财 政 部 规 划 教 材

“十三五”普通高等教育规划教材

《微积分》编写组 编

微 积 分

WEI JI FEN

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

财政部规划教材
“十三五”普通高等教育规划教材

微　积　分

《微积分》编写组　编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/《微积分》编写组编．—北京：中国财政经济出版社，2016.8
财政部规划教材　“十三五”普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5095-6889-7

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①微…　Ⅲ.①微积分—高等学校—教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 180736 号

责任编辑：冯忠贵　　　　责任校对：李　静
封面设计：赫　健　　　　版式设计：王志强

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn
E-mail：jiaoyu @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
营销中心电话：010-82333010　编辑部门电话：010-88190670
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×960 毫米　16 开　21 印张　468 000 字
2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月北京第 1 次印刷
定价：42.00 元
ISBN 978-7-5095-6889-7/O・0053
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：88190744
打击盗版举报热线：010-88190492、QQ：634579818

经济应用基础数学系列精品教材

微积分编委会

李建平　王　宏　涂晓青　吴　曦
白淑敏　崔红卫　黄立宏　盛春红
周　密

前　　言

在目前经济全球化的大背景下，对经济发展规律的研究更加显得迫切和重要，而数学在这一过程中的作用更加重要，各种经济数学模型应运而生."微积分"、"线性代数"、"概率论与数理统计"是三门重要的经济应用数学基础课."微积分"这门课程的思想和方法是人类文明发展史上理性智慧的结晶，它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给学生提供一种思维的训练，帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才必需的文化素质和修养.

本书以提高所面向的高等学校学生的数学素质为目的，渗透了不少现代数学观点，着力培养和提高学生应用数学方法解决经济问题的能力.在内容选取上既注重微积分在传统领域中的知识内容，又加强了它在经济应用中的内容介绍.在叙述上力求清楚易懂，以几何意义对概念和定理加以解释说明，便于读者对相关概念和定理的理解和掌握.

本书内容包括集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数与微分、不定积分、定积分、一元函数微分学和积分学的应用、空间解析几何和向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、无穷级数、常微分方程等.各节后配有适量的习题，书末附有习题答案.

本书由《微积分》编写组编写，李建平、曹定华担任主编，盛春红、王爱银、周密担任副主编，参加编写的人员有韩萍、阿不都热西提・阿不力孜、王宏.黄立宏教授认真审查了此书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢.

由于编者的水平有限，在编写过程中疏忽在所难免，不妥之处敬请广大读者批评指正！

编　者

2016 年 6 月

目　录

第一章　函数 …………………………… 1

第一节　函数的概念及其基本性质 …… 1

一、集合及其运算

二、区间与邻域

三、函数的概念

四、复合函数和反函数

五、函数的基本性质

习题 1-1 …………………………… 8

第二节　初等函数 …………………… 9

一、基本初等函数

二、初等函数

习题 1-2 …………………………… 14

第三节　经济学中常见的函数………… 14

一、成本函数

二、收益函数

三、利润函数

四、需求函数与供给函数

习题 1-3 …………………………… 16

第二章　极限与连续………………… 17

第一节　数列的极限………………… 17

一、数列的概念

二、数列的极限

三、数列极限的性质及收敛准则

习题 2-1 …………………………… 24

第二节　函数的极限………………… 24

一、$x\to\infty$ 时，函数的极限

二、$x\to x_0$ 时，函数的极限

三、函数极限的性质

习题 2-2 …………………………… 29

第三节　无穷小量和无穷大量………… 29

一、无穷小量

二、无穷大量

习题 2-3 …………………………… 33

第四节　函数极限的运算……………… 34

一、极限的运算法则

二、复合函数的极限

习题 2-4 …………………………… 38

第五节　两个重要极限………………… 39

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

习题 2-5 …………………………… 43

第六节　无穷小量的比较和极限在经济学中的应用…………………………… 43

一、无穷小量比较的概念

二、关于等价无穷小量的性质和定理

三、极限在经济学中的应用

习题 2-6 …………………………… 49

第七节　函数的连续性………………… 49

一、函数连续性的概念

二、函数的间断点

三、连续函数的基本性质

四、初等函数的连续性

习题 2-7 …………………………… 55

第八节　闭区间上连续函数的性质…… 55

习题 2-8 …… 58
第三章　导数与微分 …… 59
第一节　导数的概念 …… 59
一、导数的引入
二、导数的定义
三、导数的几何意义
四、可导与连续的关系
习题 3-1 …… 66
第二节　求导法则 …… 67
一、函数四则运算的求导法则
二、复合函数的求导法则
三、反函数的求导法则
四、基本导数公式
五、隐函数的求导法则
六、取对数求导法
七、参数方程的求导法则
习题 3-2 …… 75
第三节　高阶导数 …… 76
习题 3-3 …… 79
第四节　微分及其运算 …… 80
一、微分的概念
二、微分与导数的关系
三、微分的几何意义
四、复合函数的微分及微分公式
习题 3-4 …… 84
第五节　导数与微分在经济学中的应用 …… 84
一、边际分析
二、弹性分析
三、增长率
习题 3-5 …… 89
第四章　微分中值定理与导数的应用 …… 90
第一节　微分中值定理 …… 90
习题 4-1 …… 94
第二节　洛必达法则 …… 94
一、$\frac{0}{0}$型未定式
二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式
三、其他未定式
习题 4-2 …… 100
第三节　泰勒公式 …… 100
一、泰勒公式
二、函数的泰勒展开式举例
习题 4-3 …… 105
第四节　函数的单调性与极值 …… 105
一、函数的单调性
二、函数的极值
习题 4-4 …… 110
第五节　最优化问题 …… 110
一、闭区间上连续函数的最大值和最小值
二、经济学中的最优化问题举例
三、其他优化问题
习题 4-5 …… 115
第六节　函数的凸性和曲线的拐点及渐近线 …… 116
一、函数的凸性和曲线的拐点
二、曲线的渐近线
三、函数图形的描绘
习题 4-6 …… 122
第五章　不定积分 …… 123
第一节　不定积分的概念与性质 …… 123
一、原函数
二、不定积分
三、不定积分的性质
四、基本积分表
习题 5-1 …… 127
第二节　换元积分法 …… 127
一、第一类换元法

二、第二类换元法
习题 5-2 …………………………… 135
第三节 分部积分法 ……………… 137
习题 5-3 …………………………… 140
第四节 几种特殊类型函数的积分 … 140
一、有理函数的积分
二、三角函数有理式的积分
习题 5-4 …………………………… 144
第六章 定积分 ……………………… 145
第一节 定积分概念 ……………… 145
一、定积分问题举例
二、定积分定义
三、定积分的几何意义
四、定积分的性质
习题 6-1 …………………………… 152
第二节 微积分基本公式 ………… 152
一、积分上限函数
二、微积分基本公式
习题 6-2 …………………………… 156
第三节 定积分的换元法 ………… 157
习题 6-3 …………………………… 160
第四节 定积分的分部积分法 …… 161
习题 6-4 …………………………… 163
第五节 定积分的应用 …………… 163
一、建立定积分数学模型的微元法
二、定积分的几何应用
三、定积分的经济学应用
四、定积分在其他方面的应用
习题 6-5 …………………………… 173
第六节 反常积分初步 …………… 174
一、无穷积分
二、瑕积分
三、Γ 函数
习题 6-6 …………………………… 179
第七章 空间解析几何与向量代数 …… 180
第一节 空间直角坐标系 ………… 180
一、空间直角坐标系
二、空间两点间的距离公式
习题 7-1 …………………………… 182
第二节 向量及其运算 …………… 182
一、向量的概念
二、向量的加(减)法、数与向量的乘积
三、向量的分解与向量的坐标
习题 7-2 …………………………… 185
第三节 向量的数量积与向量积 …… 186
一、向量的数量积
二、向量的向量积
习题 7-3 …………………………… 190
第四节 平面及其方程 …………… 190
一、平面的点法式方程
二、平面的一般方程
三、两平面的夹角
习题 7-4 …………………………… 193
第五节 直线及其方程 …………… 194
一、空间直线的一般方程
二、空间直线的点向式方程和参数方程
三、两直线的夹角
四、直线与平面的夹角
习题 7-5 …………………………… 198
第六节 空间曲面及空间曲线 …… 199
一、空间曲面及曲面方程的概念
二、空间曲线及其方程
三、二次曲面
习题 7-6 …………………………… 206
第八章 多元函数微积分 ………… 207
第一节 多元函数的概念 ………… 207
一、平面区域
二、多元函数的概念

习题 8-1 …… 211
第二节 二元函数的极限与连续性 …… 211
一、二元函数的极限
二、二元函数的连续性
三、有界闭区域上二元连续函数的性质
习题 8-2 …… 214
第三节 偏导数与全微分 …… 214
一、偏导数
二、全微分
习题 8-3 …… 220
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法 …… 220
一、多元复合函数的微分法
二、隐函数的微分法
习题 8-4 …… 228
第五节 高阶偏导数 …… 229
习题 8-5 …… 231
第六节 偏导数的应用 …… 231
一、一阶偏导数在经济学中的应用
二、多元函数的极值及其应用
习题 8-6 …… 238
第七节 二重积分 …… 239
一、二重积分的概念与性质
二、二重积分的计算
三、无界区域上的广义二重积分
习题 8-7 …… 252
第九章 无穷级数 …… 254
第一节 数项级数的概念和性质 …… 254
一、数项级数及其敛散性
二、数项级数的基本性质
三、数项级数收敛的必要条件
习题 9-1 …… 259
第二节 正项级数及其敛散性判别法 …… 259
习题 9-2 …… 264
第三节 任意项级数 …… 264
一、交错级数
二、任意项级数及其敛散性判别法
习题 9-3 …… 267
第四节 幂级数 …… 268
一、函数项级数
二、幂级数及其敛散性
三、幂级数的运算
习题 9-4 …… 275
第五节 函数的幂级数展开 …… 276
一、泰勒级数
二、初等函数的幂级数展开式
习题 9-5 …… 280
第十章 微分方程初步 …… 281
第一节 微分方程的基本概念 …… 281
习题 10-1 …… 283
第二节 一阶微分方程 …… 283
一、可分离变量的方程
二、齐次微分方程
三、一阶线性微分方程
习题 10-2 …… 290
第三节 高阶微分方程 …… 291
一、几类可降阶的高阶微分方程
二、二阶线性微分方程解的性质与结构
三、二阶常系数线性微分方程的解法
习题 10-3 …… 303
第四节 微分方程在经济学中的应用 …… 304
一、供需均衡的价格调整模型
二、索洛(solow)新古典经济增长模型
三、新产品的推广模型
习题 10-4 …… 307
习题答案 …… 308

第一章
calculus

函　　数

微积分的主要研究对象是函数.通常人们应用两种方法研究函数.一种方法是代数方法和几何方法的综合运用.一般用这种方法只能研究函数的简单性质,并且有时会变得很复杂.例如,初等数学应用这种方法研究了函数的单调性、奇偶性、周期性等性质.另一种方法是应用微积分的方法,或者说是极限的方法.用此方法能够研究函数的许多深刻性质,其过程相对简单.微积分是用极限的方法研究函数的一门基础数学课程.因此,首先介绍函数的概念及相关知识.

第一节　函数的概念及其基本性质

一、集合及其运算

自从德国数学家康托尔(Georg Cantor,1845—1918)在19世纪末创立集合论以来,集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支,成为现代数学的基础和语言.一般地,所谓集合(简称集)是指具有某种确定性质的对象的全体.组成集合的各个对象称为该集合的元素.

习惯上,用大写字母$A,B,C,\cdots$表示集合,用小写字母$a,b,c,\cdots$表示集合的元素.用$a\in A$表示a是集合A中的元素,读作"a属于A";用$a\notin A$(或$a\overline{\in}A$)表示a不是集合A中的元素,读作"a不属于A".含有有限多个元素的集合称为有限集;含有无限多个元素的集合称为无限集;不含有任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.

集合的表示方法有两种:列举法和描述法.列举法是把集合中的所有元素一一列出,写在一个花括号内的一种方法.如$A=\{-1,1\}$,$B=\{0,1,2\}$等.描述法是在花括号内指明该集合中的元素所具有的确定性质的一种方法.如$C=\{x\mid x^2-1\geqslant 0\}$,$D=\{x\mid \sin x=0\}$等.

一般地,用$\mathbf{N}$表示自然数集,用$\mathbf{Z}$表示整数集,用$\mathbf{Q}$表示有理数集,用$\mathbf{R}$表示实数集.

对于集合A和B,若集合A中的每一个元素都是集合B中的元素,即若$a\in A$则$a\in B$,这时就称A是B的一个子集,记作$A\subseteq B$,读作"A包含于B"(或"B包含A");若$A\subseteq B$,且存在$b\in B$,使得$b\notin A$,则称A是B的一个真子集,记作$A\subsetneqq B$.

规定:空集$\varnothing$是任何集合A的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A,B 相等，记作 $A=B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素，反之，B 中的元素也都是 A 中的元素，即 A,B 中的元素完全一样.

设 A,B 是两个集合，称 $\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$. 它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合.

称 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合.

称 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为集合 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合.

集合的运算满足下述基本法则：

定理 1　设 A,B,C 为三个集合，则

(1) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；　　**(交换律)**

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；　　**(结合律)**

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，
$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$；　　**(分配律)**

(4) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；　　**(幂等律)**

(5) $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；
若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$.　　**(吸收律)**

特别地，由于 $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，所以有

$$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A.$$

二、区间与邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，记 $(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为开区间；记 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为闭区间；记 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左闭右开区间；记 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左开右闭区间；$a,b$ 分别称为区间的左端点和右端点.

另外，我们还记 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid a<x,x\in\mathbf{R}\}$，等等.

设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，记 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$，称为 x_0 的 δ 邻域，其中 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径. 容易知道

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

记 $\mathring{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)-\{x_0\}=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为 x_0 的去心 δ 邻域.

当不必知道邻域的半径 δ 的具体值时，常将 x_0 的邻域和去心邻域分别简记为 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$.

三、函数的概念

定义 1　设 D 为非空实数集，若存在对应法则 f，使得对任意的 $x\in D$，按照对应法则 f，都有唯一确定的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数，简称函数. D 称为 f 的定义域，记作 $D(f)$(或 D_f). 对于 $x\in D(f)$，称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域，记作 $f(D)$ 或 $\mathbf{R}(f)$(或 $\mathbf{R}_f$)，即

$$\mathbf{R}_f=\{f(x)\mid x\in D(f)\}.$$

应该注意：在定义 1 中，函数是 f，它是一个对应法则，规定了 $D(f)$ 中的 x 对应于哪个实数 y；而 $f(x)$(即 y)则是函数值，是在对应法则 f 的规定下 x 所对应的值，这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因，我们习惯上也把 $f(x)$(或 y)称为 x 的函数，x 称为自变量，y 称为因变量.

由定义 1 可知，确定一个函数需确定其定义域和对应法则，因此，定义域和对应法则为确定函数的两个要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应法则都相同，则称这两个函数相同.

函数的表示法一般有三种：表格法、图像法和解析法. 这三种方法各有特点，表格法一目了然；图像法形象直观；解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

例 1　求 $\varphi(x)=\ln(\arcsin x)^2$ 和 $g(x)=2\ln\arcsin x$ 的定义域，并判断它们是否为同一个函数.

解　我们在中学时就已学过，对于用解析式表示的函数 $f(x)$，若其定义域未给出，则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的实数的全体. 因此，要使 $\varphi(x)$ 有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ \arcsin x\neq 0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

故 $D(\varphi)=[-1,0)\cup(0,1]$.

要使 $g(x)$ 有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ \arcsin x> 0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x> 0,\end{cases}$$

故 $D(g)=(0,1]$. 由于 $D(\varphi)\neq D(g)$，可见 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一函数.

例 2　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & 当\ x<0\ 时,\\ x^2+1, & 当\ x\geqslant 0\ 时,\end{cases}$$

求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，并作出函数图形.

解　这是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个函数，在定义域的不同部分上，函数的表达式不同，这种函数称为分段函数. 当 $x<0$ 时，对应的函数值 $f(x)=x-1$[即用 $x-1$ 来计算 $f(x)$]；而当 $x\geqslant 0$ 时，对应的函数值 $f(x)=x^2+1$[即用 x^2+1 来计算 $f(x)$]. 所以

$$f(-1)=(-1)-1=-2,$$
$$f(0)=0^2+1=1,$$
$$f(2)=2^2+1=5.$$

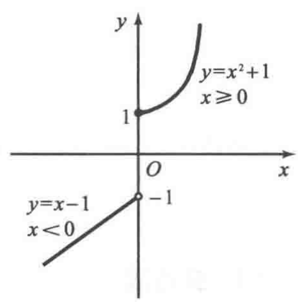


图 1-1

函数图形可分段描绘，并注意空心点和实心点的区别(见图 1-1).

四、复合函数和反函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$,$u\in U$,而 $u=\varphi(x)$,$x\in X$,此时 y 常常能通过变量 u 成为 x 的函数.这是因为对任取 $x\in X$,由 u 是 x 的函数,可确定唯一的一个 u 与之对应,又由于 y 是 u 的函数,对由 x 所确定的 u(当 $u\in U$ 时),又可确定唯一一个 y 与 u 对应,即 $x\xrightarrow{\varphi}u\xrightarrow{f}y$,所以由函数的定义知 y 是 x 的函数.其函数式可通过代入运算得到:将 $u=\varphi(x)$代入 $y=f(u)$中,得 $y=f(\varphi(x))$,称为由$f(u)$和$\varphi(x)$构成的复合函数.

例 3 设 $y=f(u)=\ln u$,$u=\varphi(x)=\sin x$,则它们构成的复合函数为 $y=f(\varphi(x))=\ln\sin x$.

可见,若给出两个函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$,要求复合函数只需做代入运算即可.但应注意,并非任何两个函数都能构成复合函数.

例 4 设 $y=f(u)=\ln(u-2)$,$u=\varphi(x)=\sin x$,问 $f(u)$和 $\varphi(x)$能否构成复合函数$f(\varphi(x))$?

解 将 $u=\sin x$ 代入到 $y=\ln(u-2)$,得 $y=\ln(\sin x-2)$.由于$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,$\sin x-2<0$,故所得函数的定义域为空集,所以不能构成复合函数.

通过例 3、例 4 可以发现,要使 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$能够构成复合函数$f(\varphi(x))$,关键是要保证代入后的函数式要有意义,或者说要保证 $u=\varphi(x)$的值域全部或部分落在 $y=f(u)$的定义域内.这样,我们就可得到复合函数的定义.

定义 2 **若 $y=f(u)$的定义域为 U,而 $u=\varphi(x)$的定义域为 X,值域为 U^*,且 $U\cap U^*\neq\varnothing$,则 y 通过变量 u 成为 x 的函数,称它为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$构成的复合函数,记作$f(\varphi(x))$.u 称为中间变量.**

例 5 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,求复合函数 $f(\varphi(x))$和$\varphi(f(x))$.

解 将 $f(x)$中的 x 用$\varphi(x)$代替,得

$$f(\varphi(x))=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}.$$

同理,
$$\varphi(f(x))=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1+x^2}{1+2x^2}}.$$

2. 反函数

在研究两个变量的函数关系时,可以根据问题的需要,选定其中一个为自变量,那么另一个就是因变量或函数.例如,在圆面积公式 $S=\pi r^2$ 中,圆面积 S 是随半径 r 的变化而变化

的，或者说任给一个 $r>0$，就有唯一确定的 S 与之对应，因此 S 是 r 的函数，r 是自变量，S 是因变量. 但如果是由圆面积 S 的值来确定半径 r，则可从 $S=\pi r^2$ 中解出 r，得 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. 可见 r 是随 S 的变化而变化的，或者说，任给一个 $S>0$，就有唯一确定的 r 与之对应，按函数的定义，r 是S 的函数. 这时，自变量为 S，因变量为 r. 我们称 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$为 $S=\pi r^2$ 的反函数.

若设 $y=f(x)$的定义域为 X，值域为 $Y=\{f(x)\mid x\in X\}$，且 $f(x)$满足：对任意的 x_1，$x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 此时，对任意的 $y\in Y$，必存在唯一确定的 $x\in X$ 满足 $y=f(x)$，换言之，对 Y 中的任何一个 y，通过函数$y=f(x)$可以反解出唯一的一个 x，使得 y 与这个 x 相对应，根据函数的定义，x 是 y 的函数. 这个函数的自变量是 y，因变量是 x，定义域是 Y，值域是 X. 称之为$y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

显见，若 $x=f^{-1}(y)$是 $y=f(x)$的反函数，则 $y=f(x)$是 $x=f^{-1}(y)$的反函数，即它们互为反函数；$x=f^{-1}(y)$的定义域和值域分别是 $y=f(x)$的值域和定义域. 另外易验证 $f^{-1}(f(x))=x,x\in X$；$f(f^{-1}(y))=y,y\in Y$.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$中，y 是自变量，x 是因变量，由于习惯上常用 x 作为自变量，y 作为因变量，因此，反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$ 常记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Y$.

关于反函数还有如下常用结论：

(1) 函数 $y=f(x)$(定义域为 X，值域为 Y)存在反函数 $y=f^{-1}(x)$($x\in Y$)的充要条件是对任意的 $x_1,x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

(2) 若函数 $y=f(x)$，$x\in X$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，则在同一直角坐标系 xOy 中，$y=f(x)$和 $y=f^{-1}(x)$的函数图形关于直线 $y=x$ 对称.

这里对结论(2)说明如下. 若点 $P(a,b)$是 $y=f(x)$的函数图形上的点，即 $b=f(a)$，由反函数定义知，$a=f^{-1}(b)$，因此点 $Q(b,a)$是 $y=f^{-1}(x)$的函数图形上的点；反之，若点 $Q(b,a)$是 $y=f^{-1}(x)$的函数图形上的点，则 $P(a,b)$是 $y=f(x)$的函数图形上的点. 因点$P(a,b)$与 $Q(b,a)$关于直线$y=x$对称(即直线 $y=x$ 垂直平分线段 PQ)，故上述结论(2)正确(见图 1-2).

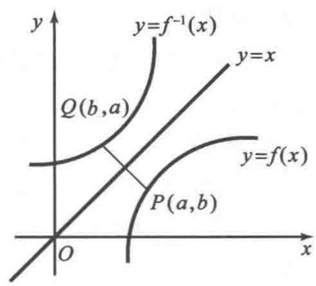


图 1-2

例 6 求下列函数的反函数：

(1) $y=2^x+1$；(2) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x<0,\\ x^2+1, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$

解(1) 由 $y=2^x+1$ 得 $2^x=y-1$，两边取对数得

$$x=\log_2(y-1).$$

交换 x,y 的位置，得反函数

$$y=\log_2(x-1).$$

(2) 当 $-1\leqslant x<0$ 时，由 $y=\sqrt{1-x^2}$得

$$x=-\sqrt{1-y^2},\quad 0\leqslant y<1;$$

当 $0\leqslant x<2$ 时，由 $y=x^2+1$ 得

$$x=\sqrt{y-1},\quad 1\leqslant y<5.$$

于是，有

$$x=\begin{cases}-\sqrt{1-y^2}, & 0\leqslant y<1,\\ \sqrt{y-1}, & 1\leqslant y<5.\end{cases}$$

交换 x,y 的位置，得反函数

$$y=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x-1}, & 1\leqslant x<5.\end{cases}$$

五、函数的基本性质

1. 单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，对任意的 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，

(1) 若有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 内是单调递增的；

(2) 若有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 内是单调递减的.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数，区间 D 称为单调增(减)区间. 当上述不等号为严格不等号时，分别称为严格单调递增和严格单调递减.

例如，$y=x^3$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是单调递增函数；$y=x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内不是单调函数，但 $(-\infty,0]$ 是其单调减区间，$[0,+\infty)$ 是其单调增区间.

易见，若 $f(x)$ 是 (a,b) 内的严格单调函数，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在反函数 $y=f^{-1}(x)$. 这是因为对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，若 $x_1\neq x_2$，则因 $f(x)$ 严格单调，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，故存在反函数.

2. 奇偶性

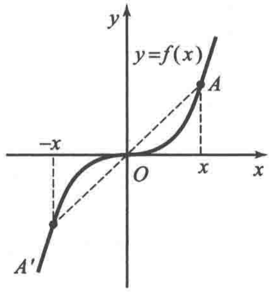
定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$)，对于任意的 $x\in D$，

(1) 若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的奇函数；

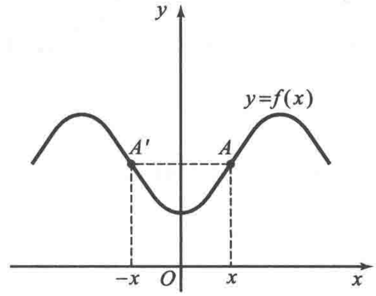
(2) 若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数.

从定义 4 知，奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-3(a)与(b)所示.

例如，$y=x^{2k+1}$(k 为整数)为奇函数，$y=x^{2k}$(k 为整数)为偶函数，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=C$(C 为非零常数)是偶函数，$y=0$ 既是奇函数也是偶函数，$y=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.



(a)



(b)

图 1-3

例 7 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　　　(2) $g(x)=x^2\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

解 (1) 易知 $f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称,$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(2) 易知 $f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称,$g(-x)=(-x)^2\cdot\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=x^2\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$,

所以 $g(x)$是偶函数.

3. 有界性

定义 5 **设函数 $f(x)$在实数集 D 内有定义,如果存在正数 M,使得对任意的$x\in D$,都有**

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$在 D 内有界,或称 $f(x)$在 D 内为有界函数;否则称 $f(x)$在 D 内无界,或称 $f(x)$在 D 内为无界函数.

定义 6 **设函数 $f(x)$在实数集 D 内有定义,若存在实数 A,使得对任意的$x\in D$,都有**

$$f(x)\leqslant A\quad(\text{或 } f(x)\geqslant A)$$

成立,则称 $f(x)$在 D 内有上界(或有下界),也称 $f(x)$是 D 内有上界(或有下界)的函数. A 称为 $f(x)$在 D 内的一个上界(下界).

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必是有界函数. 即函数在 D 内有界的充要条件是该函数在 D 内既有上界又有下界.

若 $f(x)$在 D 内有一个上界(或下界)A,则对任何 $C>0$,$A+C$(或 $A-C$)都是 $f(x)$在 D 内的上界(或下界). 可见,$f(x)$在 D 内的上界(或下界)有无穷多个.

有界函数的几何意义:设 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界,即存在 $M>0$,使得对任意的 $x\in(a,b)$,有 $|f(x)|\leqslant M$,或$-M\leqslant f(x)\leqslant M$. 注意到 $f(x)$表示函数 $y=f(x)$的图形上点$(x,$

$f(x)$)的纵坐标，因此，$y=f(x)$在(a,b)内有界在几何上表示 $y=f(x)$在区间(a,b)内的函数图形夹在两条平行于 x 轴的直线$y=\pm M$之间；反之亦然(见图 1-4).

例如，由于$|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界. 而 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界，这是因为虽然 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内有一个下界 0，但在$(0,+\infty)$内 $y=\frac{1}{x}$无上界，所以 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界. 从几何意义上来看，因为 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内的函数图形不能夹在任何两条平行于 x 轴的直线之间，所以，$y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界(见图 1-5).

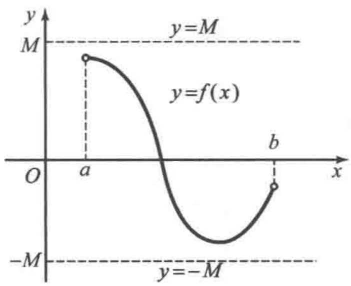


图 1-4

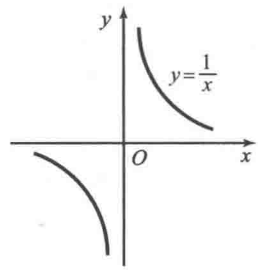


图 1-5

4. 周期函数

定义 7　设 $y=f(x)$的定义域为 $D(f)$，若存在常数 $T\neq 0$，使得对任意的$x\in D(f)$，有 $x\pm T\in D(f)$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为$f(x)$的周期.

显然，若 T 是 $f(x)$的周期，则因 $f(x\pm 2T)=f((x\pm T)\pm T)=f(x\pm T)=f(x)$，知 $2T$ 也是 $f(x)$的周期. 一般地，若 T 为 $f(x)$的周期，则 $f(x)$有无穷多个周期，$kT(k\in\mathbf{Z})$都是$f(x)$的周期. 通常函数的周期是指它的最小正周期(如果存在的话).

例如，$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$都是 $y=\sin x$ 的周期，而 2π 则是它的最小正周期.

注意，并非所有的周期函数都有最小正周期. 如 $y=C$(常数)，任何一个 $T\neq 0$ 都是它的周期，但它没有最小正周期.

习题 1-1

1. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $x^2\leqslant 9$；　　(2) $|x-1|>1$；

(3) $(x-1)(x+2)<0$；　　(4) $0<|x+1|<0.01$.

2. 用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$；

(3) $y=\sqrt{6-5x-x^2}+\frac{1}{\ln(2-x)}$.