张德庆◎主编

初中数学开放性问题集锦

习效研开

教数学

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

主　　编　张德庆
策　　划　童嘉森　崔光佐
副 主 编　刘惠兰　罗　军　朱海涛
执行主编　张秀国　周轶男　佘晶岩

Xixiao Yankai Jiaoshuxue
Chuzhong Shuxue Kaifangxing Wenti Jijin

初中数学开放性问题集锦

习效研开
教数学

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
长春

图书在版编目（CIP）数据

“习效研开”教数学：初中数学开放性问题集锦 / 张德庆主编．—长春：东北师范大学出版社，2016.12

ISBN 978-7-5681-2645-8

Ⅰ．①习… Ⅱ．①张… Ⅲ．①中学数学课—教学研究—初中 Ⅳ．①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 321907 号

□策划编辑：王春彦　　□封面设计：中联学林
□责任编辑：张　烙　　□内文设计：中联学林
□责任校对：王春彦　　□责任印制：张 允 豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市净月开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
销售热线：0431—84568122
传真：0431—84568122
网址：http：//www. nenup. com
电子函件：sdcbs@ mail. jl. cn
北京天正元印务有限公司印装
2017 年 4 月第 1 版　2017 年 4 月第 1 次印刷
幅面尺寸：170mm × 240mm　印张：16　字数：256 千

定价：42.00 元

序 言

随着数学课程改革的不断深入，教师已经不满足于只是教会学生一些数学知识或技能，通过延长学习时间和大量的练习提高学生的数学成绩。我们认为教育的本质是提高学生的学习能力和解决问题的能力。特别是数学教学，怎样才能让聪明的学生更聪明，不聪明的学生变聪明，怎样才能使我们的数学教学更深刻，更灵活，更有效，是摆在当前广大数学教师面前的重要课题。

为此，我校数学教研组从2013年开始，进行了《提高初中数学作业有效性的研究》的课题研究。两年来，老师们通过大量的教学实践，深深感觉到提高学生的数学学习能力不仅要在教学方法上和教学内容上进行改革，而且还要认真地研究给学生布置什么样的作业和怎样批改学生的作业才能充分地调动学生的学习热情，提高学生学习数学的能力；使完成数学作业不再成为学生的负担，批改数学作业也不再成为教师的低效劳动。数学组的老师们团结一致、更新观念、大胆实践、改变习惯、努力创新。打破原有的教学模式和作业布置模式，根据初中学生的实际大胆进行初中数学作业的设计研究。力求做创新型教师，培养个性化学生。真正做到让学生长分、长能力、长见识。通过设计更新、更活、更富有创造性的作业激发学生学习数学兴趣，提高学生的学习能力，力求为学优生插上自信的翅膀，为学困生奠定坚实的基础。

在北京市第八十中学童嘉森老师和北京师范大学崔光佐教授的

指导下，老师们经过学习、研讨、和大量的教学实践编写了这本《“习效研开”教数学——初中数学开放性问题集锦》。书中按照现行人教版教材的章节同步编写了大量的开放型题目（条件开放，结论开放，策略开放，综合开放）、探究性问题、以及部分可供学生进行研究的动手实践问题。本书的所有题目都具有背景新颖、解法灵活、思维空间广、探究性强的特点，可供初中各年级数学教师作为数学课堂教学和课下作业布置的辅助参考。对于培养学生数学思维的灵活性，严谨性和抽象性都是大有裨益的。

本书编写的目的是要通过数学作业布置内容和形式的改革，提高学生学数学和做数学的兴趣，改变学生从网上、教参和其他渠道去应付教师作业的现象，解决数学教师辛辛苦苦的批改作业却不能准确了解学生学习状态的问题，使数学教师可以根据不同的层次的学生布置不同的作业，改变了传统的数学作业——思维封闭，方法单一，结论唯一的模式。从而提高广大数学教师的教学效益。我校数学组的教师抛砖引玉，希望通过本书引起广大初中数学教师和数学教育工作者对初中数学作业内容和形式的设计重视和研究。将数学课堂打造为“人人参与，人人提升”的数学课堂。

本书在编写过程中，得到了陈经纶中学嘉铭西校区学校领导的大力支持，北京市第八十中学李军老师也参与了本书的编写。我校数学组的全体教师在完成本职工作的基础上，付出了极大的努力。

数学开放性问题的分类

开放性问题的最大特征就是条件和结论具有较大的开放性，即在题目中，让试题的条件、结论或者过程的一个方面或全部不给出唯一性，有待于探究，给学生提供了自主探究和创新学习的空间有利于培养学生的创新意识．

开放性问题有探究条件、结论、存在、规律、命题变换等类型，其中最常见的是条件探究、结论探究、策略探究即解题方法的探究等．数学开放性题是指那些条件不完整、结论不确定、解法不限制的数学问题．本书从构成数学题系统的四要素（条件、依据、方法、结论）出发，定性地可将开放性问题分成四类：

1．条件开放型问题

条件不完备或条件被隐藏需要补充条件的题目，寻求的答案是数学题的条件，属于条件开放型问题．

执果索因→逆向思维→寻求答案

2．结论开放型问题

在相同的条件下可能会出现多种不同的结果，题目寻求的答案是结论，属于结论开放型问题．

由因导果→发散思维→推证答案

3. 策略开放型问题

问题的形成过程呈现多样性或者解题的策略打破了常规的思路，寻求的答案是依据或方法，这样的问题属于策略开放型问题．

观察、分析、猜想、验证，进而解决问题．

4. 综合开放型问题

问题的条件不完备，结论也具有开放性的题目，条件、解题策略或结论都要求解题者在给定的情境中自行设定与寻找，这属于综合开放型问题．

综合运用“逆向”“发散”思维，寻求答案

目 录

CONTENTS

01

| 七年级上册 |

第 1 章

有理数

题 1 现有四个有理数 3,4, −6,10. 将这四个数(每个数用且只用一次)进行加、减、乘、除四则运算,使其结果等于 24,其三种本质不同的运算式如下:

(1) ________ (2) ________ (3) ________

另有四个数 3, −5,7, −13,可通过运算式(4) ________ 使其结果等于 24.

类型:结论开放型

建议:1. 此题是生活中常见的游戏,容易引发学生的兴趣. 加入负数后,又正好加强了学生对运算符号的训练.

2. 在讲完有理数加、减、乘、除运算后应用此题,建议可采取竞赛形式,调动学生积极性.

参考答案:答案不唯一.

例如:(1)$3\times(-6+4+10)$ (2)$4-[10\times(-6)\div3]$

(3)$3\times(10-4)-(-6)$ (4)$[-13\times(-5)+7]\div3$

题 2 在 1,2,⋯,2002 前面任意添上正号和负号,求其非负代数和的最小值.

类型:策略开放型

建议:1. 此题不可能一一尝试再做解答,应从奇数、偶数的性质入手,思维力度大是本题的特点;

2. 此题可用于本章复习提高使用.

参考答案：

因 $a+b$ 与 $a-b$ 的奇偶性相同，故所求代数和的奇偶性与

$$1+2+3+\cdots+2001+2002=\frac{2002\times(1+2002)}{2}=1001\times2003$$

的奇偶性相同，即为奇数．因此所求非负代数和不会小于 1.

又因

$(-1+2)+(3-4-5+6)+(7-8-9+10)+(11-12-13+14)+\cdots$
$+(1999-2000-2001+2002)=1$,

所以所求非负代数和的最小值为 1.

题 3　若 $a=-\frac{2004}{2003}$，$b=-\frac{2003}{2002}$，$c=-\frac{2002}{2001}$，则(　　)

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

类型：策略开放型

建议：1. 本题方法巧妙，思维力度强．

2. 可作为本章讲完后复习提高使用．

参考答案：

由于 $a+1=-\frac{1}{2003}$，$b+1=-\frac{1}{2002}$，$c+1=-\frac{1}{2001}$，

又 $\frac{1}{2003}<\frac{1}{2002}<\frac{1}{2001}$，

所以 $-\frac{1}{2003}>-\frac{1}{2002}>-\frac{1}{2001}$，

即 $a+1>b+1>c+1$，

因此有 $a>b>c$．故选 B.

题 4　如果 $a^{2003}+b^{2003}=0$，那么(　　)．

A. $(a+b)^{2003}=0$　　B. $(a-b)^{2003}=0$

C. $(a\times b)^{2003}=0$　　D. $(|a|+|b|)^{2003}=0$

类型:策略开放型

建议:1. 本题综合应用了有理数一章中负数的奇次方,互为相反数的两个数和为0,零指数幂等概念,考查对基本概念的理解应用.

2. 可作为本章讲完后的提高使用.

参考答案:

由 $a^{2003}+b^{2003}=0$ 得 $a^{2003}=-b^{2003}=(-b)^{2003}$,

又因为2003是奇数,

所以 $a=-b$,即 $a+b=0$,

于是有 $(a+b)^{2003}=0$. 故选A.

题5 有如下三个结论:

甲:a、b、c 中至少有两个互为相反数,则 $a+b+c=0$.

乙:a、b、c 中至少有两个互为相反数,则 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c-a)^2=0$.

丙:a、b、c 中至少有两个互为相反数,则 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

其中正确结论的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

类型:结论开放型

建议:讲完相反数概念后提高使用.

参考答案:

比如令 $a=5$,$b=-5$,$c=3$.

5,−5,3中满足"至少有两个互为相反数",但 $5+(-5)+3=3\neq0$,可知甲不真;

$[5+(-5)]^2+(-5+3)^2+(3-5)^2=8\neq0$,可知乙不真;

a、b、c 中至少有两个互为相反数,比如 a、b 互为相反数,即 $a+b=0$,则有 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$,可知丙真.

故选B.

题 6 方程$|x-2|+|x+3|=7$的解的个数是( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

类型:策略开放型

建议:1. 本题的亮点在于运用数形结合的思想解决问题.

2. 讲完绝对值概念后提高使用.

参考答案:由绝对值的几何意义知,到点$A(2)$和点$B(-3)$的距离之和等于7的点有两个,即点$C(-4)$和点$D(3)$,所以原方程的解为$x=-4$或$x=3$,故选B.

题 7 定义新运算:对于任何有理数a、b,都有$a\oplus b=(a+b)\div 2+1$,等号的右边是通常的乘法、除法和加法.

(1)求$(-2)\oplus 3$的值.

(2)在数轴上表示出$5\oplus 1\oplus 1\oplus 1$.

(3)当$\oplus$运算次数不断增加时,$4\oplus 0\oplus 0\oplus\cdots\oplus 0$的最小值是什么?说明理由.

类型:综合开放型

建议:1. 在有理数的认识知识点的学习中使用,作为认识有理数后的综合能力提升.

2. 该题目用来培养学生适应新运算的能力,巩固有理数运算和数轴知识,同时培养学生归纳、猜想和抽象能力,同时为学习极限打下基础.

参考答案:

(1)$(-2)\oplus 3=(-2+3)\div 2+1=1\frac{1}{2}$.

(2)$5\oplus 1\oplus 1\oplus 1=[(5+1)\div 2+1]\oplus 1\oplus 1=4\oplus 1\oplus 1=[(4+1)\div 2+1]\oplus 1=3.5\oplus 1=(3.5+1)\div 2+1=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$.

数轴上表示如下

(3)$4\oplus0=3$,$3\oplus0=2\frac{1}{2}$,$2\frac{1}{2}\oplus0=2\frac{1}{4}$,$2\frac{1}{4}\oplus0=2\frac{1}{8}$,$2\frac{1}{8}\oplus0=2\frac{1}{16}$,….

当运算的次数增加时,结果中的分数部分趋向于零,结果最小为2.