国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

EISENSTEIN AXIOM

Eisenstein公理

刘培杰数学工作室 编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

EISENSTEIN AXIOM

Eisenstein 公理

刘培杰数学工作室 编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考题谈起，详细介绍了椭圆函数以及模函数的相关知识. 全书共分为三章，分别为：椭圆函数、模函数、椭圆函数与算术学.

本书可供从事这一数学分支或相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

Eisenstein 公理/刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.8

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6677-7

Ⅰ.①E… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①函数论 Ⅳ.①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 136902 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 牡丹江邮电印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 13.25 字数 136 千字
版　　次 2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－6677－7
定　　价 98.00 元

⊙代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量．书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉．失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理．浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭．吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主．

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会．大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工．一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了．屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看．封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》．管它呢，且往下看．第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪．

三岁孩童千两价，保主跨海去征东．

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）．那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字．这是我有生以来独立看的第一本书．尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著. 我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半而功倍. 我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验. 我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案. 文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择. 世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽. 即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择. 决不要看坏书，对一般书，要学会速读.

读书要多思考. 应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读. 这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题.

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录. 对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”. 动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住. 清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

目录

第1章 椭圆函数 //1

1.1 引言 //1

1.2 二重周期函数及椭圆函数之通性 //5

1.3 魏尔斯特拉斯椭圆函数 //25

1.4 椭圆函数之应用 //54

1.5 雅可比椭圆函数 //67

1.6 雅可比椭圆函数与魏尔斯特拉斯椭圆函数之关系 //114

第2章 模函数 //123

2.1 等价周期偶 //123

2.2 等价平行四边形网 //126

2.3 绝对不变量 J //127

2.4 函数 $J(\tau)$ 在正半平面中为正则 //128

2.5 $J(\tau)$ 之基本性质 //128

2.6 线性代换 //129

2.7 模群 //131

2.8 模群之基本区域 //133
2.9 对 $J(\tau)$之应用 //139
2.10 基本等式 //142
2.11 $J(\tau)$为 k^2 的函数之式 //143
2.12 $J(\tau)$在 $\tau=i\infty$邻近之展开 //144
2.13 $J(\tau)$之实值 //144
2.14 在椭圆函数上之应用 //147
2.15 模函数 //148
2.16 椭圆积分的周期之比为其模之函数 //153

第 3 章 椭圆函数与算术学 //155

3.1 阿贝尔的复形乘法 //158
3.2 克朗耐克 //161
3.3 次数为四和三的艾森斯坦公理 //164
3.4 傅里叶级数和 q—微积分 //169
3.5 高斯求和与 θ—函数 //174
3.6 克朗耐克的有限方程式与费马等式 //176
3.7 丢番图方程式 //180
3.8 结论 //181

编辑手记 //183

椭圆函数

第1章

1.1 引　言

随着中国博士培养工程的突飞猛进，中国的博士毕业人数已居世界第二，仅次于美国，而且在可预见的时间内一定会稳居世界第一．但随之而来的是质量开始下滑，这时大洋彼岸美国的博士培养模式开始受到关注．一份美国加州大学洛杉矶分校（UCLA）博士资格考题走进高校学子的视野，以数学题目而论，它涵盖广、有深度，足以检验出一名候选人的学术潜质和理论功底．

它分成以下几大方面：

一、代数：其中包括群论、环论、域论、线性代数．

二、实分析．

三、复分析．

四、几何拓扑：其中包括流形拓扑、代数拓扑．

本书仅选其中一题详细介绍其背景．此题是1986年的试题．

题目 设 f 为具有周期 w_1, w_2 的椭圆函数，L 为格 $Z_{w_1}+Z_{w_2}$，若 $a_1,\cdots,a_m(b_1,\cdots,b_n)$ 是 f 在基本平行四边形中的零点(极点). 试证

$$a_1+\cdots+a_m \equiv b_1+\cdots+b_n(\bmod L)$$

此题是关于椭圆函数性质的问题，椭圆函数在历史上有两个来源：一是椭圆积分；二是椭圆曲线. 椭圆积分作为古典数学早已沉寂，但椭圆曲线因费马(Fermat)大定理和密码学的兴起而重新唤起人们对它关注的热情，所以椭圆函数又老树发新芽了.

关于椭圆函数历史上有若干著名数学家研究过，雅可比的名著《椭圆函数论新基础》是其经典. 1829年，德国数学家雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi，1804—1851)出版了他的名著《椭圆函数论新基础》(*Fundamenda nova theoriae functionum ellipticarum*). 由于此书的出版，雅可比与阿贝尔共享了发现椭圆函数的盛誉，该著作是雅可比研究工作的总结，是椭圆函数论的重要经典著作.

椭圆函数论是19世纪数学家兴趣的中心点. 在雅可比和阿贝尔之前，高斯、欧拉、拉格朗日、勒让德等人曾经取得椭圆函数论中的许多关键性结果，但他们只考虑椭圆积分，雅可比和阿贝尔差不多同时有了从椭圆积分的反函数入手进行研究的这一重要思想，从而开辟了通往今天椭圆函数论的道路. 雅可比椭圆的思想的发展主要体现在该著作中. 该书由两部分组成，第一部分主要处理椭圆函数的变换. 雅可比以第一类一般椭圆积分为起点，通过结合两种变换，得到了第一类椭圆积分的乘积这一漂亮结果. 之后，雅可比将反函数

$$\varphi = am\,u$$

引入椭圆积分

$$u(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}$$

中，这样就有

$$x=\sin\varphi=\sin amu$$

进一步引入

$$\cos amu=am(k-u)\quad\left(k=u\left[\frac{\pi}{2},k\right]\right)$$

$$\Delta amu=\sqrt{1-k^2\sin^2 amu}$$

（这些在今天分别被表示为 sn u，cn u 和 dn u.）建立了这些函数间的关系. 此外，雅可比将虚数引入椭圆函数论，利用代换

$$\sin\varphi=\mathrm{i}\tan\varphi$$

建立了关系

$$\sin am(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{i}\tan am(u,k')$$

模 k,k' 满足

$$k^2+k'^2=1$$

这样，他得到了椭圆函数的双周期性、零值、无穷值及在半周期上值的变化等结果. 在第一部分的最后，雅可比发展了被所有变换模满足的三阶微分方程.《椭圆函数论新基础》的第二部分处理椭圆函数的表示，致力于将椭圆函数展开成各种无穷乘积和级数. 他给出的椭圆函数 $\sin amu$，$\cos amu$，Δamu 的第一个表示是以无穷乘积商的形式引入函数

$$Z(u)=\frac{F'E(\varphi)-E'F(\varphi)}{F'}\quad(\varphi=amu)$$

之后，他处理第二类积分，第三类积分被化为第一类和第二类积分. 函数

$$H(u)=H(0)\exp\left(\int_0^u z(u)\mathrm{d}u\right)$$

在他的椭圆函数中起了重要作用. 第二部分另外的内容是将 $H(u)$ 这样的函数表示为无穷乘积和傅里叶级数,从而得到一些卓越的公式. 最后,雅可比以椭圆函数论在数论中的应用的讨论结束全书.

此书出版后的多年中,雅可比继续了他在椭圆函数论方面的工作. 他讲授椭圆函数论多年,以致他对这一课题的探讨成为函数论本身发展所遵循的模式.

如果把椭圆函数理论视为一座宏伟的数学大厦的话,那么有一些数学家从事的是打地基的工作,有些数学家是在建立框架,而更多的数学家则是在添砖加瓦添补细节. 打地基的工作需要大师级的人物,如高斯、欧拉、阿贝尔之流;建立理论框架则需要顶级数学家的参与,如拉格朗日、勒让德、雅可比、魏尔斯特拉斯等人;而大量添加细节的工作则是由许许多多还不那么知名的各国数学家去完成. 在早期的数学大国,如英国、法国、德国的浩如烟海的典籍之中,可以发现大量我们现在早已遗忘的人,如德斯佩鲁(Despeyrous Théodore,1815—1883),法国数学家,生于博蒙－德洛马涅(Beaumont-de-Lomagne),卒于图卢兹(Toulouse),学于图卢兹和莱克图尔(Lectoure). 曾任第戎(Dijon)学院教授,著有《椭圆函数》(*Surles functions elliptiques*).

本书限于篇幅只能择其要点略加介绍.

1.2　二重周期函数及椭圆函数之通性

1.2.1　周期函数及其级数展开

设 ω 为一个实数或复数.如单值解析函数 $f(z)$ 无论对 z 之何值皆适合下式

$$f(z+\omega)=f(z)$$

则 $f(z)$ 称为周期函数,而 ω 称为此函数 $f(z)$ 的周期.例如 $\sin z$, $\cos z$ 为以 2π 为周期的函数;$\tan z$, $\cot z$ 为以 π 为周期的函数;而 e^z 为以 $2\pi i$ 为周期的函数.由这些函数的图像研究得知这些函数的周期将其存在区域划分为若干周期地带.兹再就其一般情况研究之.

在 z 平面中标出代表 ω 之点,并在通过原点及点 ω 之无限直线的两端分别截取与 $|\omega|$ 等长的线段各若干次,得

$$\omega,2\omega,3\omega,\cdots,n\omega,\cdots$$

诸点及

$$-\omega,-2\omega,-3\omega,\cdots,-n\omega,\cdots$$

诸点.由此诸点及坐标原点在任一方向,作与 $O\omega$ 不平行的诸平行线,则此平面被划分为无限个等宽的带状区域(图 1).

若由一任意点 z 作与 $O\omega$ 平行之直线,则在 $z+\lambda\omega$ 式中令实数 λ 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 即得此直线的各点.如此点 z 作第一带状区域 $AA'BB'$,则其在第二带状区域内之对应点 $z+2\omega$ 作第二带状区域 $BB'CC'$,其在第三带状区域内之对应点 $z+2\omega$ 作第三带状区域,…….由于函数 $f(z)$ 有周期性,故其在各带状区域内之同位点上之值皆为相等.

设 LL' 与 MM' 为平行 $O\omega$ 之两条无限直线

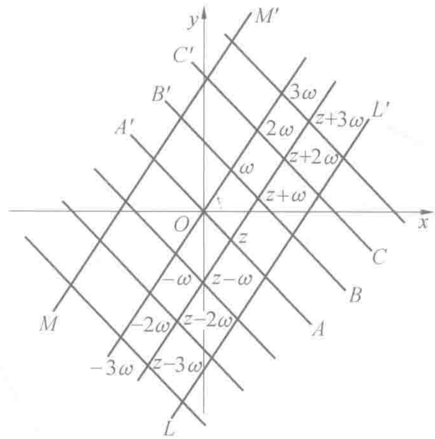

图 1

(图 1)，并设 $u=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}z}{\omega}}$. 当 z 作 LL' 与 MM' 两平行线间之无限带状区域时，u 在其平面中亦作一区域. 兹将此区域求之. 如 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为 LL' 上的一点，则在 $\alpha+\mathrm{i}\beta+\lambda\omega$ 式中令实数 λ 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 即得此直线上的所有点. 因此

$$u=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega}(\alpha+\mathrm{i}\beta+\lambda\omega)}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\omega}}$$

而当 λ 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，u 作以原点为心之圆 C_1. 同理，当 z 作 MM' 直线时，u 作另一以原点为心之圆 C_2. 故若 z 作此两条直线间之无限带状区域，则 u 作此两圆间之环状区域(图 2). 但对此无限带状区域内任一点在此环状区域内则只有一点 u 与之相应；相反的，对此环状区域内任一点在此无限带状区域内则有无限个点 z 与之相应，而此无限个 z 值作成以 ω 为公差的等差数列.

在 LL'，MM' 两平行线间之无限带状区域内为正