世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

微积分（上册）

（经管类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

微积分（上册）

（经管类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

微积分：经管类．上册/吴赣昌主编．—5 版．—北京：中国人民大学出版社，2017.7
21 世纪数学教育信息化精品教材　大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-24383-2

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①微积分-高等学校-教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 109623 号

21 世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
微积分（经管类·第五版）上册
吴赣昌　主编
Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司	版　　次	2006 年 4 月第 1 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		2017 年 7 月第 5 版
印　　张	19.75 插页 1	印　　次	2017 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	404 000	定　　价	42.80 元

内容简介

本书根据高等院校普通本科经管类专业微积分课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成，并在第四版的基础上进行了重大修订和完善（详见本书前言）。本书包含函数与极限、一元微分学、一元积分学等内容模块，并特别加强了数学建模与数学实验教学环节。

本“书”远非传统意义上的书，作为立体化教材，它包含线下的“书”和线上的“服务”两部分。其中线上的“服务”用以下两种形式提供：一是书中各处的二维码，用户通过手机或平板电脑等移动端扫码即可使用；二是在本书的封面上提供的网络账号，用户通过它即可登录与本书配套建设的网络学习空间。

网络学习空间中包含与本书配套的在线学习系统，该系统在内容结构上包含教材中每节的教学内容及相关知识扩展、教学例题及综合进阶典型题详解、数学实验及其详解、习题及其详解等，并为每章增加了综合训练，其中包含每章的总结、题型分析及其详解、历届考研真题及其详解等。该系统采用交互式多媒体化建设，并支持用户间在线求助与答疑，为用户自主式高效率地学习奠定基础。

本书可作为高等院校经济、管理等非数学本科专业的基础数学教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书。

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了: 优秀的数学教育，乃是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自1999年开始迅速扩大招生规模，至2009年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其他国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战. 大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 大学数学教育过去是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年甚至上百年一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求. 传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与后续课程教学的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面. 二是在信息技术及其终端产品迅猛发展的今天，在大学数学教育领域，信息技术的应用远没有在其他领域活跃，其主要原因是: 在教材和教学建设中没能把信息技术及其终端产品与大学数学教学的内容特点有效地整合起来.

作者主编的“大学数学立体化教材”，最初脱胎于作者在2000—2004年研发的“大学数学多媒体教学系统”. 2006年，作者与中国人民大学出版社达成合作，出版了该系列教材的第一版，合作期间，该系列教材经历多次改版，并于2011年出版了第四版，具体包括: 面向普通本科理工类、经管类与纯文科类的完整版系列教材；面向普通本科部分专业和三本院校理工类与经管类的简明版系列教材；面向高职高专院校理工类与经管类的高职高专版系列教材. 在上述第四版及相关系列教材中，作者加强了对大学数学相关教学内容中重要概念的引入、重要数学方法的应用、典型数学模型的建立、著名数学家及其贡献等方面的介绍，丰富了教材内涵，初步形成了该系列教材的特色. 令人感到欣慰的是，自2006年以来，“大学数学立体化教材”已先后被国内数百所高等院校广泛采用，并对大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2017年，距2011年的改版又过去了6年. 而在这6年时间里，随着移动无线通信技术(如3G、4G等)、宽带无线接入技术(如Wi-Fi等)和移动终端设备(如智能手机、平板电脑等)的飞速发展，那些以往必须在电脑上安装运行的计算软件，如今在

普通的智能手机和平板电脑上通过移动互联网接入即可流畅运行，这为各类教育信息化产品的服务向前延伸奠定了基础.

作者本次启动的“大学数学立体化教材”(第五版) 的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境. 顺利实现这一宗旨，还得益于作者主持的数苑团队的另一项工作成果: 公式图形可视化在线编辑计算软件. 该软件于 2010 年研发成功时，仅支持在 Win 系统电脑中通过 IE 类浏览器运行. 2014 年 10 月底，万维网联盟 (W3C) 组织正式发布并推荐了跨系统与跨浏览器的 HTML5.0 标准. 为此，数苑团队通过最近几年的努力，也实现了相关技术突破. 如今，数苑团队研发的公式图形可视化在线编辑计算软件已支持在各类操作系统的电脑和移动终端 (包括智能手机、平板电脑等) 上运行于不同的浏览器中，这为我们接下来的教材改版工作奠定了基础.

作者本次“大学数学立体化教材”(第五版) 的改版具体包括: 面向普通本科院校的“理工类 • 第五版”“经管类 • 第五版”与“纯文科类 • 第四版”; 面向普通本科少学时或三本院校的“理工类 • 简明版 • 第五版”“经管类 • 简明版 • 第五版”与“综合类 • 应用型本科版”合订本; 面向高职高专院校的“理工类 • 高职高专版 • 第四版”“经管类 • 高职高专版 • 第四版”与“综合类 • 高职高专版 • 第三版”.

本次改版的指导思想是: 为帮助教材用户更好地理解教材中的重要概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验. 实验内容包括: 数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D 函数图形实验、3D 函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等. 相比教材正文所举示例，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大. 本系列教材于 2017 年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验，其中的大部分都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码，即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中.

大学数学按课程模块分为高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计三大模块，各课程的改版情况简介如下:

高等数学课程: 函数是高等数学的主要研究对象，函数的表示法包括解析法、图像法与表格法. 以往受计算分析工具的限制，人们对函数的解析表示、图像表示与数表表示之间的关系往往难以把握，大大影响了学习者对函数概念的理解. 为了弥补这方面的缺失，欧美发达国家的大学数学教材一般都补充了大量流程分析式的图像说明，因而其教材的厚度与内涵也远较国内的厚重. 有鉴于此，在高等数学课程的数学实验中，我们首先就函数计算与函数图形计算方面设计了一系列的数学实验，包括函数值计算实验、不同坐标系下 2D 函数的图形计算实验和 3D 函数的图形计算实验等，实验中的函数模型较教材正文中的示例更复杂，但借助微信扫码功能可即时实现重复实验与修改实验. 其次，针对定积分、重积分与级数的教学内容设计了一系列求

和、多重求和、级数展开与逼近的数学实验. 此外, 还根据相应教学内容的需求, 设计了一系列数值计算实验、符号计算实验与数学建模实验. 这些数学实验有助于用户加深对高等数学中基本概念、定理与思想方法的理解, 让他们通过对量变到质变过程的观察, 更深刻地理解数学中近似与精确、量变与质变之间的辩证关系.

线性代数课程: 矩阵实质上就是一张长方形数表, 它是研究线性变换、向量组线性相关性、线性方程组的解、二次型以及线性空间的不可替代的工具. 因此, 在线性代数课程的数学实验设计中, 首先就矩阵基于行 (列) 向量组的初等变换运算设计了一系列数学实验, 其中矩阵的规模大多为6~10阶的, 有助于帮助用户更好地理解矩阵与其行阶梯形、行最简形和标准形矩阵间的关系. 进而为矩阵的秩、向量组线性相关性、线性方程组及其应用、矩阵的特征值及其应用、二次型等教学内容分别设计了一系列相应的数学实验. 此外, 还根据教学的需要设计了部分数值计算实验和符号计算实验, 加强用户对线性代数核心内容的理解, 拓展用户解决相关实际应用问题的能力.

概率论与数理统计课程: 本课程是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其统计规律性的一门学科. 因此, 在概率论与数理统计课程的数学实验中, 我们首先设计了一系列服从均匀分布、正态分布、0–1 分布与二项分布的随机试验, 让用户通过软件的仿真模拟试验更好地理解随机现象及其统计规律性. 其次, 基于计算软件设计了常用统计分布表查表实验, 包括泊松分布查表、标准正态分布函数查表、标准正态分布查表、t 分布查表、F 分布查表与卡方分布查表等. 再次, 还设计了针对数组的排序、分组、直方图与经验分布图的一系列数学实验. 最后, 针对经验数据的散点图与线性回归设计了一系列数学实验. 这些数学实验将会在帮助用户加深对概率论与数理统计课程核心内容的理解、拓展解决相关实际应用问题的能力上起到积极作用.

致用户

作者主编的“大学数学立体化教材”(第五版) 及 2017 年改版的每本教材, 均包含了与相应教材配套的网络学习空间服务. 用户通过教材封面下方提供的网络学习空间的网址、账号和密码, 即可登录相应的网络学习空间. 网络学习空间提供了远较纸质教材更为丰富的教学内容、教学动画以及教学内容间的交互链接, 提供了教材中所有习题的解答过程. 在所有内容与习题页面的下方, 均提供了用户间的在线交互讨论功能, 作者主持的数苑团队也将在该网络学习空间中为你服务. 使用微信扫码功能扫描教材封面提供的二维码, 绑定微信号, 你即可通过扫描教材内容页面提供的二维码进行相关的数学实验.

在你进入高校后即将学习的所有大学课程中, 就提高你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言, 大学数学是最有用且最值得你努力的课程. 事实上, 像微积分、线性代数、概率论与数理统计这些大学数学基础课程,

你无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将终生受益.

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间去主动学习、训练与实验，才能真正掌握所学知识.

致教师

使用本系列教材的教师，请登录数苑网“大学数学立体化教材”栏目：

http://www.math168.com/dxsx

作者主持的数苑团队在那里为你免费提供与本系列教材配套的教学课件系统及相关的备课资源，它们是作者团队十余年积累与提升的成果. 与本系列教材配套建设的信息化系统平台包括在线学习平台、试题库系统、在线考试及其预约管理系统等，感兴趣和有需要的用户可进一步通过数苑网的在线客服联系咨询.

正如美国《托马斯微积分》的作者G.B.Thomas教授指出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源. 教材是死的，课程是活的. 课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程. 而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方在教、学、考各方面提供充分的支持，帮助教师在教学过程中发挥其才华，帮助学生富有成效地学习.

作 者

2017年3月28日

目　录

绪　言

> 考虑到数学有无穷多的主题内容，数学，甚至是现代数学也是处于婴儿时期的一门科学．如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思维中压倒一切的新特点就是数学悟性要占统治地位．
>
> —— A.N. 怀海德

一、为什么学数学

大学数学（包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计）是高等院校理工类、经管类、农林类与医药类等各专业的公共基础课程．如今，即使以往一般不学数学的纯文科类专业也普遍开设了大学数学课程．为什么现在对它的学习受到如此大的重视？具体来说，大致有以下两方面的原因：

首先是因为当代数学及其应用的发展．进入20 世纪以后，数学向更加抽象的方向发展，各个学科更加系统化和结构化，数学的各个分支学科之间交叉渗透，彼此的界限已经逐渐模糊．时至今日，数学学科的所有分支都或多或少地联系在一起，形成了一个复杂的、相互关联的网络．纯粹数学和应用数学一度存在的分歧在更高的层面上趋于缓和，并走向协调发展．总而言之，数学科学日益走向综合，现在已经形成了一个包含上百个分支学科、各学科相互交融渗透的庞大的科学体系，这充分显示了数学科学的统一性．

数学与其他学科之间的交叉、渗透与相互作用，既使得数学领域在深度和广度上进一步扩大，又促进了众多新兴的交叉学科与边缘学科的蓬勃发展，如金融数学、生物数学、控制数学、定量社会学、数理语言学、计量史学、军事运筹学，等等．这种交融大大促进了各相关学科的发展，使得数学的应用无处不在．20 世纪下半叶，数学与计算机技术的结合产生了数学技术．数学技术的迅速兴起，使得数学对社会进步所起的作用从幕后走向台前．计算机的迅速发展和普及，不仅为数学提供了强大的技术手段，也极大地改变了数学的研究方法和思维模式．所谓数学技术，就是数学的思想方法与当代计算机技术相结合而成的一种高级的、可实现的技术．数学的思想方法是数学技术的灵魂，拿掉它，数学技术就只剩下一个空壳．数学技术对于人类社会的现代化起着极大的推动作用．正是在这个意义上，联合国教科文组织把21 世纪的第一年定为“世界数学年”，并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”．

其次是因为数学能够很好地培养人的理性思维．数学除了是科学的基础和工具外，还是一种十分重要的思维方式与文化精神．美国国家研究委员会在一份题为《人人关心数学教育的未来》的研究报告中指出：“除了定理和理论外，数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、由数据进行推断以及符号运算等．它们是普遍适用的、强有力的思考方式．应用这些数学思考方式的经验构成了数学能力 —— 在当今这个技术时代里日益重要的一种智力．它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探索偏见，能估计风险，能提出变通办法．数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界．”数学在形成人类的理性思维方面起着核心作用，而我国的传统文化教育在这方面恰恰是不足的．一位西方数学史家曾说过：“我们讲授数学不只是要教涉及量的推理，不只是把它作为科学的语言来讲授 —— 虽然这些都很重要 —— 而且要让人们知道，如果不从数学在西方思想史上所起的重要作用方面来了解它，就不可能完全理解人文科学、自然科学、人的所有创造和人类世界．”

二、数学是什么

《数学是什么》是 20 世纪著名数学家柯朗 (R. Courant) 的名著．每一个受过教育的人都不会认为自己不知道数学是什么，但是每个读过这本书的人都受益匪浅．人们了解数学是通过阅读有关算术、代数、几何与微积分等方面的教材和著作，知道数学的一些内容．但这只是数学极小的一部分．柯朗认为，数学教育应该使人了解数学在人类认识自己和认识自然中所起的作用，而不只是一些数学理论和公式．

凡是学过数学的人都能领略到它的特点 —— 理论抽象、逻辑严密，从而显示出一种其他学科无法比拟的精确和可靠．但人们更需要了解的是数学对整个人类文明的重要影响．回顾人类的文明史，2 500 年来，人们一直在利用数学追求真理，而且成就辉煌．数学使人类充满自信，因为由此能够俯视世界、探索宇宙．人类改变世界和自身所依赖的是科学，而科学之所以能实现人的意志是因为**科学的数学化**．马克思曾说过：“一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步．”一百多年前，成功地由数学完善其理论的不过是力学、天文学和某些物理学的分支，化学很少用到数学，生物学与数学毫无关系．而现在就完全不同了，几乎所有科学，不仅是自然科学，而且包括社会科学和人文科学的各个领域，都正在大量应用数学理论．这正是 20 世纪人类社会和自然面貌迅速改变的原因．我们还可以回顾一下，在人类进入近代文明之前，对于现实世界的认识和描述大多是定性的，诸如“日月星辰绕地球旋转”“重的物体比轻的物体下落得快”，等等．而现在的科学则要求定量地知道，一个物体以什么速度沿什么轨道运行，怎样准确无误地把人送到月球上指定的地点，等等．一个科学理论必须经得起反复的观察验证，而且可以精确地预言即将出现的事物和现象，只有这样才能按照人的意志改造客观世界．不论是验证还是预言，都需要有定量的标准，这就要求科学数学化．现在，数学化了的科学已经渗

透到社会所有领域的各个层面，人类可以在大范围内预报中长期的气象，可以预测一个地区、一个国家甚至全世界的经济前景．这是因为现在对于这些看似纷乱的现象已经可以建立数学模型，然后经过演算和推理就能得出人们想知道的结论．金融、保险、教育、人口、资源、遗传，甚至语言、历史、文学都不同程度地采用数学方法，许多领域的科学论文都以它所使用的数学工具作为重要的评估标准之一．电视、通信、摄影技术正在数字化，其目的在于通过计算机技术更准确细微地反映图像、声音．甚至计算歌星与球队的排名都有许多方法．因此有人说："一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量．"

20世纪初期，科学的深刻变化促使人们从哲学高度进行反思，从整个文明发展进程的角度来加以总结，并认识到：数学是一种语言，它精确地描述着自然界和人类自身；数学是一种工具，它普遍地适用于所有科学领域；数学是一种精神，它理性地促使人类的思维日臻完善；数学是一种文化，它决定性地影响着人类的物质文明和精神文明的各个方面．

三、数学科学的形成与发展

当人类试图按照自己的意志来支配和改造自然界时，就需要用数学的方法来构想、描述和落实，因此，在人类文明之初就诞生了数学．古代的巴比伦、埃及、中国、希腊和印度在数学上都有重要的创新，不过从现代意义上说，数学形成于古希腊．著名的欧几里得几何学是第一个成熟的数学分支．相比于欧几里得几何学，其他文明中的数学并未形成一个独立的体系，也没有形成一套方法，而是表现为一系列相互无关的、用于解决日常问题的规则，诸如历法推算和用于农业与商业的数学法则等．这些法则如同人类的其他知识一样是源于经验归纳，因此往往只是近似正确的．例如，有许多像"径一周三"这样以三表示圆周率的命题．欧几里得几何学则完全不同，它是一个逻辑严密的庞大体系，仅从10条公理出发，就推导出487个命题，采用的是与归纳思维法相反的演绎推理法．归纳法是由特殊现象归纳出一般规律的思维方法，而演绎法则正好相反，它从已有的一般结论推导出特殊命题．例如，假定有"一个运用数学的学科是成熟的学科"这样一个公认正确的一般结论，即所谓的大前提；"物理学运用了数学"是一个特殊的命题，即所谓的小前提；由以上两点可以得出结论："物理学是成熟的学科"．这就是常说的"三段论"逻辑．演绎法就运用了这样的逻辑，其主要特征是在前提正确的情况下，结论一定正确．意识到逻辑推理的作用是古希腊文明对人类的一项巨大贡献．

在希腊被罗马帝国统治之后，希腊的数学研究中断了将近2 000年．在与罗马的历史平行的1 100年间，希腊没有出现过一位数学家．他们夸耀自己讲究实际，兴建过许多庞大的工程．但是过于务实的文化不能产生深刻的数学．在那之后统治欧洲的基督教提倡为心灵作好准备，以便死后去天国，对于现实的物理世界缺乏兴趣．这一时期，数学在中国、印度和阿拉伯地区继续发展，也有许多重要的创新．但是这些古代文明不像希腊文明那样追求绝对可靠的真理，因此没有形成大规模的理论

结构体系. 例如, 著名的数学家祖冲之提出的圆周密率领先欧洲 1 000多年, 但是他没有给出推导密率的理论依据.

被罗马帝国和基督教逐出的希腊文明, 在1 000 多年后重返欧洲. 当时, 教会仍然主宰一切, 真理只存在于《圣经》之中. 饱受压抑而善于思索的学者们看清了希腊文明远比教会高明, 于是他们立即接受了这份遗产, 特别是"世界按数学设计"的信念. 哥白尼经过多年的观察和计算, 创立了日心说, 认定太阳才是宇宙的中心, 而不是地球. 日心说不仅改变了那个时代人类对宇宙的认识, 而且动摇了宗教的基本教义: 上帝把最珍爱的创造物 —— 人类安置在宇宙的中心 —— 地球. 日心说是近代科学的开端, 而科学正是现代社会的标志. 科学使处于低水平的西欧文明迅速崛起, 短短两三百年后领先于全世界.

在这之后, 科学发展具有决定性意义的一步是由伽利略 (G. Galileo) 迈出、由牛顿完成的, 这就是**科学的数学化**. 伽利略认为, 基本原理必须源于经验和实验, 而不是智慧的大脑. 这是革命性的关键的一步, **它开辟了近代实验科学的新纪元**. 人脑可以提供假设, 但假设和猜想必须通过检验. 哥白尼的日心说如此, 牛顿的万有引力定律如此, 爱因斯坦的相对论也是如此. 为了使科学理论得以反复验证, 伽利略认为科学必须数学化, 他要求人们不要用定性的模糊的命题来解释现象, 而要追求定量的数学描述, 因为数量是可以反复验证和精确测定的. **追求数学描述而不顾物理原因是现代科学的特征**.

17 世纪60年代, 牛顿用这种新的方法论取得了辉煌的成功, 以至几乎所有科学家都立即接受了这种方法, 并取得了丰硕的成果. 这种方法称为西欧工业革命的科学基础. 牛顿决心找出宇宙的一般法则, 他提出了著名的力学三定律和万有引力定律. 然后用他发明的微积分方法, 经过复杂的计算和演绎, 既导出了地球上物体的运动规律, 也导出了太空中物体的运动规律, 统一了宇宙中的各种运动, 而这些都是由数学推导完成的, 从而引起了巨大的轰动. 17 世纪的伟大学者们发现了一个量化了的世界, 这就是繁荣至今的科学数学化的开始.

牛顿的广泛的研究方向, 以及他和莱布尼茨 (G. W. Leibniz) 共同创造的微积分, 成为从那以后的100 多年间科学家研究的课题. 由于追求量化的结论, 当时的科学家都是数学家, 而伟大的数学家也毫无例外地都是科学家. 科学家寻求一个量化的世界的努力一直延续至今, 他们的主要目标不再是解释自然, 而是为了作出预测, 以便实现各种理想和愿望. 在这个过程中, 以几何为基础的数学, 重心转移到了代数、微积分及其各种数量关系的后续分支上.

代数成为一门学科可以认为开始于韦达 (F. Viète) 的研究. 在此之前, 代数是用文字表示的一些应用问题, 只不过是一些实用的方法和计算的"艺术", 没有自己的理论. 韦达的功绩是用一整套符号表示代数中的已知量、未知量和运算. 这使得代数问题可以抽象归结为符号算式, 这样就脱离了它的具体背景, 然后根据一整套规定的法则作恒等变形, 直至求出答案. 后来, 笛卡儿 (R. Descartes) 用坐标方法

把点表示为坐标，把曲线表示为方程，实现了几何对象的代数化．传统的几何问题都可以量化为代数方程来求解．

代数方法是机械的，思路明确简单，不像几何问题那样需要机智巧妙的处理．那个时期，笛卡儿实际上已经洞察到了代数将使数学机械化，使得数学创造变成一项几乎自动化的工作．等到牛顿，尤其是莱布尼茨把微积分也像代数一样形式化并解决了大量科学问题之后，符号化的定量数学终于取代了几何学，成为数学的基础．20世纪中叶计算机出现以后，数学机械化的思想得以广泛应用于解决各个领域的实际问题，而借助于计算机工具，数学也越来越深入社会生活的各个领域．

四、结语

古往今来对数学做了开创性工作的大数学家，其创造动机都不是追求物质，而是追求一种理想，或是为了揭开自然的奥秘，或是出于某种哲学信念．数学是一种理想，为理想而奋斗才有力量．数学是人类智慧的杰出结晶，是人脑最富创造性的产物．与文学、艺术、音乐等创造有共同之处的是，指引数学创造的是数学家的一种审美直觉．数学是介于自然科学与人文科学之间的一种特殊学科，是影响人类文化全局的一种文化现象．每一个时代的总的特征与这个时代的数学活动密切相关．著名的数学史家克莱因(M. Klein)曾以抒情的笔调写道：“音乐能激起或平静人的心灵，绘画能愉悦人的视觉，诗歌能激发人的感情，哲学能使思想得到满足，工程技术能改善人的物质生活，而数学则能做到所有这一切．”

第1章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法．因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

§1.1　函　　数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着．17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海等问题)的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的 200 多年里，这个概念几乎在所有的科学研究工作中占据了中心位置．

本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性．

一、实数与区间

公元前3 000年以前，人类的祖先最先认识的数是自然数1, 2, 3, ⋯．从那以后，伴随着人类文明的发展，数的范围不断扩展，这种扩展一方面与社会实践的需要有关，另一方面与数的运算需要有关．这里我们仅就数的运算需要做些解释，例如，在自然数的范围内，对于加法和乘法运算是封闭的，即两个自然数的和与积仍是自然数．然而，两个自然数的差就不一定是自然数了．为使自然数对于减法运算封闭，就引进了负数和零，这样，人类对数的认识就从自然数扩展到了整数．在整数范围内，加法运算、乘法运算与减法运算都是封闭的，但两个整数的商又不一定是整数了．探索使整数对于除法运算也封闭的数的集合，导致了整数集向有理数集的扩展．

任意一个有理数均可表示成 $\dfrac{p}{q}$ (其中 p, q 为整数，且 $q \neq 0$)，与整数相比较，有理数具有整数所不具有的良好性质，例如，任意两个有理数之间都包含着无穷多个有理数，此即所谓的有理数集的**稠密性**；又如，任一有理数均可在数轴上找到唯一的对应点(称其为**有理点**)，而在数轴上有理点是从左到右按大小次序排列的，此即所谓的有理数集的**有序性**．

虽然有理点在数轴上是稠密的，但它并没有充满整个数轴．例如，对于边长为1

的正方形，假设其对角线长为 x (见图 1-1-1)，则由勾股定理，有 $x^2=2$，解此方程，得 $x=\sqrt{2}$，虽然这个点确定地落在数轴上，但在数轴上却找不到一个有理点与它相对应，这说明在数轴上除了有理点外还有许多空隙，同时也说明了有理数尽管很稠密，但是并不具有连续性.

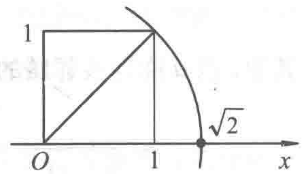

图 1-1-1

我们把这些空隙处的点称为**无理点**，把无理点对应的数称为**无理数**. 无理数是无限不循环的小数，如 $\sqrt{2}$，π，等等.

有理数与无理数的全体称为**实数**，这样就把有理数集扩展到了实数集. 实数集不仅对于四则运算是封闭的，而且对于开方运算也是封闭的. 可以证明，实数点能铺满整个数轴，而不会留下任何空隙，此即所谓的实数的**连续性**. 数学家完全弄清实数及其相关理论，已是19世纪的事情了.

由于任给一个实数，在数轴上就有唯一的点与它相对应；反之，数轴上任意的一个点也对应着唯一的实数，可见实数集等价于整个数轴上的点集，因此，在本书今后的讨论中，对实数与数轴上的点就不加区分. 今后如无特别说明，本课程中提到的数均为实数，用到的集合主要是实数集. 此外，为后面的叙述方便，我们重申中学学过的几个特殊实数集的记号：自然数集记为 $\mathbf{N}$，整数集记为 $\mathbf{Z}$，有理数集记为 $\mathbf{Q}$，实数集记为 $\mathbf{R}$，这些数集间的关系如下：

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

区间是微积分中常用的实数集，分为**有限区间**和**无限区间**两类.

有限区间

设 a, b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a, b]=\{x\,|\,a\le x\le b\},\ [a, b)=\{x\,|\,a\le x<b\},\ (a, b]=\{x\,|\,a<x\le b\}.$$

无限区间

引入记号 $+\infty$ (读作"正无穷大") 及 $-\infty$ (读作"负无穷大")，则可类似地表示无限区间. 例如

$$[a, +\infty)=\{x\,|\,a\le x\},\ (-\infty, b)=\{x\,|\,x<b\}.$$

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限区间 $(-\infty, +\infty)$.

注：在本教程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是有限还是无限时，常将其简称为"区间"，并常用 I 表示.

二、邻域

定义1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记为