$$(\quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n$$

物理中的数学

周顺 编著

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

$$\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{-tA}=B+t[A,B]$$

Mathematics in Physics

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_1^{\infty}(t-z)^{-\alpha}t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}\mathrm{d}t$$

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

物理中的数学

周顺 编著

Mathematics in Physics

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

物理中的数学/周顺编著.—武汉：武汉大学出版社,2017.10
ISBN 978-7-307-19757-2

Ⅰ.物… Ⅱ.周… Ⅲ.数学物理方法 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 247894 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:汪冰滢

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北民政印刷厂
开本：720×1000　1/16　印张:17.5　字数:312 千字　插页:1
版次:2017 年 10 月第 1 版　2017 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-19757-2　定价:45.00 元

写在前面的话

周顺的书要出版了，田贵华先生托我为之写一序，这本是我一向不太喜欢且不善于做的事，加之由于身体的原因我没有对其作品逐章细读，故感到写序似乎不妥。但凭着我对周顺的了解，我还是有一种想写几句话的冲动，姑且叫做写在前面的话吧。

人们常说：眼睛是心灵的窗户，但不幸的是上帝把周顺的这扇窗户给关上了！他，是盲人。十几年来周顺靠着听，刻苦地学习着。泰戈尔曾说“天空没有留下痕迹，但是鸟儿已经飞过”。周顺不是武汉大学的正式学生，武汉大学课堂里也没有留下周顺的足迹。但仅仅靠听，周顺却学完了物理专业本科生应修的全部课程，而且基础知识还掌握得相当牢固。这是何等的不易！对待学习他非常地认真，常常通过电话向老师请教问题，而且问得是那么地仔细、那么地深入。我一直难以理解的是，作为一个双目失明的人在问问题时，竟能把问题是出自某人所编书的某页、某章、某节甚至某行都说得清清楚楚，如同亲眼所见一样！可见他的勤奋、执着和灵气非同一般！

法国数学家笛卡儿说：“数学是知识的工具，亦是其他知识工具的泉源，所有研究顺序和度量的科学均和数学有关。”而数学在物理学中的重要性更是不言而喻。然而数学和数学物理类课程又是难度相当大的课程，在各高校每年都有不少学生挂科。而周顺却对数学情有独钟！仅仅靠听，他不仅掌握了物理学中的广泛数学知识，而且还能将学习见解、体会写作成书，这需要何等的毅力和勇气！在常人看来是难以想象的！心灵，是一盏照亮人生道路的明灯。周顺正是在用心灵学习，用心灵写书。他的奋进，必将给广大的青年学生，特别是残疾青年传递诸多正能量。

周顺的书有其自身的特色，他虽没有按照常规的数学物理类教科书那样层次分明、循序渐进地编写，但他其实是通过反复研读数学物理的相关书籍（他习惯将听称作读或看）后，按他自己学习中的感悟而组织内容编写的。他的书自有他自己感悟中的顺序！

周顺的书其内容是丰富的，既有本科课程中高等数学和线性代数的内容，又有数学物理方法、计算方法甚至群论的内容。这对学习物理中的数学

的人无疑具有很好的参考价值和实用性。

青年学子学习这本书不只是要学习其中的物理学中的数学知识，更是要学习周顺的自强自立的精神！愿所有的残疾朋友，都能像周顺一样身残志坚，不坠青云之志。

姚端正

2016.12.31 于珞珈山

前　　言

伽利略曾经说过，自然是展现在我们面前的一本用数学语言写就的大书。数学是大自然的语言，而物理是用数学语言书写的赞颂自然之美的诗篇，物理中的数学主要诠释如何运用数学语言来书写物理诗篇。

《物理中的数学》共 12 章。

第 1 章至第 4 章论述有限维向量空间的理论以及作用在有限维向量空间上的算子。第 1 章从域的概念出发，按照所定义的加法和数乘，构建有限维向量空间，并论述有限维内积空间，给出有限维向量空间上的线性变换和代数。第 2 章论述算子代数，给出算子函数的导数，定义算子的共轭，并给出 Hermite 算子、幺正算子、投影算子和数值分析中的算子。第 3 章论述算子的矩阵表示，若给出定义空间和像空间的基，那么向量空间上的算子与其表示——矩阵构成一一对应，并讨论矩阵的特征值、行列式和迹。第 4 章的主要内容为谱分解定理：任一有限维复内积空间上的正规算子可进行谱分解。换言之，相对应的矩阵可作对角化。将上述谱分解定理进行推广，有任何矩阵可相似于其 Jordan 标准形。

第 5 章至第 8 章论述无限维向量空间的理论。第 5 章论述完备内积空间及 Hilbert 空间，无限维向量空间的完备性构成本章的主题，在无限维向量空间中寻找完备正交基或使其完备化，将无限维向量空间转变为完备内积空间，并给出平方可积函数空间 $L^2([a,b])$ 同构于 Hilbert 空间。第 6 章论述广义函数，通过 Dirac-δ 函数来展示广义函数的性质，本质上说，广义函数是有界连续函数空间上的连续线性泛函。第 7 章论述 Hilbert 空间中的完备正交基及古典正交多项式。第 8 章为 Fourier 分析，Fourier 级数展示 Hilbert空间中的向量在 Hilbert 空间中完备正交基下的表示。而 Fourier 变换则是众多积分变换中的一种。

第 9 章论述复变函数，分别通过 Cauthy 积分公式和 Laurent 级数来讨论解析函数，同时对复变函数的孤立奇点进行分类，并计算其留数，运用留数来计算某些特殊的积分。本章还简介了某些亚纯函数和多值函数，并讨论了解析函数的解析延拓。

第 10 章论述球坐标系下的分离变量，重点论述在球坐标系下如何运用分离变量法来求解波动方程，并给出 L^2 的本征值和本征矢，用分离变量法求解偏微分方程的过程中可得到若干常微分方程。

第 11 章论述常微分方程的基本理论，包括一阶常微分方程和一阶常微分方程组解的存在和唯一性定理，二阶线性常微分方程级数解。重点论述如何求解复二阶线性常微分方程中的超几何方程和合流超几何方程，并通过积分变换给出上述超几何方程和合流超几何方程解的积分表达。在本章末讨论了常微分方程的数值解法，并附有指标差为整数的超几何方程的另一解。

第 12 章重点论述 Hilbert 空间上紧算子的谱，通过 Hilbert 空间上的谱分解定理与有限维复内积空间上的谱分解定理的对比可以看出，将有限维向量空间上的定理延伸到无限维向量空间上时，须极其谨慎，否则会出现极大的问题。

周顺

2017 年 8 月

目　　录

预备知识

有限维向量空间

无限维向量空间

复　分　析

微　分　方　程

预 备 知 识

1. 集合

自 1874 年 G. Cantor 创立集合概念以来，集合就成为数学中极为基本的概念. 这里引用 Cantor 最初的定义：**集合**是由我们直观感觉或意识到的、确定的、不同对象汇集而成的一个整体. 这些对象称为此集合的**元素**或**点**. 即集合是具有某种属性的、确定的、互不相同的、无序的对象所构成的整体. 集合一般用大写字母表示，如集合 A,B 等,组成整体的对象称为元素或点，用小写字母表示.

集合可用两种方法进行表述，一种是列举集合的所有元素，如自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$；另一种是描述集合的元素特性，如 $\mathbf{N}$ 也可表示为 $\{x \mid x$ 是自然数$\}$.

元素和集合的关系是“属于”(或“不属于”) 关系，记为 $\in$ (或 $\notin$)，如 $1\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$.

设有集合 A,B. 若 $\forall a\in A$，有 $a\in B$，则称 A **包含于** B，或 B **包含** A，或 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subseteq B$. 若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$. 若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，即 $\exists x\in B$，使得 $x\notin A$，则称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A\subset B$.

集合之间有如下基本运算：

① **集合 A 与 B 的交** $A\cap B=\{x\mid x\in A,\ x\in B\}$；

② **集合 A 与 B 的并** $A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$；

③ **集合 A 与 B 的差** $A-B=\{x\mid x\in A$，且 $x\notin B\}$.

集合的交、并运算满足交换律、结合律、分配律和保序性，即有

① $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

② $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

③ $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

④ 若 $A\subset B$，则 $\forall C$，有 $(A\cup C)\subset(B\cup C)$，$(A\cap C)\subset(B\cap C)$.

集合的差运算有如下性质：

① $(A-B)-C=A-(B\cup C)$；

② $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$；

③ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$；

④ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

以集合 A_α，$\alpha \in I$ 为元素组成的集合$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$称为**集族**，其中$\alpha$称为**指标**，$I$ 称为**指标集**. 则集族$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$中所有元素的并和交分别为

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in I,\ x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_\alpha A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in I,\ x \in A_\alpha\}.$$

上述集合的差运算性质可推广到集族：

$$A - \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A - A_\alpha),$$

$$A - \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A - A_\alpha).$$

集合 A 与 B 的**笛卡儿积**，记为 $A \times B$，定义为

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**笛卡儿积**，记为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，定义为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A_i\}.$$

当 $A_i = A$ 时，$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n个}$ 记为 A^n，即 $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n个}$.

若集族$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$的指标集 I 为可列集 $\mathbf{N}$，则集族$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$为**集列**$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. 可以定义集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$的**下限集**和**上限集**分别为

$$\varliminf_{n \to \infty} A_n = \{x \mid \exists N(x) \in \mathbf{N},\ \forall n_k \geqslant N(x),\ 有\ x \in A_{n_k}\},$$

$$\varlimsup_{n \to \infty} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbf{N},\ \exists n_k > n,\ 使\ x \in A_{n_k}\}.$$

根据上限集和下限集的定义有

$$\varliminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m, \quad \varlimsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

以及 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n \to \infty} A_n \subset \varlimsup_{n \to \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

例如集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$：$A_{2n+1} = \left[0, 2 - \dfrac{1}{2n-1}\right]$，$A_{2n} = \left[0, 1 + \dfrac{1}{2n}\right]$，$n \in \mathbf{N}$，则有 $\varliminf_{n \to \infty} A_n = [0, 1]$，$\varlimsup_{n \to \infty} A_n = [0, 2)$.

命题 若 $\varliminf_{n \to \infty} A_n = \varlimsup_{n \to \infty} A_n$，则 $\lim_{n \to \infty} A_n$ 存在，且

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \varliminf_{n \to \infty} A_n = \varlimsup_{n \to \infty} A_n.$$

若集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$满足 $A_n \subset A_{n+1}$，$\forall n \in \mathbf{N}$，则集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$称为**单调增加集列**. 若集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$满足 $A_n \supset A_{n+1}$，$\forall n \in \mathbf{N}$，则集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$称为**单调减少集列**. 单调增加集列和单调减少集列合称为**单调集列**.

命题 单调增加集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$的极限集$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 单调减少集列$\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$的极限集$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

根据上限集和下限集的定义，以及集合的运算性质

$$A - \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (A - A_\alpha), \quad A - \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} (A - A_\alpha),$$

有

$$A - \varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} (A - A_n), \quad A - \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} (A - A_n).$$

19 世纪末，Cantor 所创立的朴素集合论遇到了逻辑矛盾，例如 Russell 悖论. 20 世纪初，在数学家的努力下，完整的公理化体系建立起来了，即公理化集合论，由若干条公理来确定集合. 设 X,Y,Z 为集合.

① **外延公理** 两个集合相同，当且仅当它们拥有相同的元素. 即

$$\forall X,Y, \text{“}\forall x \in X \Leftrightarrow x \in Y\text{”} \Leftrightarrow X = Y.$$

② **空集公理** 存在着一个不包含任何元素的集合，我们称之为**空集**，记为 $\varnothing$.

③ **配对公理** $\forall X,Y$, $\exists Z$, $w \in Z \Leftrightarrow w = X$ 或 $w = Y$.

④ **并集公理** $\forall X$, $\exists Y$, $\forall x \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X$, $x \in Z$.

⑤ **幂集公理** $\forall X$, $\exists Y$, $x \in Y \Leftrightarrow x \subset X$.

⑥ **无穷公理** $\exists X$, $\varnothing \in X$, $\forall x \in X$, $x \cup \{x\} \in X$. 即存在含有无穷多元素的集合.

⑦ **子集公理** $\forall X$, $P(x)$, $\exists Y$, $\forall x \in Y \Leftrightarrow x \in X$ 且 x 满足 $P(x)$. 即任意集合的子集仍是集合.

⑧ **选择公理** $\forall$ 关系 R, $\exists$ 函数 F, $F \subset R$, $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(R)$.

⑨ **正则公理** $\forall A \neq \varnothing$, $\exists m \in A \Rightarrow m \cap A = \varnothing$.

⑩ **替代公理** $\forall X,\varphi$, $\forall x \in X$, $\forall y_1,y_2$, 使得 $x\varphi y_1$ 且 $x\varphi y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$, 则 $\exists Y$, $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$, $x\varphi y$. 即集合在一个映射下的像也是一个集合.

上述公理界定了集合的内涵和外延，并可避免朴素集合论中出现的罗素悖论.

在集合 X,Y 上可以建立关系 R：$\forall a \in X$, $\forall b \in Y$, 若 a,b 满足关系 R，则记为 aRb；若 a,b 不满足关系 R，则记为 $a\overline{R}b$. 若 $Y = X$，也可在 X 上建立关系 R.

可以给关系R指定定义域：$\mathrm{dom}(R)=\{x \mid \exists y, xRy\}$，或值域：$\mathrm{ran}(R)=\{y \mid \exists x, xRy\}$，并可以给关系指定图像：

$$\mathrm{gr}(R)=\{(x,y) \mid xRy, x \in \mathrm{dom}(R)\}.$$

设F,G为两关系，F与G的**复合**，记为$F \circ G$，定义为

$$F \circ G=\{(x,y) \mid \exists z, \text{使得 } xFz, zGy\}.$$

$F^{-1}=\{(y,x) \mid xFy\}$称为$F$的**逆关系**.

称R为**等价关系**，如果R满足以下条件：

① $\forall a \in X, aRa$（自反性）；

② $\forall a,b \in X, aRb \rightarrow bRa$（对称性）；

③ $\forall a,b,c \in X, aRb, bRc \rightarrow aRc$（传递性）.

等价关系有很多，例如全等关系、相似关系、相等关系.

在集合X上建立等价关系R，$\forall a \in X$，定义

$$[a]=\{x \in X \mid xRa\},$$

则$[a]$称为a的**等价类**，a称为$[a]$的**代表元**. $\forall a,b \in X$，有$[a] \cap [b]=\varnothing$或$[a]=[b]$.

X关于R的所有等价类构成X的一个**分割**$\{[x] \mid x \in X\}$，即$\bigcup\limits_{x \in X}[x]=X$且$[x] \cap [y]=\varnothing$，$x \neq y$. 这种以等价类为元素构成的集合称为**$X$关于$R$的商集**，记为$X/R$. 例如，若$[i]=\{m \in \mathbf{Z} \mid m=i \bmod k, k \in \mathbf{N}\}$，$i=0,1,\cdots,k-1$，则$\mathbf{Z}/\mathrm{mod}=\{[0],[1],\cdots,[k-1]\}$.

在集合X上也可建立偏序关系. 称关系“$\prec$”为集合X上的**偏序关系**，如果“$\prec$”满足以下条件：

① $\forall a \in X, a \prec a$；

② 若$a \prec b$，且$b \prec a$，则$a=b$；

③ 若$a \prec b$，且$b \prec c$，则$a \prec c$.

$\forall a,b \in X$，若$a \prec b$，$b \prec a$之一成立，则称X的偏序关系“$\prec$”为X上的**全序关系**.

设X为非空集，在X上建立偏序关系“$\prec$”. 若$Y \subset X$，$\exists x \in X$，$\forall y \in Y$，有$y \prec x$，则称x为Y的**上界**. 若$Y \subset X$，$\exists x \in X$，$\forall y \in Y$，有$x \prec y$，则称x为Y的**下界**. 对于数集，还可以定义确界.

设X为非空集，在X上建立偏序关系“$\prec$”. 若$\exists y \in X$，$\forall x \in X$，$y \prec x$，有$x=y$，则称y为X的**极大元**.

Zorn 引理 若集合X的任意全序子集都有上界，则X存在极大元.