HIT

数论经典著作系列

Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory (Second Edition)

数论中的模函数与狄利克雷级数（第二版）

[美] T. M. 阿普斯托 著　冯贝叶 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

数论中的模函数与狄利克雷级数

Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory (Second Edition)

（第二版）

[美] T. M. 阿普斯托 著

冯贝叶 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2017－045 号

内 容 简 介

本书主要介绍模函数和狄利克雷级数的相关理论，并且进一步叙述了其理论对于数论的应用.内容包括关于分拆函数的拉德马切尔级数的收敛性，关于模函数系数的收敛性，以及具有积性的整形式理论，最后讲述了广义狄利克雷级数等价性的博尔理论.

本书适合高等院校师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

数论中的模函数与狄利克雷级数：第二版/(美)T. M. 阿普斯托著；冯贝叶译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.9

书名原文：Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory

ISBN 978－7－5603－6639－5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①T…②冯… Ⅲ.①模函数②狄利克雷级数 Ⅳ.①O174.1②O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 111859 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　陈雅君
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 15.25　字数 274 千字
版　　次　2017 年 9 月第 1 版　2017 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6639－5
定　　价　78.00 元

◎译者说明

本书的著者是一位在数论领域中已取得了许多深刻结果的专家，同时他又写了不少教科书性质的和高级科普性质的优秀作品．本书就是一本兼具教科书和高级科普性质的读物，是作者在 California Institute of Technology 讲课期间所写的讲义改编成的一本两卷的教科书（*Mathematics* 160）的第 2 卷（第 1 卷是 *Introduction to Analytic Number Theory*（这本书已由哈尔滨工业大学出版社出版了，唐太明翻译的中译本））．

作者在第一版序言中提到阅读本书（即上述讲义的第 2 卷）要比阅读第 1 卷需要更多的数论方面以及复变函数基本概念方面的背景知识．其实我觉得，本书所要求的数论方面的知识十分有限，读者只需具备同余式方面的知识即可．反过来，学习初等数论的读者，其实可以从本书得到不少有益的补充，例如关于 Farey（法雷）分数，关于 Dedekind（戴德金）和的结果，以及关于用有理数逼近实数方面的各种逼近的结果（Dirichlet（狄利克雷）逼近定理，Liouville（刘维尔）逼近定理和一维以及高维的 Kronecker（克罗内克）逼近定理及其应用）等．其中 Kronecker（克罗内克）逼近定理对于一个数论问题的应用，可见哈尔滨工业大学出版社出版的《600 个世界著名征解问题（500 个世界著名征解问题修订版）》的 4～192 题（第一版中的第 187 题）（在两种版本中，此问题都是初等数论部分中的最后一个问题）．为了减少没有看到上述版本图书的读者查阅的困难，译者特地把这一问题在此引用一下：

设 $x>1$ 是一个实数，$a_n=[x^n]$，ξ 是无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$（其中 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 表示在小数点后依次写下数字 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，例如对 $x=\pi$，$\xi=0.393\ 197\cdots$），问 ξ 是否能是一个有理数.

这个问题是一个我们数学界称之为解决时需要"耍大刀"的问题（即解决时需要应用一个证明比较困难或较长的定理），这里的"大刀"就是 Kronecker（克罗内克）逼近定理. 当然，这只是译者所知道的解法，如果读者能不引用这个结果而用通常的初等方法去解决这个问题那是令人很感兴趣的. 作为对比，我们请读者考虑下面的类似问题就可知这个问题是有一定难度的：

问题 1 设 $a_n\equiv C_{2n}^n \pmod 3$，证明：$\theta=0.a_1a_2a_3\cdots$ 是无理数（其中 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 表示在小数点后依次写下数字 $a_1,a_2,a_3,\cdots$）.

这个问题只需用到初等方法，例如只需证明 $\theta=0.a_1a_2a_3\cdots$ 中可出现长度任意大的，完全由 0 组成的段即可.

设 F_n 表示第 n 个 Fibonacci（斐波那契）数，用完全初等的方法就可证明 $\theta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}$ 是一个无理数，但是是一个代数数.

然而要想证明：

问题 2 $\theta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}$ 是一个无理数，乃至是一个超越数.

这可就比上面的问题难多了. 解决这个问题就需用到本书中所介绍的 Dirichlet（狄利克雷）级数. 可见 Paulo Ribenboim（保罗·里本博伊姆），*My Nunbers, My Friends, Popular Lectures on Number Theory*（我的数，我的朋友——一本关于数论的通俗讲义），Springer-Verlag，New York，2000（译者注：本书目前还没有中译本）.

至于如何解决下述问题，译者到目前为止尚不知道，如果有任何读者可以解决这个问题并告知译者（fby@amss.ac.cn），译者将非常感谢.

问题 3 设 $d_n=[1,2,\cdots,n]$ 表示 $1,2,\cdots,n$ 的最小公倍数，证明：$\theta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d_n}$ 是一个无理数.

本书在讲述椭圆函数时，采用了与 W. A. Coppel（W. A. 科佩尔）的《数论——数学导引》（冯贝叶译，由哈尔滨工业大学出版社出版）一书中不同的路线，这两种不同的路线代表了椭圆函数发展历史上几种不同的路线. 历史上一些著名的数学家例如 Abel（阿贝尔），Legendre（勒让德），Riemann（黎曼），Jacobi（雅可比），Weierstrass（维尔斯特拉斯）和 Euler（欧拉）出于各自研究的兴

趣，都得出了很多间接或直接与椭圆函数有关的结果(可详见 Coppel(科佩尔)的书)，他们所采用的不同方法和路线就导致了今天在讲解椭圆函数的理论时可以选择不同的方法和路线.

本书所采用的方法是首先给出椭圆函数的定义，再用 Weierstrass(维尔斯特拉斯)的 $\wp$ 函数给出椭圆函数的具体例子，最后再讨论椭圆函数的性质及其应用，而 Coppel(科佩尔)的书是首先由椭圆积分讲起，由此再引出具体的椭圆函数，最后也要归结到椭圆函数的性质及其应用. 这两种路线各有特点，也会导致有一些共同的讨论，例如二者都要讨论模群及模群上的变换，其讲法也几乎是相同的(我想，无论谁来讲，大概也只能这样讲). 但是在引进椭圆函数的方法时，讲法就不一样了. 从概念的清晰和简明角度来说，我认为本书的讲法是给人非常清楚和简明的感觉的，但是为了追求简明性，就需要牺牲发展的自然性，这是指历史上椭圆函数的得出绝不是像今天一样一开始就知道了它的定义，而是椭圆函数发展到后来才认识到的，另外 Weierstrass(维尔斯特拉斯)的 $\wp$ 函数也显得很突然，好像纯粹是为了给出一个椭圆函数的具体例子而出场的(不过你得承认，Weierstrass(维尔斯特拉斯)的确是一个利用级数给出例子的高手，像他那个处处连续而处处不可微的例子就太有名了). 而相比之下，Coppel(科佩尔)的书中所采用的方法就显得比较自然. 由于在历史上，像 Jacobi(雅可比)，Bernoulli(伯努利)，Euler(欧拉)这些数学家同时也都是力学专家，所以他们在研究时必然会遇到求运动的周期问题(像求最简单的单摆的摆动周期)，而解决这个问题就必然会导致研究椭圆积分. 一开始，人们并未认识到并不是所有的积分都可用初等函数表出的，后来才发现这一点，并严格证明了某些积分的不可表达性，从此就开始了对一些不可用初等函数表出的积分所定义的函数的研究，按照这条路线走下去，就会导致椭圆函数的出现. 所以，Coppel(科佩尔)的书在讲椭圆函数的那一章中一开始就声明:“我们关于椭圆函数的讨论可看成是一种比较容易的修改版本，由于不需用到 Liouville(刘维尔)定理、Riemann(黎曼)曲面或 Weierstrass(维尔斯特拉斯)函数，因此我们希望用找出对象源头的方式可以提供一种自然的但是严格的方法，同时又是很适用于应用的方法.”这种方式虽然符合了椭圆函数历史发展的过程，显得比较自然，但是在简明性上就要打折扣了. 按照这种方法，你一开始的注意力会被篇幅相当长的关于椭圆积分的讨论所吸引，并且在引出椭圆函数的性质时，还要利用微分方程的性质，而这也不比利用级数更初等. 等绕了一个大圈子后才会讲到椭圆函数. 两种方法孰优孰劣，恐怕难以判断，只能说各有特点. 因此我建议读者最好

将这两本书对照着看收获会更大. 另外，本书中不加证明地引用了好几个 *Introduction to Analytic Number Theory* 中的结果，因此我建议，在阅读本书时最好也常备这本书，可省去不少查阅的麻烦.

大家都知道，除了 2,3,4 次方程的根可用根号表出之外，一般的 5 次以上的方程的根都无法用根号表出. 这是一个数学家经历了很长时间(从古希腊的三等分角问题直到 Galois(伽罗瓦)的可解群的理论出现)才认识到的事实.(这也说明，人类对事物的本来面目的认识过程是多么曲折. 这个问题之所以花了这么长时间才解决，一方面当然是数学的水平还未发展到解决的那一步，有许多需要的结果还未得出，另一方面就在于人们对解方程的认识与其本来面目有偏差，一开始就提出来的用根号来表出方程的根是一个没有解答的伪问题. 可是由于 2,3,4 次方程的根都可用根号表出这一事实又很容易和自然地导致人们用根号表出更高次方程的根这一企图和想法.)但是我们现在又知道 3 次方程的根可用三角函数表出(见冯贝叶，《多项式与无理数》，哈尔滨，哈尔滨工业大学出版社，2008). 这就说明，如果跳出了原来不合理的要求，那么解决问题的路子就宽了许多(正所谓退一步海阔天空). 在椭圆函数的研究中，会出现一个模函数 $j(\tau)$和一种 θ一函数(见 W. A. Coppel(W. A. 科佩尔)的《数论——数学导引》)，θ一函数有很多类似于三角函数的性质(例如加法定理，但是更复杂)，而 $j(\tau)$则满足一些方程，这就使它们产生了一些令人吃惊的应用，例如一般的 5 次方程可以用 j 解出. 还有用 $j(\tau)$的展开式的系数可以解释为什么 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 高度近似于一个整数 262 537 412 640 768 744(精确到第 12 位小数). 模函数和这些表面上看起来毫无关系的事情之间的奇妙联系正是数学的各个领域背后至今也还没有完全被认识的神秘联系的表现. 感兴趣的读者可参看《数学译林》，28(2009)，1:40- 44，冯贝叶译《模的奇迹》一文.

Tom M. Apostol(托姆 M. 阿普斯托)是一位善于把复杂的事情用有条理的、简明的方式解释得很清楚的高手. 我以能成为他的这本书的译者而感到荣幸. 当然，缺点和错误在所难免，希望专家和读者指出，译者将不胜感激.

冯贝叶

◎第二版序言

这一版的主要变化是把原来在第一版第 3 章中关于 Dedekind(戴德金)的 η 函数的变换公式放到了书末的参考文献之前,除此之外,这一版与第一版的内容几乎完全相同.第一版中的印刷错误在这一版中都已更正.习题做了小部分调整,参考文献也做了更新.

T. M. Apostol

1989 年 7 月

◎第一版序言

本书是根据我过去 25 年在 California Institute of Technology(加利福尼亚技术研究所)讲课期间所写的讲义改编成的一本两卷的教科书(*Mathematics* 160)的第 2 卷①.

比起第 1 卷来,第 2 卷要求读者有更多的数论方面以及复变函数基本概念方面的知识背景.

本书的主要内容包括介绍椭圆函数和模函数及其对于数论的应用. 所处理的主要题目有关于分拆函数的 Rademacher(拉德马切尔)级数的收敛性,关于模函数 $j(\tau)$ 的 Fourier(傅里叶)系数的 Lehner(莱纳)收敛性,以及具有积性 Fourier(傅里叶)系数的整形式的 Hecke(赫克)理论. 最后一章讲述了广义的 Dirichlet(狄利克雷)级数等价性的 Bohr(博尔)理论.

这两卷书都强调了一些近年来在当代已获得了大量进展的课题的经典方面. 我希望这两卷书能使非专业的数学爱好者熟悉数学的某些重要的和引人入胜的内容,同时提供某些每个该领域的专家都应知道的背景知识.

像第 1 卷一样,本书是献给那些已学过本课程并有志于在数论及数学的其他领域做出杰出贡献的学生的.

T. M. Apostol

1976 年 1 月

---

① 本书的第一卷已由 Springer-Verlag 出版社作为 Undergraduate Texts in Mathematics(大学生数学教科书)丛书中的一本书出版,书名是 *Introduction to Analytic Number Theory*(《解析数论导引》).

◎目录

第 5 章　分拆函数的 Rademacher(拉德马切尔)级数　//100

第 6 章　具有积性系数的模形式　//121

椭圆函数

第1章

1.1 引　言

加法数论关注的课题是把一个整数 n 表示成某个给定的整数集合 S 中的整数的和. 例如 S 可以是素数、平方数、立方数或其他特殊整数的集合. 我们的问题是，是否能把一个给定的整数表示成 S 的元素的和，以及如果能，那么有多少种表示方式.

设 $f(n)$ 为把 n 表示成 S 的元素的和的方式的数目，我们进一步要问 $f(n)$ 的性质是什么，例如对充分大的 n，其渐近行为是怎样的. 在后面几章中，我们将确定把 n 表示成小于或等于 n 的正整数的和的方式的数目 —— 分拆函数 $p(n)$ 的渐近值.

分拆函数 $p(n)$ 和其他一些加法数论中的函数都与复变函数中被称为椭圆模函数的一类函数密切相关. 它们在加法数论中所起的作用类似于 Dirichlet(狄利克雷) 级数在乘法数论中所起的作用. 本书的前 3 章介绍椭圆模函数的理论，在第 5 章中给出这一理论对于分拆函数的应用.

我们从讲述双周期函数开始.

1.2 双周期函数

称一个复变量的函数 f 是以 ω 为周期的周期函数，如果

$$f(z+\omega)=f(z)$$

其中 z 和 $z+\omega$ 都在 f 的定义域中. 如果 ω 是 f 的周期，那么给出一个任意的整数 n，$n\omega$ 也将是 f 的周期. 如果 ω_1 和 ω_2 都是 f 的周期，那么对于任意选定的整数 m 和 n，$m\omega_1+n\omega_2$ 也将是 f 的周期.

定义 1 称一个函数 f 是双周期的，如果它有两个周期 ω_1 和 ω_2，并且它们的比 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 不是实数.

在上面的定义中，我们要求两个周期的比不是实数是为了避免出现退化情况. 例如，如果 ω_1 和 ω_2 是周期并且它们的比是实数，而且是有理数，那么容易证明每个周期都是某个周期的整数倍. 事实上，如果 $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{a}{b}$，其中的 a 和 b 是互素的整数，那么存在整数 m 和 n，使得 $mb+na=1$. 令 $\omega=m\omega_1+n\omega_2$，则 ω 是一个周期，并且我们有

$$\omega=\omega_1\left(m+n\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=\omega_1\left(m+n\frac{a}{b}\right)=\frac{\omega_1}{b}(mb+na)=\frac{\omega_1}{b}$$

所以 $\omega_1=b\omega$，$\omega_2=a\omega$. 因而 ω_1 和 ω_2 都是 ω 的整数倍.

如果比 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 是实数，而且是无理数，那么可以证明 f 具有任意小的周期(见定理 7.12). 一个在每个连通开集上是解析的，且具有任意小周期的函数必定是一个常数. 事实上，在 f 的每个解析点处，我们有

$$f'(z)=\lim_{z_n\to 0}\frac{f(z+z_n)-f(z)}{z_n}$$

其中 $\{z_n\}$ 是任意趋于 0 的非零复数的序列. 如果 f 具有任意小的周期，我们就可选 $\{z_n\}$ 是趋于 0 的周期组成的序列. 因而 $f(z+z_n)=f(z)$，因此 $f'(z)=0$. 换句话说，在 f 的每个解析点处，$f'(z)=0$，因此在 f 是解析的每个连通开集上，f 必定是一个常数.

1.3 基本周期对

定义 2 设 f 具有周期 ω_1 和 ω_2，并且它们的比 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 不是实数. 称一个周期的对子 (ω_1, ω_2) 是一个基本对，如果 f 的每一个周期都具有 $m\omega_1 + n\omega_2$ 的形式，其中 m 和 n 都是整数.

每个周期 ω_1, ω_2 的基本对确定了一个平行四边形的网格，这个网格构成了一个平面的铺砌，它们被称为周期平行四边形. 图 1.1(a) 显示了一个这种平行四边形的例子，其顶点是周期 $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$. 如图 1.1(b)，习惯上，我们把两条相交的边及其上面的点看成属于周期平行四边形的唯一的边界点.

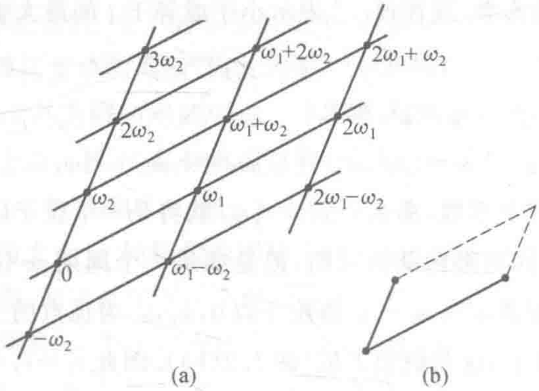

图 1.1

注意：如果 ω_1 和 ω_2 是两个比不是实数的复数，我们将用 $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ 或简单地用 Ω 来表示所有的线性组合 $m\omega_1 + n\omega_2$ 组成的集合，其中 m 和 n 是任意的整数. 这个集合称为是由 ω_1 和 ω_2 生成的格.

定理 1.1 设 (ω_1, ω_2) 是周期的基本对，那么在以 $0, \omega_1, \omega_2$ 为顶点的三角形的内部或边界上不含其他的周期，反之，任何具有这个性质的周期对是周期的基本对.

证明 考虑如图 1.2(a) 所示的以 $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2$ 和 ω_2 为顶点的平行四边形，这个平行四边形内部或边界上的点具有

$$z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$

的形式，其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, 0 \leqslant \beta \leqslant 1$. 在这种点中，仅有的周期是 $0, \omega_1, \omega_2$ 和 $\omega_1 + \omega_2$，因此以 $0, \omega_1, \omega_2$ 为顶点的三角形不包含除顶点之外的周期.

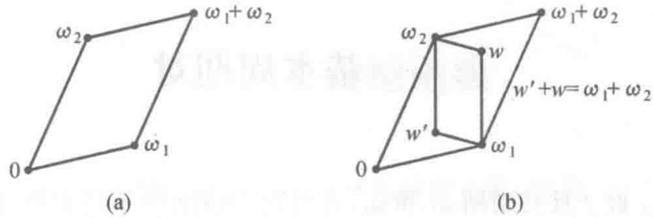

图 1.2

反之，假设以 $0,\omega_1,\omega_2$ 为顶点的三角形不包含除顶点之外的周期，并设 ω 是任意一个周期. 我们证明 $\omega=m\omega_1+n\omega_2$，其中 m,n 是某两个整数. 由于 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 不是实数，因此 ω_1 和 ω_2 在实数域上是线性无关的，因而

$$\omega=t_1\omega_1+t_2\omega_2$$

其中 t_1 和 t_2 都是实数. 现在设 $[t]$ 表示小于或等于 t 的最大整数，并令

$$t_1=[t_1]+r_1,\quad t_2=[t_2]+r_2$$

其中 $0\leqslant r_1<1,0\leqslant r_2<1$. 那么

$$\omega-[t_1]\omega_1-[t_2]\omega_2=r_1\omega_1+r_2\omega_2$$

如果 r_1,r_2 之中有非零数，那么 $r_1\omega_1+r_2\omega_2$ 就将是一个位于以 $0,\omega_1,\omega_1+\omega_2$ 和 ω_2 为顶点的平行四边形内部的周期，但是如果一个周期 w 位于这个平行四边形内部，那么 w 或者 $\omega_1+\omega_2-w$ 将位于以 $0,\omega_1,\omega_2$ 为顶点的三角形内部或联结 ω_1 和 ω_2 的对角线上，这与假设矛盾(图 1.2(b)). 因此 $r_1=r_2=0$，这就完成了证明.

下面的定理留给读者作为练习，它描述了等价的周期对之间的基本关系.

定理 1.2 两个周期对 (ω_1,ω_2) 和 (ω'_1,ω'_2) 等价的充分必要条件是存在 2×2 整数矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，使得

$$\begin{pmatrix}\omega'_2\\ \omega'_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix}$$

或者，换个说法就是

$$\omega'_2=a\omega_2+b\omega_1$$

$$\omega'_1=c\omega_2+d\omega_1$$

其中矩阵的行列式

$$ad-bc=\pm 1$$