简单的。

#### 4. 如何在 $p$ 、 $q$ 和 $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\tau}$ 坐标系下表示常规三轴压缩试验的应力路径?

在常规三轴压缩试验中,围压  $\sigma_3$  为常数,轴向应力  $\sigma_1$  (或  $\sigma_1 - \sigma_3$ ) 一直增加,直至土样破坏。由于  $d\sigma_3 = 0$ ,所以  $dq/dp = 3$ ,  $d\bar{\tau}/d\bar{\sigma} = 1.0$ ,应力路径见图 1-8。

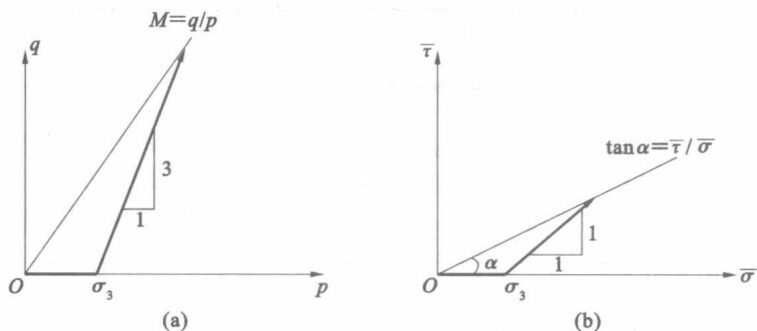


图 1-8 常规三轴压缩试验应力路径

#### 5. 何谓 $\pi$ 平面和应力洛德角 $\theta$ ?

如前所述,表示一个单元的应力状态需要三个主应力。因而只有上述的  $p$ 、 $q$  两个应力变量是不够的。表示应力状态及应力变化,但不考虑应力在现实空间的方向时,也可用由三个主应力组成的空间坐标系,亦称主应力空间,在此空间中,任意一点  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  代表一个应力状态。见图 1-9(a),其中  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  不特指主应力的大小次序。

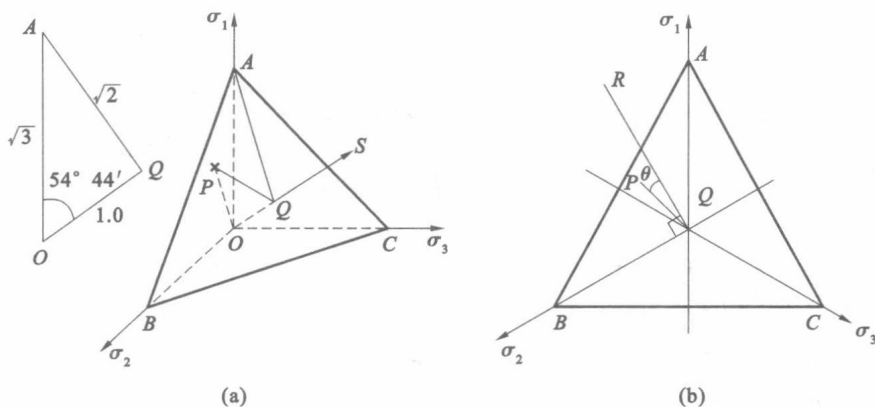
如果在三个坐标轴上分别取相等的三段线段,即  $OA = OB = OC$ ,连接  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点,等边三角形  $ABC$  组成一个平面,这个平面与三个坐标轴的夹角都是  $35^\circ 16'$ 。这个平面就叫作  $\pi$  平面。从坐标原点向此平面作一垂线  $OS$ ,与平面相交于  $Q$ ,直线  $OS$  称为空间对角线。在任一  $\pi$  平面上所有点的三个主应力之和都相等,亦即  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{常数}$ ,亦即平均主应力  $p$  为常数。

$\pi$  平面上一点  $P$  的几何位置可分解为线段  $\overline{OQ}$  和  $\overline{QP}$ ,通过几何关系的推导可得

$$\overline{OQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3}p \tag{1-9}$$

$$\overline{QP} = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}q \tag{1-10}$$

所以线段  $\overline{OQ}$  和  $\overline{QP}$  可以用以量度  $p$  和  $q$ 。

图 1-9 主应力空间与  $\pi$  平面

在图 1-9(b)中,以  $\sigma_2$  轴的垂线  $\overline{QR}$  为基准,  $\overline{PQ}$  与  $\overline{QR}$  的夹角为  $\theta$ ,  $\theta$  称为应力洛德角,可表示为

$$\tan\theta = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (1-11)$$

这样,用  $p$ 、 $q$  和  $\theta$  三个应力变量即可代替  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  和  $\sigma_3$  在主应力空间来表示一点的应力状态。

从图 1-9(b)可见,应力点在不同的角域,其洛德角  $\theta$  具有不同值。如果  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  和  $\sigma_3$  分别代表大、中、小主应力,则  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ ;  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  时,  $\theta = -30^\circ$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$  时,  $\theta = 30^\circ$ 。

与应力洛德角相应的一个常用的参数是  $b$ ,也叫毕肖普参数,它主要反映中主应力的特点,表示为

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1-12)$$

可见,当  $b=0$  时,  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  时,  $\theta = -30^\circ$ ;  $b=1.0$  时,  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$  时,  $\theta = 30^\circ$ 。

**【例 1-2】** 用一种砂土在立方体真三轴仪上进行平均主应力  $p = \text{常数}$ , 广义剪应力  $q = \text{常数}$ , 仅改变  $\theta$  的真三轴试验。当  $\theta = 0^\circ$ 、 $30^\circ$  和  $-30^\circ$  时,将  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  分别用  $p$ 、 $q$  表示。

**【解】**

(1)  $\theta = 0^\circ$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_2 = p, \quad \sigma_1 = 2p - \sigma_3$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma_3 = p - \frac{q}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_1 = p + \frac{q}{\sqrt{3}}$$

(2)  $\theta = 30^\circ$

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = 3p - 2\sigma_1, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma_3 = p - \frac{2q}{3}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = p + \frac{q}{3}$$

(3)  $\theta = -30^\circ$

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_1 = 3p - 2\sigma_3, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma_3 = \sigma_2 = p - \frac{q}{3}, \quad \sigma_1 = p + \frac{2q}{3}$$

**【例 1-3】** 计算对于下列的三种应力状态,三个主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  各为多少?

(1)  $p = 100 \text{ kPa}$ ,  $q = 120 \text{ kPa}$ ,  $\theta = 0^\circ$

(2)  $p = 100 \text{ kPa}$ ,  $q = 73 \text{ kPa}$ ,  $\theta = 15^\circ$

(3)  $p = 123 \text{ kPa}$ ,  $q = 78 \text{ kPa}$ ,  $\theta = -10^\circ$

**【解】**(1) 从上题可得:  $\theta=0^\circ$ 

$$\sigma_3 = p - \frac{q}{\sqrt{3}} = 100 - \frac{120}{1.732} = 30.7 \text{ kPa}, \quad \sigma_2 = p = 100 \text{ kPa}, \quad \sigma_1 = p + \frac{q}{\sqrt{3}} = 169.3 \text{ kPa}$$

(2)  $\theta=15^\circ$ 

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 300 \text{ kPa}, \quad \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} = \tan 15^\circ = 0.268$$

$$\sigma_2 = 0.232(\sigma_1 - \sigma_3) + 0.5(\sigma_1 + \sigma_3), \quad 3p = 1.5(\sigma_1 + \sigma_3) + 0.232(\sigma_1 - \sigma_3) = 300 \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = 173 - 0.73\sigma_3, \quad \text{代入 } \sigma_2: \sigma_2 = 126 - 0.26\sigma_3, \quad \text{代入 } q:$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2 \times 73^2 = 10658 \text{ kPa}$$

$$4.8\sigma_3^2 - 960\sigma_3 + 37386 = 0, \quad \sigma_3 = 53 \text{ kPa}, \quad \sigma_2 = 112.2 \text{ kPa}, \quad \sigma_1 = 134.3 \text{ kPa}$$

(3)  $\theta = -10^\circ$ 

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 369, \quad \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} = \tan(-10^\circ) = -0.176$$

$$\sigma_2 = -0.153(\sigma_1 - \sigma_3) + 0.5(\sigma_1 + \sigma_3), \quad 3p = 1.5(\sigma_1 + \sigma_3) - 0.153(\sigma_1 - \sigma_3) = 369 \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = 2740 - 1.23\sigma_3, \quad \sigma_2 = 95.1 + 0.23\sigma_3$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2 \times 78^2 = 12168 \text{ kPa}$$

$$\text{可得 } \sigma_3 = 83.2 \text{ kPa}, \quad \sigma_2 = 114.1 \text{ kPa}, \quad \sigma_1 = 171.7 \text{ kPa}$$

**【例 1-4】** 已知砂土试样的  $\sigma_1 = 800 \text{ kPa}, \sigma_2 = 500 \text{ kPa}, \sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ , (1) 计算  $I_1, I_2, I_3, J_2, J_3, p, q, b$  和  $\theta$  各是多少?

(2) 如果  $\sigma_1 = 800 \text{ kPa}, \sigma_2 = \sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ , 上述各值为多少?**【解】**

(1)  $I_1 = 1500; I_2 = 660000; I_3 = 80000000; J_2 = 90000; J_3 = 0; p = 500 \text{ kPa}; q = 519.6 \text{ kPa}; b = 0.5;$   
 $\theta = 0^\circ$

(2)  $I_1 = 1200; I_2 = 360000; I_3 = 32000000; J_2 = 120000; J_3 = 16000000; p = 400 \text{ kPa}; q = 600 \text{ kPa};$   
 $b = 0; \theta = -30^\circ$

**【例 1-5】** 在真三轴仪中进行  $\pi$  平面上应力路径为圆周的排水试验, 其中  $p = 100 \text{ kPa}, q = 50 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  分别代表三个方向上的主应力(下标不代表主应力大小次序), 在洛德角  $\theta$  从  $-180^\circ$  到  $180^\circ$ , 以  $30^\circ$  为级差, 计算各主应力值。

**【解】** 解答如表 1-2 所示。

表 1-2 例 1.5 解答

$\theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$-30^\circ$	$60^\circ$	$-60^\circ$	$90^\circ$	$-90^\circ$	$120^\circ$	$-120^\circ$	$150^\circ$	$-150^\circ$	$\pm 180^\circ$
$\tan\theta$	0	0.577	-0.577	1.732	-1.732	$\infty$	$\infty$	-1.732	1.732	-0.577	0.577	0
$\sigma_1$ (kPa)	128.9	116.7	133.3	100	128.9	83.3	116.7	71.1	100	66.7	83.3	71.1
$\sigma_2$ (kPa)	100	116.7	83.3	128.9	71.1	133.3	66.7	128.9	71.1	116.7	83.3	100
$\sigma_3$ (kPa)	71.1	66.7	83.3	71.1	100	83.3	116.7	100	128.9	116.7	133.3	128.9

## 6. 应力洛德角 $\theta$ 与 $\theta'$ 有什么区别?

只用三个主应力表示一点的应力状态, 隐含着材料为各向同性的假设。亦即土体性质与主应力在现实空间的方向无关, 一般用  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  表示的主应力就是如此。可是天然土体通常是各向异性的, 这样主应力就与方向有关了, 所以设三个主应力的方向为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ , 并用  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  表示主应力。这样相应的应力的洛德角定义为:

$$\tan\theta' = \frac{\sqrt{3}(\sigma_y - \sigma_x)}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y} \quad (1-13)$$

这就与  $\theta$  有区别, 见图 1-10。例如以  $\sigma_z$  为轴向应力的常规三轴压缩试验, 其  $\theta' = 0^\circ$ 。

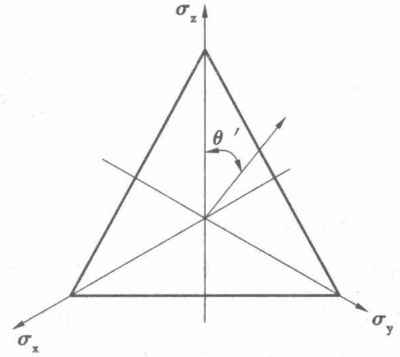


图 1-10  $\pi$  平面上的洛德角  $\theta'$  的定义

## 7. 为什么土力学中的应变通常表示为 $\epsilon_v$ 、 $\bar{\epsilon}$ ?

与  $p$ 、 $q$  表示的应力相对应, 土力学中还常用  $\epsilon_v$ 、 $\bar{\epsilon}$  来表示相应的应变。它们的定义为

$$\epsilon_v = \epsilon_{kk} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (1-14)$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1-15)$$

式中,  $\epsilon_v$  为体应变;  $\bar{\epsilon}$  为广义剪应变。

这种表示也是比较方便的, 比如在三轴试验中, 可以直接量测试样的体变和轴向位移, 以此计算出  $\epsilon_v$

和  $\epsilon_a = \epsilon_1$ , 则广义剪应变  $\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [2(\epsilon_a - \epsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\epsilon_a - \epsilon_3) = \epsilon_1 - \frac{\epsilon_v}{3}$ 。

在土的弹性模型中,  $\epsilon_v = \frac{p}{K}$ ,  $\bar{\epsilon} = \frac{q}{3G}$ 。在增量塑性模型中  $d\epsilon_v^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial p}$ ,  $d\bar{\epsilon}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial q}$ 。可见用  $\epsilon_v$ 、 $\bar{\epsilon}$  来表示应变是较为方便的。

## 专题 2 土工试验与测试

太沙基(Karl Terzaghi)的两本著名著作将土力学分为理论土力学(Theoretical Soil Mechanics)和实用土力学(Soil Mechanics in Engineering Practice),沈珠江先生将现代土力学分为理论土力学、实验土力学、计算土力学和应用土力学四个分支,将实验和计算这两部分从“理论土力学”中分出来,这是十分必要的。20世纪60年代以后,由于计算机技术的快速发展,使人们的计算能力得到空前提高,可以轻易地进行非线性计算和大量的搜索、迭代与反复计算,这就使土的各种非线性本构关系模型的实用成为可能,也就使土的本构模型的研究出现了空前繁荣的局面,土的本构模型如雨后春笋般地被纷纷推出。土的本构模型的研究需要精细、准确及可进行复杂应力路径试验的设备和技术,于是土工试验也得到空前的发展。可见,土力学发展中的计算、理论和实验三个分支有着相互依存和相互促进的密切关系。

由于土的力学性质复杂多变,因此土工试验是土力学中的基础和重要的内容,这使得实验土力学成为土力学的一个重要分支。土工试验不仅仅只限于室内试验,广义地讲,现场测试也可归入土工试验之中。室内试验又可分为模型试验和土单元试验,模型试验可模拟一定的边值问题;土的单元试验是模拟土工问题中的一个“点”,针对一定的应力状态和应力路径进行的基本试验,即试样代表的土单元的应力应变是均匀的,或者可假设为均匀的。另外,由于现场原状土的复杂性与结构性,以及土工问题的诸多影响因素使现场原位测试和工程原型监测成为工程实践中不可缺少的一部分。

土工试验的重要性源于土与土工问题的复杂性。由于土的力学性质的复杂性,土层分布的随机性,土工问题中条件的多变性,使土力学成为一门充满了感性的学科。解决土工问题最基本的手段是试验、测试和经验的积累,是基本理论概念与工程实践的结合。在土力学的研究中,在人才培养中,试验及测试工作是不可缺少的环节。试验和观测是认识和揭示土的力学规律与机理的基本途径,是理论模型和数值计算中参数确定的重要手段;是检验与验证本构模型和计算结果的唯一标准,也是进行岩土工程反分析和信息化设计施工的基础。

在实验土力学中,归纳是最常用的手段。通过对试验资料的归纳,往往会发现和总结出内在的规律。例如:库仑通过大量的直剪试验发现了正应力与破坏剪应力间的线性关系;达西通过渗透试验发现了试验水头与渗透流量间的线性关系。通过归纳、演绎和抽象,揭示现象的内在机理和规律,并在此基础上提出相应的理论。莫尔-库仑强度理论、达西定律和太沙基的一维固结理论就是基于大量试验资料得出的。

土工试验的成果有待于提炼,试验的资料还只是原料,有待于分析和加工。在一个学科中,标志性的理论往往是学科成熟的表现。17世纪以后,随着西方工业化的兴起,各领域的科学技术得到迅速发展,岩土工程的理论也不例外,如莫尔-库仑强度理论与达西定律等;在具体理论计算方面,有朗肯-库仑土压力计算理论,边坡稳定分析的瑞典圆弧条分法,基于极限分析和极限平衡的地基承载力理论等。应当说,土力学作为一个学科的雏形已经形成。太沙基的有效应力原理和随后的饱和土体的一维渗流固结理论是土力学中特有的标志性理论,是土力学中为数不多的较为严密和准确的理论,在土工实践中起到了指导性的作用,所以也就成为土力学学科形成的标志。

如上所述,广义的土工试验包括室内试验、原位测试、模型试验和原位监测等,从内容上又可分为土的物理性质试验、力学性质试验和水力学性质试验等,也可以从宏观和微观上进行不同尺度的试验和测试。本专题侧重于土的力学性质试验。



综上所述,土工试验的不可替代的作用表现在:

- ① 只有通过试验才能揭示土作为一种碎散多相的地质材料的一般和特殊的力学性质;
- ② 只有对具体土样进行试验,才能揭示不同类型、不同产地、不同状态土的不同力学性质,特别是对于非饱和土、区域性土与人工复合土等;
- ③ 试验是确定各种理论模型和工程设计参数的最基本手段;
- ④ 试验是验证各种土力学理论的正确性及适用性的主要依据;
- ⑤ 足尺试验、模型试验可以验证土力学理论与数值计算结果的合理性,也是认识和解决实际工程问题的方案比较和优化的重要手段;
- ⑥ 原位测试、原位试验性施工及原位监测直接为岩土工程服务,同时也是数值计算反分析和实现信息化施工的依据。

所以,土力学的研究和土工实践不能脱离土工试验工作,它们是人们深入认识土的性状和完善理论与计算方法的正确途径,也是工程实践中不可缺少的环节。

## 第2讲 室内试验

### 1. 用三轴仪可以进行哪些应力路径的试验?

在工程单位和本科教学实验室中,一般只进行常规三轴压缩试验,亦即围压 $\sigma_c = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{常数}$ ,轴向应力 $\sigma_a = \sigma_1$ 不断增加,直至破坏的三轴试验,其中 $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ 分别为大、小主应力。这种试验的应力路径简单,易于操作和量测,为工程界人员所熟悉,所以称为“常规”。人们平时所说的三轴试验,也就不言而喻地理解为常规三轴压缩试验。

其实,三轴试验仪的围压 $\sigma_c$ 和轴压 $\sigma_a$ 都是可以独立变化的,这就会衍化出很多应力路径的三轴试验,也可以随时变化应力路径,按照事先设计的路径进行试验。但这些试验的难度大,操作复杂,量测会有一些困难与误差,因而多为科学研究所采用。随着传感器技术、自动控制技术与计算机技术的迅速发展,各种控制应力路径的三轴试验已经可以按照预先设计自动完成。常见的三轴试验有以下类型:

#### (1) 各向等压(静水压缩)(Hydrostatic Compression, HC)试验

在这种试验中,在三轴压力室内用静水压力通过橡皮膜向试样施加围压 $\sigma_c$ ,这时试样的应力状态为 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$ 。试验过程中不断增加围压,同时量测试样的体积变化。可见此试验过程中,轴向活塞杆是没用的。

#### (2) 常规三轴压缩(Conventional Triaxial Compression, CTC)试验

如上所述,此试验有时也简称为三轴试验。在这种试验中,一般试样首先在一定围压 $\sigma_c$ 下各向等压固结(HC),然后保持 $\sigma_c$ 不变,增加轴向应力 $\sigma_a$ 直至破坏。在这种试验中, $b=0$ 或 $\theta=-30^\circ$ 。

#### (3) 常规三轴伸长(Conventional Triaxial Extension, CTE)试验

在这种试验中,一般试样首先被各向等压固结,然后在保持轴向应力 $\sigma_a$ 不变的情况下,即 $\sigma_a = \sigma_3$ ,逐渐增加围压使 $\sigma_c = \sigma_1 = \sigma_2$ ,试样被挤长,所以也被称为“三轴挤长试验”。在这种试验中,轴向加载活塞与试样帽之间要有一定连接装置。尽管试样帽上部通过活塞杆施加的是拉力,但试样帽下部土试样仍然受压,即 $\sigma_a$ 仍然是正值。在这种试验中, $b=1.0$ 或 $\theta=30^\circ$ 。

(4) 平均主应力 $p$ 为常数的三轴压缩(Triaxial Compression, TC)与三轴伸长(Triaxial Extension, TE)试验