

# 高中数学教学的若干思考

---

SOME THOUGHTS ON THE SENIOR HIGH  
SCHOOL MATHEMATICS TEACHING

童其林 著



哈爾濱工業大學出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 高中数学教学的若干思考

SOME THOUGHTS ON THE SENIOR HIGH  
SCHOOL MATHEMATICS TEACHING

童其林 著



哈爾濱工業大學出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书主要总结了作者多年的数学教学经验,从对学生进行“转变”的教育、培养学生学习数学的兴趣和学习方法的思考、培养学生思维品质的思考、关于教师专业素养及教育科研的思考等内容,阐述了自己的看法。

本书适用于数学教学工作者及数学爱好者参阅。

## 图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学的若干思考/童其林著. —哈尔滨:  
哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5612-9

I. ①高… II. ①童… III. ①中学数学课-教学研究-高中  
IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 237473 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 张永文

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 28.25 字数 520 千字

版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5612-9

定 价 68.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

## 代 序

读书、实践、写作、思考是数学教师快速成长的途径

和童其林老师初次相遇是在 2000 年省级骨干教师培训班上,那时我担任《高观点下的中学数学》课程,第二次相遇是在 2011 年“福建省数学学科教学带头人培养对象”的培训班上,那时我是这个班级的首席指导老师.

初次相遇,只感到童其林老师青涩、腼腆、憨厚,是名好学的学生.第二次相遇后,对童其林老师有了更多的了解,感到童其林老师成熟了许多,但好学、沉静的性格却没有改变.由相遇到相识,再由相识到相知,我们有了更多的交往.在我的印象中,童其林老师在“省级数学学科教学带头人培养对象”的学习期间,一直是我表扬的对象之一.童其林老师,好学,博学.数学与哲学、教育学与心理学、历史与地理,他都有所涉猎.他说:“多学学,眼界开阔,有利于教育教学.”我很欣赏这句话.

童其林老师,不仅热爱课堂教学,更爱沉思.他瘦小的身躯似乎有巨大的能量,不仅课堂教学深受学生喜爱,教学成绩优异,还喜欢在课余思考,将思考的火花化成文字,有教育教学心得,有随笔,也有诗歌,温暖着周围的人.童其林老师从事中学数学教学 30 余年,一直奋斗在教学一线,即使担任学校教务主任,也没脱离讲台.他既有高中教学的经验,也有初中教学的经验;既有学生管理经验,也有老师管理经验.他将自己的思考与经验结合,凝结而成的心血——《高中数学教学的若干思考》终于出版.

认真读了《高中数学教学的若干思考》,觉得童其林老师的思考是立体的,既有长度、宽度,也有一定的高度,文字细腻、朴素.比如,第 1 章关于严谨性、情境性、生成性、智慧性、模式化、习题教学的思考,其中的严谨性、情境性、生成性、智慧性、模式化就是广大教师比较关注的问题,也是难点问题,对此,童其林老师都有独特的



见解和体会,而这些体会如拉家常似的,从他的笔端缓缓道来,似炎热夏天的一缕微风,凉爽着我们。

从某种意义上说,数学是一门关于思维的科学,培养学生的思维品质是数学老师的重要任务之一,对此童老师都有较多的实践,较深的感悟。他不仅从概念教学中去培养,也从各个不同的题型中去挖掘和归纳,同时也注意从解题后、总复习等方面去落实、培养;不仅从聚合思维考虑,也从发散思维着手,特别是对批判性思维和创造性思维的培养做了较为深入的研究,所举的案例也较为典型。

作为福建省特级教师、福建省数学学科教学带头人,童老师不仅自己努力成长,也关心同伴成长,这从他的“关于教师专业素养及教育科研的思考”的论述,多次到他校演讲或做专题讲座可以看出端倪。这些专业成长的感悟和体会,对于已经从教的教师,或者即将从教的老师都是一个启发、一个参考。汲取其精华,无疑能帮助老师快速成长。

从书稿中,我们还可以看到童老师兴趣广泛,研究的问题丰富,他对备课、上课、作业设计、作业批改、辅导、考试、评价、命题等方面都有论述,不仅关注本专业,也关注与数学有关的其他学科——哲学、教育学、心理学等,并能用其他学科的精神和思想滋润数学教学。作为一位基层教师,能够思考得如此全面,关注的问题如此多,确实难能可贵。

引起我思考的是,一位中学数学教师要具有怎样的素质,才能更好地从事数学教育。除了教科书、教参、练习册外,还应该知道些什么、掌握些什么、追求些什么?首先,教师应该有正确的理念,具有软实力,比如树立“师德为先”“学生为本”“能力为重”“终身学习”“对教师事业充满激情”“心理健康”“按教育规律办事”等理念。其次,教师应该苦练本领,具有硬实力,比如有效学习的能力——学习就是积累,知识的、方法的、技能的……最终形成一种学习力、一种思想力,否则容易退化,变成人们常说的“教大学的大学水平,教中学的只有中学水平,教小学的只有小学水平”的境地。再次,教师应该有自我发展、自我提升的迫切愿望。

由于自身从事教师职业的缘故,我见过许多像童其林一样的一线教师,他们在平凡的岗位上,几十年如一日,把教书与育人结合在一起,把教学与教研结合在一

起,把传承与创新结合在一起,他们的教学研究、教学思考是实在的、朴素的、有成效的.我想借此文向所有这些基层教育工作者表示敬意与支持.让我再说一声:读书、实践、写作、思考是数学教师快速成长的途径.

A handwritten signature in black ink, appearing to read '陈嘉华' (Chen Jiahua). The signature is stylized and fluid.

2015 年 3 月 9 日

(福建师范大学数学与计算机科学学院教授、副院长;福建数学基础教育研究中心,副主任)

# 自序

## 让挫折变成好事

有老师抱怨,某特级教师非常张扬,看不起别的老师,后来他去参加发达地区的教师招聘考试,招聘老师随手拿了一份试卷,告诉他:“你把这套试题做一下,下午交回来。”

这位特级老师最后没被录用。后来,这位老师像变了个人似的,再也不张扬了。笔者也有类似的难忘的经历、疼痛和醒悟。

1994年夏天,高考成绩知晓后,得知自己所任教的学校的学生的数学成绩都很出色,优秀率、及格率、平均分都让同行刮目相看。同时,自己有一篇论述如何解题的教学论文上了国家级的刊物,心里就飘飘然起来了。这一年秋季,笔者刚好符合评一级教师的资格。符合条件的同事们都忙着整理或者重新撰写参评论文,而笔者就把这一篇上了国家级刊物的,只有一千多字的文章送去参加一级评审,自认为是国家级刊物发表的文章,必通过无疑。当时,一位姓陈的老教师偶然看了我的参评论文后,提醒笔者:“你的文章字数太少,深度又不够,建议你重新写过一篇。”笔者不但没有把他的话放在心上,反而反击他:“正式刊物上发表的文章,你有吗?”颇不以为然。

后面的结局,读者自然猜到了:论文没通过。这能怨谁呢?只能怪自己,怪自己的太大意,怪自己的自以为是,怪评审老师只看论文,不看教学成绩。经过了短暂的痛定思痛后,笔者下定决心:从哪里跌倒就从哪里站起来。后来,笔者积极参与各种业务培训,向专家学者请教,也订阅了多种刊物,有数学专业的,有文学类的,有教育学、心理学的等。在教学之余不断地学习专业知识,学习教育学、心理学知识,认真钻研教材、教法,研究学生,不断反思和总结自己的教学。通过学习别人的经验,

并结合自己的教学实践和体会,经过努力,也写出了应该说有一定水平的文章.第二年就顺利评上一级了.此后,所写论文陆续在有关的 CN 级刊物上发表,受到好评,再到符合评高级教师和特级教师的条件时,论文也都顺利通过了.

第一次评一级教师所受到的挫折虽然是坏事,但通过这件事使我对某些问题的看法更清醒了,在某种意义来说变成了好事.它使我明白了:文章好不好,不是你一个人说了算,要经过大众和专家的检验,表面的东西并不是最好的,金子不需要张扬.还有,就是做事不能马虎,只有脚踏实地的不断地学习,提高自己的认识水平,提高自己分析问题和解决问题的能力,才能更好地评价自己、评价他人,最终取得成功!

后来,笔者不但养成了读书学习的习惯,更养成了结合自己的教学实践,写教学反思和教学论文的习惯.思考的问题,从课内到课外,从学生到老师,从培养学生的智力到提高学生的情商等.在担任教务主任的 10 年期间里,即使教务工作再忙,也保持着有空就学习,写心得体会的习惯.20 多年来,在各类报纸杂志发表了 400 余篇文章,内容涉及中学数学教学的各个方面,有热点、难点问题的思考,有解题指导,有论述在数学教学中如何渗透人文素质教育,有论述教学中如何培养、提高学生的思维品质,有探讨老师和学生如何互动,提高教学质量的,有涉及老师专业成长的等,自认为内容还丰富,是自己近 30 年中学数学教学经验和心血的结晶,该有一定参考价值.由此萌生了出书的想法,与各位同行共享.2014 年,在合肥师范学院承办的全国初等数学研究会上,笔者把这一想法告诉刘培杰、张永芹编辑,得到了两位编辑的支持和肯定.

经过一年多的忙碌,笔者把发表在各类杂志上的有关数学教育、数学教学类的思考文章整理出来,组成本书的主体内容,并拟了几个小标题,便于读者阅读.在整理文章的过程中,加入了最新的研究和思考.

世界很大,总有许多大脑强于自己;世界也很小,总有一些思考能得到回声.但愿笔者浅陋的思考能得到您的一声肯定,或者是一声叹息.



# 目 录

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 第1章 关于严谨性、情境性、生成性、智慧性、模式化、习题教学的思考 .....       | 1   |
| 1.1 对高中数学教育严谨性缺失的思考 .....                     | 1   |
| 1.2 和谐完美的选择题的设计要求 .....                       | 9   |
| 1.3 对高中数学情境教学有效性的思考 .....                     | 17  |
| 1.4 高中数学生成性教学资源的内涵、挖掘与思考 .....                | 26  |
| 1.5 教师应帮助学生学会生成 .....                         | 37  |
| 1.6 数学智慧教育的内涵、要素和追求 .....                     | 43  |
| 1.7 对数学教育模式化的思考 .....                         | 52  |
| 1.8 与张奠宙、赵小平两位教授“关于‘去数学化’”的商榷 .....           | 58  |
| 1.9 解完数学题后还应思考些什么 .....                       | 61  |
| 1.10 活用等差数列的等价定义解高考题 .....                    | 68  |
| 1.11 教材习题在数学教学中的作用 .....                      | 75  |
| 1.12 对“有限与无限思想”的再认识和再思考 .....                 | 83  |
| 1.13 “隐性”轨迹问题 .....                           | 92  |
| 第2章 关于人文素质教育、小组合作学习、精彩课堂、提高教学质量、学法指导的思考 ..... | 101 |
| 2.1 对数学教学与人文素质教育的思考 .....                     | 101 |
| 2.2 诗歌语言在数学教学中的作用 .....                       | 110 |
| 2.3 小组合作学习中存在的问题及其对策 .....                    | 116 |

|      |                               |     |
|------|-------------------------------|-----|
| 2.4  | 不同视域下的课堂教学的高质量——以数学教学为例 ..... | 122 |
| 2.5  | 时代呼唤“精彩”的数学课 .....            | 128 |
| 2.6  | 开发“情商因素”,提高教育教学质量 .....       | 135 |
| 2.7  | 高中生数学思维障碍的产生原因及其突破 .....      | 139 |
| 2.8  | 数学课学生接收教师信息质量不高的原因与对策 .....   | 147 |
| 2.9  | 对个性化数学学法指导的认识、实践与思考 .....     | 152 |
| 2.10 | 细节在有效数学教学中的含义、价值及把握 .....     | 158 |
| 2.11 | 提高数学教学质量应重视学生优秀思维品质的培养 .....  | 168 |
| 第3章  | 关于培养思维品质的思考 .....             | 178 |
| 3.1  | 利用选择题的特点,培养学生的思维品质 .....      | 178 |
| 3.2  | 利用填空题的特点,培养学生的思维品质 .....      | 184 |
| 3.3  | 利用解答题的特点,培养学生的思维品质 .....      | 192 |
| 3.4  | 利用解题后的“再思考”,培养学生的思维品质 .....   | 198 |
| 3.5  | 数学总复习如何培养学生良好的思维品质 .....      | 202 |
| 3.6  | 培养发散思维的若干途径 .....             | 208 |
| 3.7  | 逆向思维的价值、类型及培养 .....           | 214 |
| 3.8  | 逆向思维受阻的原因、表现及对策 .....         | 222 |
| 3.9  | 由一道走红网络的试题引起的批判性思维的思考 .....   | 230 |
| 3.10 | 对创造性思维能力培养的思考 .....           | 237 |
| 第4章  | 关于教师专业素养及教育科研的思考 .....        | 246 |
| 4.1  | 数学教学口语应有的几个意识 .....           | 246 |
| 4.2  | 汝果欲学诗,功夫在诗外——感悟教案的撰写 .....    | 252 |
| 4.3  | 谈“说课”活动的利与弊 .....             | 254 |
| 4.4  | 对数学说题的认识、实践与思考 .....          | 257 |

|      |                                       |     |
|------|---------------------------------------|-----|
| 4.5  | 教师专业素养的认识、提高和思考 .....                 | 265 |
| 4.6  | 和数学骨干教师的谈话:怎样的教师是优秀的,如何让自己更优秀 ...     | 277 |
| 4.7  | 学习和写作应该成为教师工作和生活的常态——我是怎么学习和创作的 ..... | 287 |
| 4.8  | 为什么写? 写什么? 如何写 .....                  | 293 |
| 4.9  | 让生命去等候不如让生命去表达——谈谈为什么写作 .....         | 299 |
| 4.10 | 中学数学:为什么研究? 研究什么? 如何研究 .....          | 302 |
| 4.11 | 谈谈对数学教师解题的看法和思考 .....                 | 315 |
| 4.12 | 怎样的一份试题才算好试题 .....                    | 321 |
| 4.13 | 网络环境下数学教学资源的获取、整合与活用 .....            | 344 |
| 4.14 | 研究性学习并不神秘,我们也可以指导 .....               | 350 |
| 4.15 | 追求精彩的数学课堂,提高教育核心能力 .....              | 356 |
| 4.16 | 我心目中的理想教师形象 .....                     | 366 |
| 第5章  | 关于评价作业、学生交往、数学文化的思考 .....             | 386 |
| 5.1  | 公开课,想说爱你好困惑 .....                     | 386 |
| 5.2  | 数学新课标下学生发展性评价探究 .....                 | 391 |
| 5.3  | 对数学课外作业有效性的思考 .....                   | 396 |
| 5.4  | “校本数学作业”的内涵、评价和思考 .....               | 405 |
| 5.5  | 学生不喜欢什么样的教师 .....                     | 412 |
| 5.6  | 当下学生喜欢什么样的教师 .....                    | 417 |
| 5.7  | 师生间的数学情谊是我人生中的宝贵财富 .....              | 420 |
| 5.8  | 爱情中的数学 .....                          | 426 |
| 5.9  | 名人对数学老师的爱与恨给我们的启示 .....               | 429 |
| 5.10 | 数学是一种基本的文化素养 .....                    | 434 |

# 第1章 关于严谨性、情境性、生成性、智慧性、模式化、习题教学的思考

## 1.1 对高中数学教育严谨性缺失的思考

数学具有抽象性、严谨性和应用的广泛性这三个基本特点,作为数学的基本特点之一的严谨性指的是,在数学中,每一个定理、公式都要严格地从逻辑上加以证明以后才能够确立,获得承认;数学的推理步骤严格地遵守形式逻辑诸法则,以保证从前提到结论的推导过程中,每一个步骤都是在逻辑上准确无误的. 克莱因(F. Klein)说:“数学鲜明地区别于人类的其他所有知识体系之处在于,它坚持从作为必要条件的、以阐明的公理出发进行演绎证明,得出可以被接受的结论.”正是数学的严谨性使数学在整个科学文化领域声名显赫. 然而,新课标引领下的数学课堂,虽然学生思维活跃,气氛活跃,但是,数学严谨的特性却逐渐被忽视,数学教育中经常出现不严谨的现象. 本节就此谈些思考与对策.

### 一、数学教育严谨性缺失的若干表现

#### 现象之一:教材的编写有误

现在,数学教材的版本比较多,无论何种版本,数学概念、数学知识、数学方法,包括参考书的解答都应该是准确无误的,但有些教材并不令人满意. 比如,湖南教育出版社2008年6月出版的《普通高中课程标准试验教科书数学(选修2-2)》(理科)第51页第5题:企业管理者通过对某收音机制造厂做上午班工人工作效率的研究表明:一个中等技术水平的工人,从8:00开始工作, $t$  h后可装配晶体管收音机的个数为 $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ ,则这个工人从8:00到12:00何时工作效率最高?

配套的教师教学用书的参考答案是这样解答的: $Q'(x) = -3t^2 + 18t + 12$ ,当 $t \in (0, 3 + \sqrt{13})$ 时,函数 $Q(t)$ 单调递增,故当 $t=4$ 时,即12:00时工作效率最高.

有位老师就是依据教师教学用书的参考答案给学生讲解的. 笔者以为,教师教学用书的参考答案是错误的,当然这位教师的讲解也是错误的. 因为,工作效率最



高,应该是  $t$  为何值时导函数有最大值,也就是斜率最大,并不是求原函数的最大值,正确答案是当  $t=3$ ,即 11:00 时工作效率最高.

类似错误在湘教版的教材中还可以找到一些,这里不一一列举. 在教师的心目中,教材是神圣的、权威的,现在解答错误,显得有些粗糙,显然降低了教材在教师心目中的地位. 对于错误的解答,或者错误的表述,思考过的教师可以发现,如果思考不够的教师可能就会依据错误错下去,危害是不言而喻的. 所以,编写教材者要慎之又慎,精益求精.

### 现象之二:教师的讲授有错

教师是知识的传授者,在学生心中,老师总是对的,但是现在的一些教师由于不爱学习,或者本身素质就不高,往往在数学课堂上使用一些缺乏严谨性的语言. 比如,有的教师说“有理数与无理数的交集是空集”(正确的表述应该是:有理数集合与无理数集合的交集是空集),也有教师说“正切函数  $y = \tan x$  是增函数”(正确的表述应该是:正切函数  $y = \tan x$  在区间  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  上是增函数,还有教师把三个平面两两垂直,写成  $\alpha \perp \beta \perp \gamma$  (正确写法应该是:  $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ ), 另有教师把点  $M$  是平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  的公共点,写成  $\alpha \cap \beta = M$  (正确写法是  $M \in \alpha$  且  $M \in \beta$ ),等都是错误的表述.

再比如,“定义域关于原点对称是一个函数为奇偶函数的必要非充分条件”——这是许多老师的表述,也是许多教辅书上的表述. 一位老师质疑:“定义域是数,对称指的是图形. 数怎么会对称呢?”“所以应该这样表述才准确,即定义域在数轴上表示的点关于原点对称是一个函数为奇偶函数的必要非充分条件.”笔者觉得,说得在理.

事实上,“正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提”,而准确表述数学概念,既是正确理解数学概念的体现,也有助于准确地把握数学概念. 我们教师在教学时,应不犯或少犯诸如“减少内涵”“偷换条件”“以偏概全”“混淆概念”“不规范使用符号”等错误.

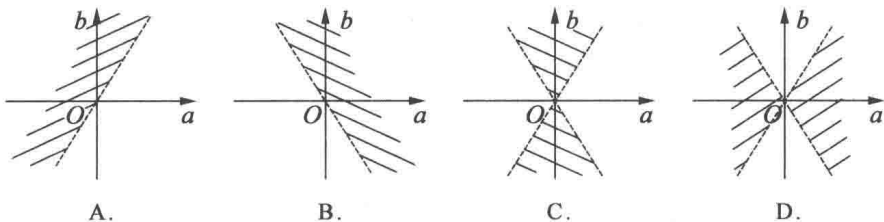
另外,在推理过程中,也可以看到一些教师的不严谨. 比如,一位教师给出问题:  $f(x) = \sqrt{x^2}$  与  $g(x) = x$  是不是同一函数? 学生回答:因为  $f(x)$  是偶函数,  $g(x)$  是奇函数,所以它们不是同一函数,这位教师给予肯定. 事实上,虽然学生的结论是正确的,但其理由并不充分. 为什么一个奇函数,一个偶函数,两者就不能是同一函数呢? 有没有“既奇又偶”的函数? 事实上,“既奇又偶”的函数是存在的. 比如,函数  $f(x) = 0 (x \in \mathbf{R})$  或者函数  $f(x) = 0 (x \in [-1, 1])$  就是“既奇又偶”的函数. 判断

函数是不是同一函数,应该从函数的三要素来考虑.显然,这位教师的推理存在“不严谨”的问题.

### 现象之三:编题者出的题目有差

编题是一种能力,不是谁都会编题的,特别是编一些经得起推敲的题目难之又难.正因为不容易,我们才对编题者肃然起敬.但由于编题者的考虑不周,也会造成一些失误.比如,2003年江苏卷第1题就是一道错题:

**题目** 如果函数  $y = ax^2 + bx + a$  的图像与  $x$  轴有两个交点,则点  $(a, b)$  在  $aOb$  平面上的区域(不包含边界)为 ( )



函数  $y = ax^2 + bx + a$  的图像与  $x$  轴有两个交点,就是方程  $ax^2 + bx + a = 0$  有两个不同的实根.其充分必要条件是  $a \neq 0$ , 且  $b^2 > 4a^2$ , 即

$$\begin{cases} b+2a > 0 \\ b-2a > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} b+2a < 0 \\ b-2a < 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

在选项 A, B, C 和 D 中,凡虚线均表示不属于区域的边界,凡相邻而不同斜率的阴影线均表示相邻而不连通的区域,这是符合惯例的.教科书指出:“一般的,二元一次不等式  $Ax + By + C > 0$  在平面直角坐标系中表示直线  $Ax + By + C = 0$  某一侧的平面区域.我们把直线画成虚线以表示区域不包括边界直线.当我们在坐标系中画不等式  $Ax + By + C \geq 0$  所表示的平面区域时,此区域应包括边界直线,则把边界直线画成实线.”然而,在标准答案图 C 中的  $b$  轴既未用虚线表示,并且  $b$  轴两侧与  $b$  轴相邻的角形区域又未用不同斜率的阴影线相区分,所以  $b$  轴两侧属于同一个连通区域,  $b$  轴明确的不是区域的边界.这样就使题干中“不包含边界”这个附注不含有“不包含  $b$  轴”的意思.于是选项 C 表示了  $|b| > 2|a|$ , 而不表示完整解  $|b| > 2|a|$  且  $a \neq 0$ . 所以标准答案 C 是错误的.此外,选项 A, B 和 D 也是明显的错的选项.四个选项中没有一个正确,这与题干中所说“在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的”相矛盾,从而该题是错题.如果自相矛盾的题也可不算错题,反证法和逻辑基本规律中的“无矛盾律”岂不是就算被推翻了吗?

此题在当年争论非常大,甚至有一部分全国知名院士参与说“题出错”,搞得沸



沸扬扬,甚至惊动国家领导人批示“妥善处理”.现在看来,题确实是个错题,勇于承认错误才是对科学的尊重.带来的副产品是,通过该题产生了“教师成长的关键是什么?”的全国性大讨论.

也有教师在课堂上随意编题,自认为不会出问题,岂知这种“即兴”题由于预先没有运算推理,很容易出现这样或那样的问题,比如自相矛盾、不符合定义、无解等.举个例子:

如果最简根式 $\sqrt[3a-2]{-2a+b}$ 和 $\sqrt[a-2b-5]{4a-5}$ 是同类根式,求 $a, b$ 的值.

**解** 由题意得

$$\begin{cases} -2a+b=4a-5 \\ 3a-2=a-2b-5 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-2$$

以 $a, b$ 之值代入原题,两个同类根式都是 $\sqrt[-\frac{1}{2}]{-3}$ ,但这与根式的根指数必须是大于1的整数相抵触,题目编得“出了轨”.

事实上,一个好的题目,在语法上必须协调、严谨,文字上力求精练、明白,表达必须流畅,特别是编题时要遵循逻辑思维的基本规律,也就是说必须遵循同一律、矛盾律、排中律和充足理由律,才能确保思维的明确性和方向性,才能做到判断恰当,推理合乎逻辑,命题不出错.爱因斯坦(Einstein)一语中的:“为什么数学比其他一切科学受到特殊尊重,一个理由是它的命题是绝对可靠的和无可争辩的,而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的,并且经常处于会被新发现的事实推翻的危险之中.”

#### 现象之四:命题人给出的答案不严谨

我们来看看2004年全国I(河北、河南、山东、山西、安徽、江西卷理19题):已知 $a \in \mathbf{R}$ ,求函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ 的单调区间.

标准答案的解答是:函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = 2xe^{ax} + ax^2 e^{ax} = (2x + ax^2)e^{ax}$ .

(I) 当 $a=0$ 时,若 $x<0$ ,则 $f'(x)<0$ ;若 $x>0$ ,则 $f'(x)>0$ .

所以当 $a=0$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数,在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数.

(II) 当 $a>0$ 时,由 $2x + ax^2 > 0$ ,解得 $x < -\frac{2}{a}$ 或 $x > 0$ ;

由 $2x + ax^2 < 0$ ,解得 $-\frac{2}{a} < x < 0$ .

所以,当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{2}{a})$ 内为增函数,在区间 $(-\frac{2}{a}, 0)$

内为减函数,在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数;

(Ⅲ)当 $a < 0$ 时,由 $2x + ax^2 > 0$ ,解得 $0 < x < -\frac{2}{a}$ ;

由 $2x + ax^2 < 0$ ,解得 $x < 0$ 或 $x > -\frac{2}{a}$ .

所以当 $a < 0$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数,在区间 $(0, -\frac{2}{a})$ 内为增函数,在区间 $(-\frac{2}{a}, +\infty)$ 内为减函数.

这道题的解答是不严格的,原因有两个:一是“求函数的单调区间”与“在哪个区间上单调递增或单调递减”是两个不同的概念,求函数的单调区间必须含有定义域内的所有值,而某个区间上的单调性则仅仅特指这个区间.如同说:“在某某学校就读的学生是谁?”不能回答“我在某某学校就读”,所以该题的正确解答应将每一种情况的最后结果改为:由于原函数在整个定义域内连续,且没有常数函数段,所以当 $a = 0$ 时,函数 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0]$ ,增区间为 $[0, +\infty)$ ;当 $a > 0$ 时,函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{a}]$ 及 $[0, +\infty)$ ,减区间为 $[-\frac{2}{a}, 0]$ ;当 $a < 0$ 时,函数 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0]$ 及 $[-\frac{2}{a}, +\infty)$ ,增区间为 $[0, -\frac{2}{a}]$ ;二是求函数的单调区间,是写成开区间还是闭区间,或者两者均可?这一问题在中学有着比较大的争议,笔者认为“能包含的都应包含进去,好比问到会的同志是谁,问的是到会的所有人,而不是丢掉几个的剩余”,所以能是闭的用闭表示,除非的确不包含这个点.这一争议一直争到2004年的北京国际数学家大会上,结论正如笔者所言,遗憾的是许多教师还不知道这一点,仍然按照多年的教学惯性来进行.

我们再看一例:(2013年全国新课标Ⅱ卷,理科21)已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$ .

(I)设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,求 $m$ ,并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)当 $m \leq 2$ 时,证明: $f(x) > 0$ .

本题(I)中求 $m$ 的参考答案是: $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+m}$ ,由 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点得 $f'(0) = 0$ ,故 $m = 1$ .

笔者以为,这样的解法不够严谨,还需检验 $m = 1$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点.因为“ $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点”是“ $f'(x_0) = 0$ ”的充分不必要条件.许多教师和学生常常忽视检验.



最简单的一个反例是  $f(x) = x^3$ , 由  $f'(x) = 3x^2 = 0$  得  $x = 0$ , 但  $x = 0$  并不是  $f(x) = x^3$  的极值点.

还可以举出一个复杂点的反例, 已知  $x = 1$  是函数  $f(x) = (a^2 - 1)x - \frac{a+1}{2}x^2$  的极值点, 求  $a$ .

**解析** 因为  $f'(x) = (a^2 - 1) - (a + 1)x$ , 且  $x = 1$  是  $f(x)$  的极值点, 所以  $f'(1) = 0$ , 解得  $a = -1$  或  $a = 2$ .

经检验,  $a = 2$  满足题意,  $a = -1$  不满足题意, 故  $a = 2$ .

当然, 数学教育中严谨性的缺失还表现在有些教师对学生的错误视而不见, 听而不闻, 不及时纠正学生在表述上、推理方面的错误等.

## 二、数学教育严谨性缺失的危害

数学教育的不严谨不但对学生的学习不利, 而且对学生的终身发展也是不利的. 因为, 学生学习数学并不只是学习数学的知识技能, 更重要的是方法和精神. 日本数学家米山国藏先生颇有见地的指出: “学生们在初中或高中所学的数学知识, 在进入社会后, 几乎没有什么机会直接应用, 因而这种作为知识的数学, 通常在出校门后不到一两年就忘掉了. 然而, 不管他们从事什么业务工作, 唯有深深地铭刻于头脑中的数学精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等, 都随时随地发生作用, 使他(她)受益终身.” 这无疑是对数学文化素养的给人终身影响所作的一个精彩注解. 同样的, 如果数学严谨性缺失, 也会在个人生活和工作中表现出来, 比如工作和生活丢三落四、分析问题抓不住本质等, 就是缺乏逻辑的表现, 也是数学没有学好的表现.

## 三、数学教育严谨性缺失的原因

那么, 是什么使得数学新课堂失去了本该有的严谨性呢? 首先, 这是教师缺乏对《课程标准》的自主理解, 盲目跟随教育新思潮造成的. 《课程标准》是一个完整的体系, 但如果把其中的几点特别强化, 《课程标准》也就走味了. 比如, 《课程标准》强调“要推理, 更要讲道理”, 不是要弱化推理; 《课程标准》还指出: “数学‘双基’, 也有为数学家准备的双基和为一般人准备的双基之分. 不能过分地要求一般人不需要的‘熟练’和‘严谨’. 这样, 只会吓退许多不喜欢数学的人, 使数学教学孤立起来.” 其实, 在这一段话的前面, 就有“代数运算的熟练”和“逻辑推理的严谨”, 其仍然是我国“双基”数学教育的两个基本点的表述. 可见, 严谨性的培养还是数学的重要任务, 不是不要严谨. 其次, 和教师自身的数学素养有关. 在开放式课堂中,