普通高等教育"十二五"规划教材
新时期大学数学信息化精品教材丛书

丛书主编 龙爱芳 张军好

线性代数

（第三版）

张军好 余启港 欧阳露莎 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

·新时期大学数学信息化精品教材丛书·

丛书主编　龙爱芳　张军好

线性代数

（第三版）

张军好　余启港　欧阳露莎　主　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是按新时期大学数学教学大纲编写，内容丰富、理论严谨、思路清晰、例题典型、方法性强，注重分析解题思路与规律，对培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力将起到较大的作用. 全书共分 6 章，内容涵盖了行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、方阵的特征值与特征向量、二次型等. 书后附有一套线性代数综合测试题及各章习题的参考答案.

本书可以作为高等院校非数学专业的"线性代数"教材，也可供自学者、科技工作者、考研学生等阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张军好，余启港，欧阳露莎主编. —3 版. —北京：科学出版社，2016.11

(新时期大学数学信息化精品教材丛书/龙爱芳，张军好主编)

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-050470-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… ②余… ③欧… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 265131 号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：王　晶

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2016 年 11 月第　三　版　印张：13 1/4

2016 年 11 月第一次印刷　字数：262 000

定价：33.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《线性代数》(第三版)
编委会

第三版前言

本书为“新时期大学数学信息化精品教材”丛书之《线性代数》，它是在《线性代数》第一版与第二版的基础之上修订而成的.

第三版是在前两版的内容丰富、理论严谨、思路清晰、例题典型、方法性强、注重分析解题思路与规律的基础之上，结合新时期大学数学教育与考研的新要求，对部分内容、理论与方法做了更合理的安排与调整，使教材能更好地满足老师的教学之用、学生的学习之用，以及考研学生的复习之用.

经过三年的教学实践，同时也参考同行与学生们的宝贵建议，我们进一步对国内外优秀的同类教材进行了深入的比较研究，在保持前两版优点、特色的基础之上，第三版更加注重教材内容的连贯性与可读性. 我们主要做了以下修改：

(1) 重新编写第 2 章前 4 节内容. 2.1 节只给出了矩阵的基本概念，没有讨论矩阵的运算，把矩阵的加法、减法、数乘、乘法、乘方、转置、行列式、共轭这 8 种运算编排在 2.2 节中. 把伴随矩阵与逆矩阵作为 2.3 节另外讨论. 在 2.4 节只讨论了分块矩阵. 这样安排把矩阵的运算与运算性质结合讨论，从而避免了前两版的 2.2 节矩阵运算内容的堆积，使读者阅读起来更方便自然.

(2) 在每章内容最后添加了近几年的一些典型考研题，这样使得教材的题型与方法更有深度与广度，从而利于考研同学们的阅读与提高.

(3) 在教材最后以附录形式给出了一套综合训练题，以检验学生对整本书的学习效果. 同时对学生的线性代数的期末考试题型、难度与广度提供一个参考.

本书和前两版的内容章节编排相同，仍然共分 6 章，内容分别是 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、方阵的特征值与特征向量、二次型. 全书每节后有节后练习，每章后有综合练习. 这些练习题都是基于我们多年的教学经验并结合历年考研线性代数试题的特点科学设计的，读者通过这些练习的训练，对消化知识、夯实基础、提高能力大有帮助.

本版的修订工作主要由张军好、余启港、夏永波负责完成，同时胡军浩、佘纬、安智、李学锋、欧阳露莎、周基农、谌永荣、江美英、胡佳义、贾小英、张国东、王丽君、郭仲凯、赵雪荣、孔跃东、李浩光、何毅等老师也提出了宝贵的意见与建议.

本书的再版得到了科学出版社的领导和同志们的支持，同时也得到了中南民

族大学教务处、数学与统计学学院的支持与帮助，在此一并致谢！对于新版中存在的不足之处，欢迎广大的读者们给予批评指正，我们会为线性代数教材的建设、发展与完善不断前行！

编　者

二〇一六年十月于武昌南湖畔

第二版前言

本书为“新时期大学数学信息化精品教材”丛书之《线性代数》，它是在《线性代数》第一版基础之上修订而成.

第二版在继承了第一版的内容丰富、理论严谨、思路清晰、例题典型、方法性强、注重分析解题思路与规律的基础之上，结合了新时期大学数学教育的新要求对内容、理论与方法做了更合理的安排与整合，使之更好地满足老师的教学之用，更好地满足学生的学习之用.

经过几年的教学实践，同时也参考同行与学生们的宝贵建议，我们进一步对国内外优秀的同类教材进行了比较研究，在保持第一版优点、特色的基础之上，第二版更加注重教材内容的连贯性与可读性，我们主要做了以下修改：

(1) 减掉了一些复杂的高阶行列式的计算. 因为一些复杂的高阶行列式的计算对初学者而言难度较大，学起来很吃力，所以删掉这些内容，增加了教材的可读性.

(2) 将第一版中第 4 章 4.1 节消元法解线性方程组调到第 2 章作为 2.7 节，这样有利于第 3 章向量组的线性相关性的判定与线性表示的讲解，从而教材的连贯性变得更强，老师教起来更方便，学生学起来更顺畅.

(3) 在每章后面的总练习中增加了一些考研的题型，这样有利于学习有余力和想考研的同学们阅读与提高.

本书和第一版内容章节编排相同，共分 6 章，内容分别是 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、方阵的特征值与特征向量、二次型. 全书每节后有相应的基本练习题，方便教学中布置课后作业；每章后还有综合练习题，这些练习是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是给读者提供更深入的练习机会，让读者进一步消化知识、夯实基础、提高能力.

本版的修订工作主要由张军好、余启港、欧阳露莎完成. 全书由张军好负责统编定稿. 胡军浩、安智、佘纬、李学锋、谌永荣也做了大量的具体工作.

本书的再版得到了科学出版社的领导和编辑们的支持与帮助，同时也得到了中南民族大学数学与统计学学院的支持与帮助，在此一并致谢！新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正，我们为了教材的完善会继续前行！

编　者

二〇一三年十月于武昌南湖畔

第一版前言

成功就是把复杂的事情简单做,简单的事情重复做. 把所有的问题简单化,简单到最后只剩下直奔成功.

线性代数教材建设的成功就在于如何理清知识结构,使概念更清晰明了,结论更条理统一,方法更规范合理,从而让读者学以致用.

本书编写过程中,我们采取了两点特别的措施:一是将矩阵运算与性质分离,直接给出运算公式,而对运算的众多性质,重点只讲如何发现性质和证明性质的方法;二是各种解题方法的总结,将它们都标准程序化了. 这些既是我们教学改革实践的经验总结,也是新编教材的一种尝试.

本书共 6 章,内容分别是 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型. 全书每节后有相应的基本习题,方便教学中布置课后作业;每章后还有综合题,方便读者复习时练习.

本书可供高等院校文理科各专业使用,教学时数约需 48 学时. 对于学时更少的课堂,教师可删去某些结论的证明. 本书也适合各类读者自学.

本书由余启港、欧阳露莎、张军好主编,胡军浩、佘纬、李学锋任副主编.

读者对本书提出的宝贵意见和建议,以及指正书中的不足,即使是一个很微小的疏忽,也是对我们莫大的鼓励. 请读者通过电子邮箱 xxds123456@163.com 与我们联系.

编　者

二〇一〇年十月于武昌南湖畔

目　录

第 1 章 n 阶行列式

n 阶行列式理论是线性代数中最基本的内容之一，它产生于线性方程组求解公式——克拉默(Cramer)法则，又自成体系，形成了自己的核心内容：定义、性质、计算方法. 本章重点要讲解行列式定义和计算方法——化三角形法. 学习的困难之处在于行列式的定义的理解和展开性质的应用.

1.1 二阶行列式与三阶行列式

在中学，大家学习了线性方程组的加减消元法和代入消元法求方程组的解. 例如，解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=7; & ① \\ 5x+6y=11. & ② \end{cases}$$

就可以这样解：①×6−②×4，得

$$x=\frac{7\times 6-11\times 4}{3\times 6-5\times 4},$$

①×5−②×3，得

$$y=\frac{7\times 5-11\times 3}{4\times 5-6\times 3}=\frac{11\times 3-7\times 5}{3\times 6-5\times 4}.$$

现在的问题是，怎样记住解 x,y 的分子、分母呢？

首先，从 x,y 变形以后的分母看到 3,6,5,4 就是方程组中 x,y 的系数，因此，我们能想到规定记号

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \triangleq 3\times 6-5\times 4,$$

这样，我们就有了一种新的方法. 例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\times 5-4\times 3=10-12=-2,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=(-3)\times 7-5\times 2=-21-10=-31.$$

其次，观察 x,y 的分子，我们看到 x 的分子

$$7\times 6-11\times 4=\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 11 & 6 \end{vmatrix}$$

是用常数项“取代”了分母中的 x 的系数;y 的分子

$$11\times3-7\times5=\begin{vmatrix}3 & 7\\5 & 11\end{vmatrix}$$

是用常数项“取代”了分母中的 y 的系数. 显然,对于一般的二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1;\\a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$$

的解,规定公分母为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

当 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时,则有如下求解公式:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

同样,我们也可以运用消元法求出三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1;\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2;\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

的解,其公分母为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\triangleq a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.2}$$

故可得到如下求解公式:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\b_2 & a_{22} & a_{23}\\b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\a_{21} & b_2 & a_{23}\\a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\a_{21} & a_{22} & b_2\\a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}.$$

由以上线性方程组的求解已经看到了新的解法中,式(1.1)和式(1.2)中的记号的作用.我们分别把这种记号称为**二阶行列式**和**三阶行列式**.

大家可能很想继续再解出 4 元,5 元,…,n 元一次方程组的解的公分母而规定 4 阶,5 阶,…,n 阶行列式.那么,一方面,每次找公分母的工作量巨大;另一方面,由于消元法每一步只能消去一个未知量——1 元,对于一般的 n 元一次方程组,消元法难以完成.

另外,我们规定的 n 阶行列式还必须满足如下要求:n 个方程的 n 元一次方程组的解的公分母就是 n 阶系数行列式,而每个未知量的分子就是用常数项"取代"分母中它的系数而得到的 n 阶行列式.

练 习 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $D=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$;　　(2) $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$;　　(4) $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12; \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

1.2 排列及其对换

为了定义 n 阶行列式,我们先给出 n 级排列的概念.

定义 1.1 由数字 $1,2,3,\cdots,n$ 排成的有序数组 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列,简称为排列.特别地,n 级排列 $123\cdots n$ 称为 **n 级自然排列**或 **n 级标准排列**.

对于一个 n 级排列中的两个数字,以它们在标准排列中的位置次序为"标准"给出它们在这个排列中的"序关系"如下:

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ $(s<t)$ 中的两个数字 i_s,i_t,如果 $i_s>i_t$,则称它们构成一个**逆序**.排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 中全部逆序的总个数称为排列的**逆序数**,记作 $N(i_1i_2i_3\cdots i_n)$.

例 1.1 求排列 514362 的逆序数.

解 该排列中,5 后面有 1,4,3,2,这 4 个数比 5 小;1 后面有 0 个比 1 小;4 后面有 3,2,这 2 个数比 4 小;3 后面有 2,这 1 个数比 3 小;6 后面有 2,这 1 个数比 6

小,这是全部构成逆序的数字,共有 $4+0+2+1+1=8$ 对,因此 $N(514362)=8$.

一般地,求排列的逆序数的方法如下:

对排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$,数出每个数字 i_t 后面比 i_t 小的数字的个数 N_t,$t=1,2,\cdots,n-1$,则 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 的逆序数

$$N(i_1i_2i_3\cdots i_n)=\sum_{t=1}^{n-1}N_t.$$

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**;逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如,1234 的逆序数是偶数 0,是偶排列;4123 的逆序数是奇数 3,是奇排列.

定义 1.4 在排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果对调其中两个数字 i_s 与 i_t 的位置,其他数字的位置不变,得到一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,称这样的变换为**对换**,记作 (i_s,i_t). 对换过程记作

$$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n\xrightarrow{(i_s,i_t)}i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n.$$

如果对调的两个数字的位置是相邻的,称这样的对换为**相邻对换**.

例 1.2 将排列 52134 经对换变成标准排列 12345.

解 $52134\xrightarrow{(5,1)}12534\xrightarrow{(5,3)}12354\xrightarrow{(5,4)}12345.$

一般地,任何一个 n 级排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 都可经过一系列这种"归位"对换:第 1 位置数字与 1 对换,再对新排列中的第 2 位置数字与 2 对换……逐步将数字 k 移到第 k 位置而变成标准排列.

关于对换与排列奇偶性之间的关系,有如下性质:

性质 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 设旧排列 $\cdots i_sj_1\cdots j_pi_t\cdots$ 经过一次对换 (i_s,i_t) 变成新排列 $\cdots i_tj_1\cdots j_pi_s\cdots$ ($p=0$时表示相邻对换). 我们来考察两个排列中数字之间的序关系:仅 i_s 与 i_t 之间和 i_s,i_t 分别与 $j_1,\cdots,j_p$ 的每一个之间的序关系发生了改变,共 $2p+1$ 次. 设其中有 q_1 次是由逆序变成不是逆序,有 q_2 次是从不是逆序变成逆序,则

$$q_1+q_2=2p+1.$$

因此,新排列的逆序比旧排列的逆序增加了 q_2-q_1 个(当 $q_2<q_1$ 时是减少了 q_1-q_2 个). 而

$$q_2-q_1=q_2+q_1-2q_1=2(p-q_1)+1\quad[q_1-q_2=q_1+q_2-2q_2=2(p-q_2)+1]$$

为奇数,故新旧两个排列的逆序数的奇偶性相反,从而对换改变了排列的奇偶性.

练　习　1.2

1. 计算下列排列的逆序数,并判断排列的奇偶性:

(1) 32514;　　(2) 31524;

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

1.3　n 阶行列式的定义

利用排列的理论，我们可以给出 n 阶行列式的定义如下：

定义 1.5　由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**. 其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列位置上的数字，称为第 i 行第 j 列元素.

n 阶行列式表示所有取自不同行、不同列的 n 个数的乘积并按照如下方法带上正号或负号的代数和：每项乘积中的 n 个数按行号排成标准排列时，其列号排列的奇偶性决定该项的符号，奇排列时为负号，偶排列时为正号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.3}$$

其中，求和 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 取遍所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$；而 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为**行列式的一般项**. 特别地，当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

行列式有时也简记作 $|a_{ij}|$，其值是一个数.

当 $n=2,3$ 时，按照定义 1.5 计算的 2,3 阶行列式的值与前面规定的 2,3 阶行列式值式(1.1) 和式(1.2) 正好吻合一致. 其实，n 阶行列式的定义就是从分析 2,3 阶行列式的共同规律，由特殊到一般地推广得到的.

根据 n 阶行列式的定义计算行列式将要计算 $n!$ 项，$n=4$ 时，$4!=24$；$n=5$ 时，$5!=120$. 如此多项的计算很麻烦，但当这些项中很多都等于 0，仅有少量的项不等于 0，特别仅有 1,2 项不等于 0 时，我们只需要把这些不等于 0 的项计算出来就可以了.

行列式的一般项是取自不同行、不同列的 n 个数的乘积的代数和，故只有当这 n 个数都不等于 0 时，该项才不等于 0.

例 1.3　计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{vmatrix}$$

(在行列式中,某些位置数字 0 不写更能反映其分布时,就不写).

解 这个行列式按定义计算时第 4 行只能取 a_{44},从而第 3 行只能取 a_{33},进而第 2 行只能取 a_{22},最后就知道第 1 行只能取 a_{11},于是,这个行列式的不等于 0 的项只能是这 4 个数字的乘积,其前显然带正号,故原行列式 $= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**. 主对角线下(上)方数字全为 0 的行列式称为**上(下)三角形行列式**,统称为**三角形行列式**. 主对角线以外的数字全为 0 的行列式称为**对角形行列式**.

仿上例可证:三角形行列式和对角形行列式的值都等于主对角线上的数字的乘积.

行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项还可以写成

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

这是因为 n 个数 $a_{i_1j_1},a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_nj_n}$ 是取自不同行不同列的,从而 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 分别是行号排列和列号排列. 交换乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中因子数字之间的次序,相当于对两个排列同时作相同位置上数字的对换,即对 $i_1i_2\cdots i_n$ 作 (i_s,i_t) 对换时,就对 $j_1j_2\cdots j_n$ 作 (j_s,j_t) 对换.

这样,若经过 T 次对换,将 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成了标准排列 $12\cdots n$,则这 T 次对换相应地把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成了排列 $k_1k_2\cdots k_n$;根据性质 1.1,于是有

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^T=(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

又由于 $12\cdots n$ 为偶排列,则 T 的奇偶性与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的奇偶性相同,于是有

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}=(-1)^T,$$

进而

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

就是行列式的一般项.

于是,我们有如下行列式的等价定义:

定义 1.5′ 定义 1.5 中的 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 可定义为

$$|a_{ij}|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

这是一个将各项乘积中的 n 个数按列号排成标准排列,其行号排列的奇偶性确定该项的符号的定义.

于是,我们有了行列式的如下一种变形:把行列式的行与列互换,即把原来在第 i 行第 j 列位置的元素换到第 j 行第 i 列位置上去,所得到的行列式称为原来行列式的**转置行列式**,记 D 的转置行列式为 D^{T}. 例如 $D=\begin{vmatrix}2&7&6\\1&3&4\\5&-2&-1\end{vmatrix}$ 时,有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}2&1&5\\7&3&-2\\6&4&-1\end{vmatrix}.$$

根据行列式的两个等价定义就知道，如下性质成立：

性质 1.2 将行列式转置，行列式的值不变.

因此，在行列式中行与列的地位相同，凡是对行成立的性质，对列也同样成立. 以下我们以行为例研究行列式的性质.

练 习 1.3

1. 写出 4 阶行列式 $D=|a_{ij}|_{4\times4}$ 中含 $a_{13}a_{42}$ 的项.

2. 计算下列行列式的值：

(1) $D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$； (2) $D=\begin{vmatrix}2&0&1&1\\0&0&1&0\\2&0&3&-1\\1&-1&3&2\end{vmatrix}$；

(3) $D=\begin{vmatrix}-1&2&3&0\\2&1&0&0\\1&1&2&3\\0&4&0&0\end{vmatrix}$.

1.4 行列式的性质

为了计算行列式的值，我们有必要先研究一下将行列式变形成“好计算”的行列式. 如前所述，三角形行列式就“好计算”. 那么如何对行列式作变形？变形后行列式的值有什么变化呢？

我们是要用行列式来表示方程组的解的，而方程组求解是用消元法. 由于消元法前后方程组是“同解”的，但这时表示解的分子、分母行列式已经变形了，它们的比值却要“保持不变”——“同解”. 因此，可以想到：变形前后的分子之间、分母之间一定是有某些共同的规律.

消元法对方程组的变形，大致可以归结为如下三种：

(1) **换方程**，即对换方程组中两方程的位置；

(2) **倍方程**，即对某一方程两边同时乘以一个非零数；

(3) **倍方程加**，即对某一方程两边同时乘以一个数加到另一个方程上.

将这三种变形称为**方程组的初等变换**. 此时，分子、分母行列式也跟着发生如下三种变形：